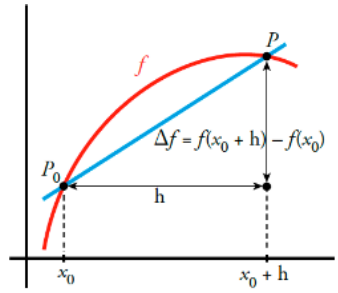
UNIDAD 5.- DERIVACIÓN

1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

El **cociente incremental** $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se llama **tasa de variación media** y mide la variación relativa de f con relación a x en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$. Gráficamente, es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_0(x_0, f(x_0))$ y $P(x_0 + h, f(x_0 + h))$.



$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ es la pendiente de P_0P.

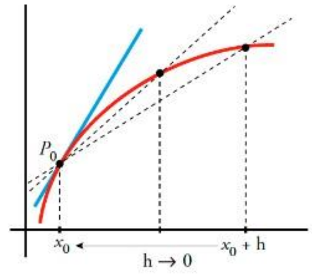
2. DERIVADA EN UN PUNTO

El límite, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h}$, si existe y es finito, se llama **derivada de la función f en x_0** y se designa por $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$f'(x_0)$ es la **tasa de variación instantánea** de f en x_0.

Gráficamente, $f'(x_0)$ es la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0.



$f'(x_0)$ es la pendiente de la tangente en x_0.

Si $f'(x_0)$ existe, se dice que **f es derivable** en x_0.

→ EJEMPLOS

1. *Si $f(x) = x^2$, hallar su derivada en $x = 1$.*

Solución

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = h + 2$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+2) = 2$$

$y = x^2$ es derivable en $x = 1$. Su derivada es 2.

Significa que la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es 2.

2. *Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, hallar su derivada en $x = 0$.*

Solución

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^{1/3}-0}{h} = h^{-2/3}$$

$$\lim_{h \to 0} (h^{-2/3}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

El valor obtenido no es finito, por tanto, no existe $f'(0)$. La recta tangente a la curva en $x = 0$ es perpendicular al eje X. La función no es derivable en ese punto.

3. DERIVADAS LATERALES

Se define la **derivada por la izquierda** de f en x_0:

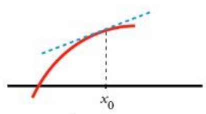
$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Se define la **derivada por la derecha** de f en x_0:

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

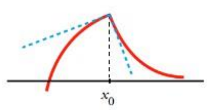
A ambas se las llama **derivadas laterales.**

Si las dos derivadas laterales en x_0 coinciden, entonces f es **derivable** en x_0.



FUNCIÓN DERIVABLE: $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$

Si las dos derivadas laterales en x_0 son distintas, entonces la gráfica de la función tiene un **punto anguloso** en x_0.



PUNTO ANGULOSO: $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$

f es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) si lo es en cada punto de (a, b).

f es **derivable en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si lo es en (a, b) y existen las derivadas laterales $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$.

