

BOLETÍN 3.5 .- APLICACIONES DE LA DERIVADA

1 Estudia la monotonía y la curvatura y determina las extremos relativos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = x^3 - 3x + 4$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$
c) $f(x) = x^4 - 6x^2$
d) $f(x) = -3x^4 + 4x^3$
e) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + x - 10$
f) $f(x) = x^3 - 3 \ln x + 2$
g) $f(x) = 3x^5 - 20x^4$
h) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$
i) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$
j) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$
k) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$
l) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

- m) $f(x) = \frac{8 - 3x}{x^2 - 2x}$
n) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
o) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$
p) $f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$
q) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$
r) $f(x) = \frac{x^3}{(2-x)^2}$
s) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{2 - x}$

2 Estudia la monotonía y la curvatura y determina las extremos relativos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = e^{-x^2}$
b) $f(x) = e^{x^3 - 6x + 2}$
c) $f(x) = x \cdot e^{1-x}$
d) $f(x) = (x^2 - 11x + 31) \cdot e^x$
e) $f(x) = e^{2x} - 3e^x + x - 3$
f) $f(x) = \frac{x^3}{e^{2x}}$

- l) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
m) $f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$
n) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$
o) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
p) $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - x}$
h) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
i) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$
j) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
k) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

3 Determina los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones utilizando el criterio de las derivadas sucesivas.

- a) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x + 4$
b) $f(x) = x^3 - 12x$
c) $f(x) = x^4 - 4x^3$
d) $f(x) = x^4 - 2x^2$
e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4$
f) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$
g) $f(x) = x^2 \cdot (x-3)^2$

- h) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$
i) $f(x) = x \cdot e^x$
j) $f(x) = (2-x) \cdot e^{-x}$
k) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$
l) $f(x) = x - \ln(1+x)$
m) $f(x) = x \cdot \ln x$

4 Halla una función polinómica de 2º grado sabiendo que pasa por el punto $P(0,1)$ y que la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $Q(2,-1)$ vale 0.

5 Halla una función polinómica de grado 3 sabiendo que tiene un extremo relativo en $(0,1)$ y un punto de inflexión en $(1,-1)$.

6 Halla a , b y c sabiendo que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(0,3)$ y tiene extremos relativos en $x=1$ y $x=3$. ¿Qué tipo de extremos son?

7 Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una función polinómica que cumple:

- a) Pasa por el punto $P(1,0)$
- b) La recta tangente a $f(x)$ en $x=0$ es paralela a $2x - y = 0$
- c) Tiene extremos relativos en $x=1$ y $x=2$

Halla el valor de a , b , c y d . ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

8 Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1}, & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 10x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

9 Sea la función f definida mediante $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } x < 1 \\ 0, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Determine a y b sabiendo que f es continua y tiene un mínimo en $x = -1$.

10 Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 3x + 48, & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{60}{x}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Estudie la monotonía de $f(x)$ y calcule sus extremos.

11 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Obtenga los extremos de la función.

b) Estudie su curvatura.

12 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3e^x, & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 3, & \text{si } 0 < x \leq 3 \end{cases}$

a) ¿Es continua en $x = 0$? b) Calcule su máximo y su mínimo, absolutos, en su dominio de definición.

13 1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es -12 . Calcula razonadamente los valores de los parámetros a , b , y c . (1.5 puntos)

14 (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
- b) Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.