4. FUNCIÓN DERIVADA : REGLAS DE DERIVACIÓN

SUMA	$F(x) = f(x) + g(x) \rightarrow F'(x) = f'(x) + g'(x)$
PRODUCTO POR UN NÚMERO	$F(x) = kf(x) \rightarrow F'(x) = kf'(x)$
PRODUCTO	$F(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
COCIENTE	$F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow F'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
COMPOSICIÓN (regla de la cadena)	$F(x) = g[f(x)] \rightarrow F'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$ $F(x) = h(g[f(x)]) \rightarrow F'(x) = h'(g[f(x)]) \cdot g'[f(x)] \cdot f'(x)$
POTENCIA	$f(x) = x^k \rightarrow f'(x) = k\,x^{k-1},\ k \in \mathbb{R} - \{0\}$ $F(x) = f(x)^k \rightarrow F'(x) = k\,f(x)^{k-1} \cdot f'(x)$ CASOS PARTICULARES: $f(x) = 1 = x^0 \rightarrow f'(x) = 0$ $f(x) = x = x^1 \rightarrow f'(x) = 1$ $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $F(x) = \sqrt{f(x)} \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$ $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $F(x) = \dfrac{1}{f(x)} \rightarrow F'(x) = -\dfrac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x)$
EXPONENCIALES	$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$ $F(x) = e^{f(x)} \rightarrow F'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ $f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$ $F(x) = a^{f(x)} \rightarrow F'(x) = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
LOGARÍTMICAS	$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x},\ x > 0$ $F(x) = \ln f(x) \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x),\ f(x) > 0$ $f(x) = \ln\lvert x\rvert \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$ $F(x) = \ln\lvert f(x)\rvert \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x),\ f(x) \neq 0$ $f(x) = \log_a x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a},\ x > 0$ $F(x) = \log_a f(x) \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{\ln a} \cdot f'(x),\ f(x) > 0$ $f(x) = \log_a \lvert x\rvert \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a},\ x \neq 0$ $F(x) = \log_a \lvert f(x)\rvert \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{\ln a} \cdot f'(x),\ f(x) \neq 0$
TRIGONOMÉTRICAS	$f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f'(x) = \cos x$ $F(x) = \operatorname{sen} f(x) \rightarrow F'(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$ $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$ $F(x) = \cos f(x) \rightarrow F'(x) = -\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$ $f(x) = \operatorname{tg} x \rightarrow f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $F(x) = \operatorname{tg} f(x) \rightarrow F'(x) = [1 + \operatorname{tg}^2 f(x)] \cdot f'(x)$

Si una función, f, es derivable en un intervalo, I, la función f' :

$$x \longrightarrow f'(x)$$

definida en I, se llama **función derivada** de f.

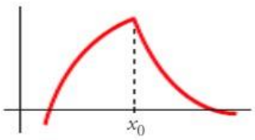
Si f' es derivable, su derivada se llama f'' (se lee ***f* segunda**).

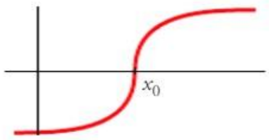
Así, sucesivamente, se definen f''', f^{IV}, ..., f^{n} (f tercera, f cuarta, f n-ésima).

5. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en él. Es lo que ocurre en los puntos angulosos y en los puntos de tangente «vertical» (es decir, perpendicular al eje X).

$\boxed{\text{continuidad}} \not\Rightarrow \boxed{\text{derivabilidad}}$





Sin embargo:

Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

$\boxed{\text{derivabilidad}} \Rightarrow \boxed{\text{continuidad}}$

Estudiar la derivabilidad en $x = -2$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + x, & x \le -2 \\ x^2 + 5x + 8, & x > -2 \end{cases}$$

- Continuidad en $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^3 + 3x^2 + x) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + (-2) = 2$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2 + 5x + 8) = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 8 = 2$$

$\lim_{x \to -2} f(x) = 2$. Además $f(-2) = 2$. Por tanto $f(x)$ es continua en $x = -2$.

- Derivabilidad en $x = -2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x + 1, & x < -2 \\ 2x + 5, & x > -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \lim_{x \to -2^-} (3x^2 + 6x + 1) = 1 = f'(-2^-)$$

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = \lim_{x \to -2^+} (2x + 5) = 1 = f'(-2^+)$$

Las derivadas laterales son finitas y coinciden. Por tanto f es derivable en $x = -2$ y es $f'(-2) = 1$.

Calcular m y n para que la siguiente función sea derivable en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m, & x \le 1 \\ -x^2 + nx, & x > 1 \end{cases}$$

- Para que sea derivable ha de ser continua en $x = 1$. Para ello, hemos de procurar que los trozos «empalmen», es decir, que los límites laterales en $x = 1$ coincidan:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 - 5 + m \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = -1 + n \end{array}\right\} \to 1 - 5 + m = -1 + n \to m - 4 = n - 1 \to m - n = 3$$

- f será derivable si las dos derivadas laterales en $x = 1$ coinciden:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x - 5) = -3 \\ \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} (-2x + n) = -2 + n \end{array}\right\} \to -3 = -2 + n \to n = -1$$

Para que la función sea derivable en $x = 1$ han de cumplirse las dos condiciones anteriores:

$$\left.\begin{array}{r} m - n = 3 \\ n = -1 \end{array}\right\} \to m = 2, \ n = -1$$

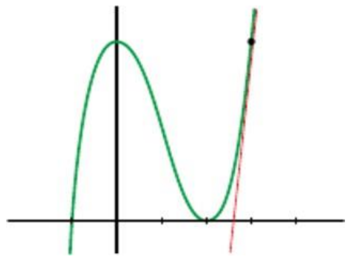
f es derivable en $x = 1$ si $m = 2$, $n = -1$. Su derivada es $f'(1) = -3$.

6. ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UNO DE SUS PUNTOS

- Ordenada del punto: $f(x_0)$
- Pendiente de la recta: $m = f'(x_0)$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 3}$ *en* $x = 3$.

- Cálculo de la ordenada: $f(3) = \dfrac{3^2 - 2\cdot 3}{3+3} = \dfrac{1}{2}$

  La curva pasa por $\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$.

- Pendiente: $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x+3)-(x^2-2x)}{(x+3)^2}$; $f'(3) = \dfrac{4\cdot 6 - 3}{6^2} = \dfrac{7}{12}$

La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es: $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{12}(x-3)$

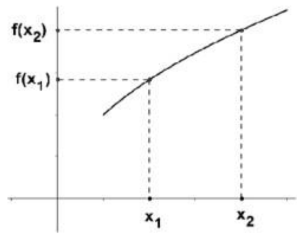
7.- APLICACIONES DE LA DERIVADA

7.1 .-MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

a) CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.

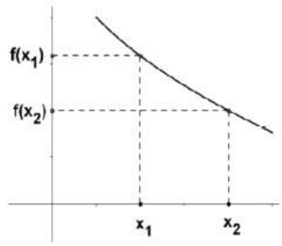
<u>Definición:</u> Se dice que una función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo I si se verifica que:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in I$

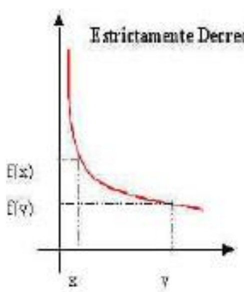


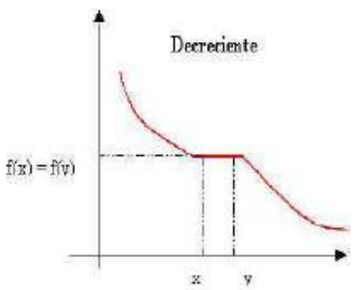
<u>Definición:</u> Se dice que una función $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo I si se verifica que:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in I$



Nota .- Cuando las desigualdades de las definiciones anteriores son estrictas, hablamos de función ***estrictamente creciente o decreciente.***





→ Relación entre la monotonía de una función y el signo de su derivada.

Supongamos que una función *f(x)* es derivable en un intervalo $I = (a, b)$.

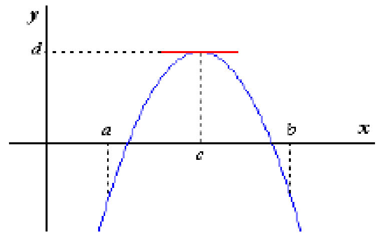
Entonces:

1) $f(x)$ **es creciente en I** $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I$

2) $f(x)$ **es decreciente en I** $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in I$

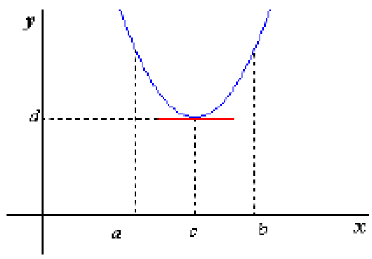
b) MÁXIMOS Y MÍNIMOS

→ Extremos relativos o locales.



Definición: Se dice que a es un **máximo relativo o local** de una función $f(x)$ si se verifica que

$f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in$ entorno de a.



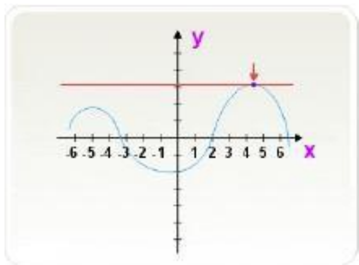
Definición: Se dice que a es un **mínimo relativo o local** de una función $f(x)$ si se verifica que

$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in$ entorno de a.

→ Extremos absolutos.

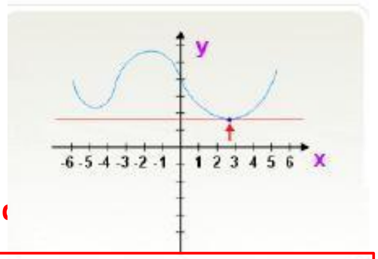
Definición: Se dice que a es un **máximo absoluto** de una función $f(x)$ si se verifica que

$f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in$ Dominio.



Definición: Se dice que a es un **mínimo absoluto** de una función $f(x)$ si se verifica que

$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in$ Dominio.



→ Condición necesaria para la existencia

Sea a un punto perteneciente al interior del dominio de f.

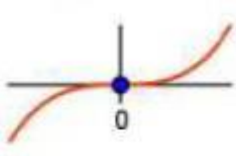
Supongamos que f es derivable en el punto a.

Entonces:

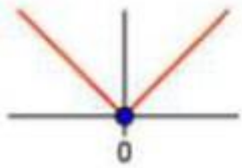
Si a es extremo relativo de $f \Rightarrow f'(a) = 0$

(Para que a pueda ser un extremo relativo de la función $f(x)$ es necesario que $f'(a) = 0$)

- La condición anterior **es necesaria pero no suficiente.** Por ejemplo el punto x = 0 anula la derivada de la función f(x) = x^3 y sin embargo x = 0 no es un extremo relativo de la función (f es estrictamente creciente en IR)



- **Un punto puede se extremo relativo de una función sin que** ***f ´(x) = 0***. Así la función *f(x)* = I *x* I presenta un mínimo relativo (y también absoluto) en *x = 0* y en ese punto no es derivable.



PUNTOS SINGULARES: son x tal que f´(x) =0
PUNTOS CRÍTICOS: son de tres tipos:

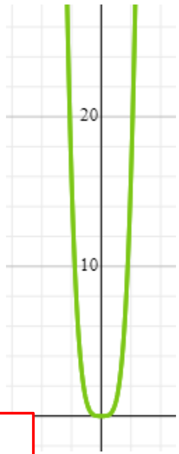
- Puntos donde existe la derivada y vale 0 (es decir puntos singulares)
- Puntos donde no hay derivada
- extremos del dominio , a o b , si éste es un intervalo cerrado [a , b]

Para calcular los extremos relativos y absolutos de una función tenemos que estudiar sus puntos críticos

→ Criterio de la derivada segunda para localizar extremos relativos

Sea f una función dos veces derivable en un punto a del dominio.

1) Si $f\,'(a) = 0$ y $f\,''(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x = a$.
2) Si $f\,'(a) = 0$ y $f\,''(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $x = a$.



- El resultado recíproco no es cierto, puesto que la función *f(x) = x⁴* posee un mínimo local en *x = 0* y, sin embargo, *f ´´(0) = 0.*

→ Condición necesaria y suficiente para localizar extremos relativos.

Sea a un punto interior del dominio de f.

Supongamos que a es un punto crítico de f.

En un entorno de a cambia la monotonía $\Leftrightarrow$ a extremo local de f. $\begin{pmatrix} a \text{ máximo si } \nearrow\searrow \\ a \text{ mínimo si } \searrow\nearrow \end{pmatrix}$

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y determinar sus máximos y sus mínimos:

a) $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$

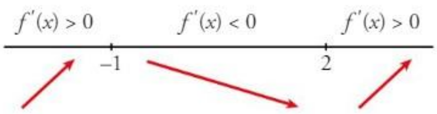
b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & si \quad x \le 0 \\ \ln(x+1) & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) La función es continua y derivable en todo su dominio, $\mathbb{R}$.

f es creciente en los intervalos donde $f' > 0$, y decreciente si $f' < 0$. Buscamos los puntos de derivada nula.

$$f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 2)$$

Como $e^x > 0$ para cualquier x, f' se anula si: $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 2$



f crece en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-1, 2)$.

Tiene un máximo en $\left(-1, \frac{5}{e}\right)$ y un mínimo en $(2, -e^2)$.

b) La función es continua en $x = 0$, pues $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

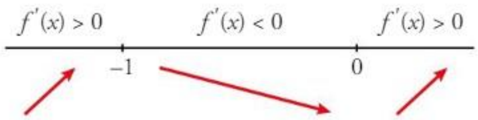
También lo es si $x \neq 0$. Por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

Su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Como $f'(0^-) = -2 \neq f'(0^+) = 1$, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Hallamos los puntos en los que $f'(x) = 0$:

$-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$; $\dfrac{1}{x+1} = 0$ no tiene solución.

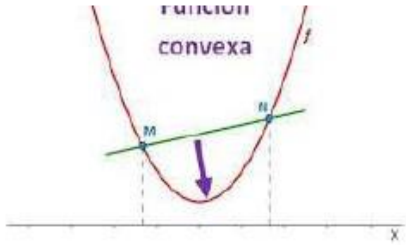
Estudiamos el signo de la derivada:



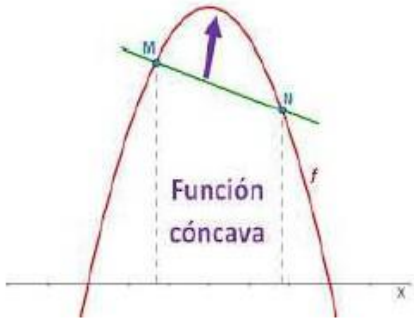
f crece en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0)$.

Tiene un máximo en $(-1, 1)$ y un mínimo en $(0, 0)$.

7.2.- CURVATURA DE UNA FUNCIÓN: CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN



Definición: Una función f(x) es **convexa** en un intervalo si para cualquier par de puntos del intervalo, el segmento que los une queda por encima de la gráfica de f(x) en dicho intervalo.



Definición: Una función f(x) es **cóncava** en un intervalo si para cualquier par de puntos del intervalo, el segmento que los une queda por debajo de la gráfica de f(x) en dicho intervalo.

→ Relación entre la curvatura y la derivada 2ª

Supongamos $\exists f''(x)\ \forall x \in I$.

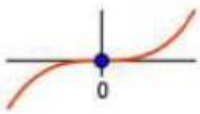
Entonces:

1) f **convexa en** $I \Leftrightarrow f'' \geq 0\ \forall x \in I$.
2) f **cóncava en** $I \Leftrightarrow f'' \leq 0\ \forall x \in I$.

→ Punto de Inflexión

Definición: Un **punto de inflexión** o **punto de silla** es un punto donde la función cambia de cóncava a convexa, o viceversa.

Ejemplo: La función $f(x) = x^3$ presenta en $x = 0$ un punto de inflexión porque en dicho punto la función cambia de cóncava a convexa.



→ **Condición necesaria para la existencia de un punto de inflexión**

Sea a un punto interior del dominio de f.

Supongamos $\exists\, f''(a)$.

Entoces:

a es un punto de inflexión de $f \Longrightarrow f''(a) = 0$

→ **Condición suficiente para la existencia de un punto de inflexión**

Sea a un punto interior del dominio de f.

Supongamos que:

1) $f''(a) = 0$
2) $\exists\, f'''(a)$

Entonces:

$f'''(a) \neq 0 \Longrightarrow a$ es un punto de inflexión de f.

________ La condición suficiente no afecta a los puntos $a \,/\, \nexists\, f''(a)$. Los candidatos a puntos de inflexión hay que buscarlos en los puntos a / $f''(a) = 0$ ó $\nexists\, f''(a)$.

→ **Condición necesaria y suficiente para localizar los puntos de inflexión.**

Sea a un punto interior del dominio de f.

Supongamos $\exists\, f''(a)$.

Entonces:

$$\left\{\begin{array}{c} f''(a) = 0 \\ En\ \ a\ \ cambia\ la\ curvatura \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{(a, f(a)) punto de inflexión.}$$

7.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

1.- *DOMINIO*
2.- *CORTES CON LOS EJES*
3.- *SIMETRÍAS:FUNCIÓN PAR, FUNCIÓN IMPAR*
4.- *CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD*
5.- *ASÍNTOTAS*
6.- *MONOTONÍA Y EXTREMOS*
7.- *CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN*
8.- *GRÁFICA*