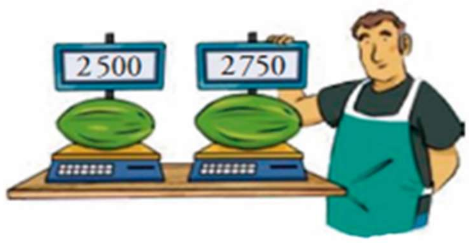
UD 8 – PROPORCIONALIDAD DE MAGNITUDES Y PORCENTAJES



TIEMPO (s)	1	2	3	...	6	...	24	...
DISTANCIA (m)	3	6	9	...	18	...	72	...

CONTENIDOS:

1) Razón y proporción.
2) Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad. Magnitudes no proporcionales.
3) Regla de Tres compuesta.
4) Cálculos con porcentajes (mental, manual y con calculadora). Aumentos y diminuciones porcentuales.
5) Aplicaciones en problemas contextualizados.

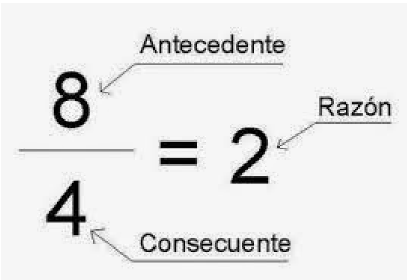
RAZÓN Y PROPORCIÓN:

Una **razón matemática** es una manera de expresar **la relación** entre dos números. Se expresa mediante la fracción $\frac{a}{b}$ y se lee "a es a b".

- ✓ Si la edad de Marcos es 8 años y la de su hermana Uxía 4 años, la razón entre la edad de Marcos y la de Uxía es:

$$\frac{Edad\ de\ Marcos}{Edad\ de\ Uxía} = \frac{8}{4} \rightarrow \text{Se lee “8 es a 4”}$$

- ✓ Si simplificamos la razón veremos que $\frac{8}{4} = 2$, esto significa que Marcos tiene el doble de edad que Uxía.



- ✓ En cambio, la razón entre la edad de Uxía y la de Marcos es:

$$\frac{Edad\ de\ Marcos}{Edad\ de\ Uxía} = \frac{4}{8}$$

- ✓ Si simplificamos la razón veremos que $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, esto significa que Marcos tiene la mitad de edad que Uxía.

- ✓ Por otro lado, si sabemos que la edad de Ana es 24 años y su madre tiene 48, la razón entre sus edades es de $\frac{24}{48}$.

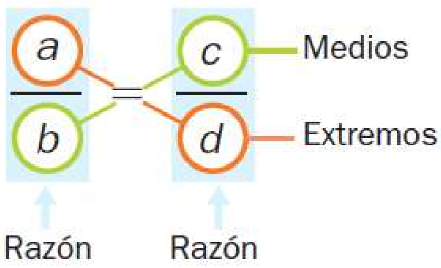
- ✓ Si simplificamos la fracción veremos que:

$$\frac{Edad\ de\ Ana}{Edad\ de\ su\ madre} = \frac{24}{48} = \frac{24\ :24}{48\ :24} = \frac{1}{2}$$

Esto significa que:

- Ana tiene la mitad de la edad de su madre.
- Su madre tiene el doble de edad que Ana.

Una proporción es la igualdad de dos razones. Las dos razones anteriores forman una proporción y diremos que “24 es a 48 lo que 1 es a 2”. En una proporción se cumple que el producto de medios es igual al producto de extremos.



$$\frac{24}{48} = \frac{1}{2} \qquad 24 \cdot 2 = 48 \cdot 1 = 48$$

Una razón es un cociente. Se expresa en forma de fracción, pero sus términos no forman parte de una misma magnitud, sino que son la RELACIÓN entre dos magnitudes. Los términos de la razón, a diferencia de los de una fracción, pueden ser números enteros o decimales.

Practicamos:

1. Elige la respuesta correcta en cada caso:

a) La razón de 5 y 15 es : $\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{3}$ $\qquad \frac{2}{3}$

b) La razón de 24 y 36 es: $\frac{2}{3}$ $\qquad \frac{3}{4}$ $\qquad \frac{2}{5}$

2. La razón de los pesos de Marcos y su padre es de 3/5. Si Marcos pesa 45 kilos, ¿cuánto pesa su padre?

3. La razón entre dos magnitudes es 36. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes.

4. Siete personas gastan 280 litros de agua diariamente. ¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos? Explica los resultados en el contexto del problema.

5. Escribe V (verdadero) junto a las parejas que forman proporción y F (falso) junto a las que no la forman. JUSTIFICA tus respuestas.

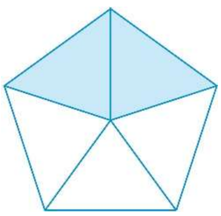
$\frac{2}{3} = \frac{4}{5}$ [....] $\frac{4}{18} = \frac{10}{45}$ [....] $\frac{6}{8} = \frac{10}{12}$ [....] $\frac{10}{15} = \frac{20}{30}$ [....] $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ [....]

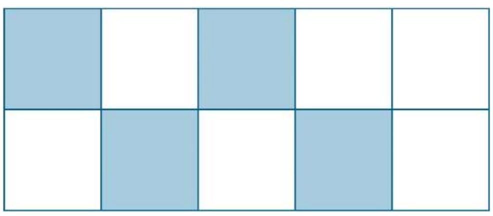
6. En una clase hay 32 alumnos, de los cuales 18 son chicos a) ¿Cuál es la razón entre el número de chicos y el total de alumnos de la clase? b) ¿cuál es la razón entre las chicas y los chicos de la clase?

7. Medio kilo de cerezas costó 1.90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.

8. La razón entre dos magnitudes es 36. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes.

9. Indica si las partes coloreadas en los dibujos forman razones proporcionales





Cálculo del término desconocido en una proporción:

Una proporción está formada por una pareja de fracciones equivalentes:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c \qquad\qquad \frac{14}{77}=\frac{2}{11} \rightarrow \underbrace{14 \cdot 11}_{154} = \underbrace{77 \cdot 2}_{154}$$

Esto nos permite calcular el término desconocido en una proporción:

$$\frac{6}{x}=\frac{15}{25} \rightarrow 6 \cdot 25 = x \cdot 15 \rightarrow 150 = x \cdot 15 \rightarrow x = \frac{150}{15} = 10$$

Practicamos:

1. Señala, **justificadamente**, el término que falta en las siguientes proporciones:

a) x es a 4 como 20 es a 2

b) $\frac{8}{5}=\frac{12}{x}$

c) 3 es a 4 como x es a 8

d) $\frac{8}{12}=\frac{x}{6}$

e) 9 es a x como x es a 4

f) $\frac{4}{x}=\frac{32}{16}$

g) $\frac{x}{15}=\frac{18}{5}$

h) $\frac{x}{25}=\frac{4}{5}$

i) $\frac{4}{8}=\frac{x}{16}$

j) $\frac{4}{x}=\frac{x}{100}$

2. Calcula, justificadamente, los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{18}{24}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{25}{100}=\frac{40}{x}$ c) $\frac{3,6}{21,6}=\frac{x}{3}$

Identificación de magnitudes directa e inversamente proporcionales:

Una **magnitud** es todo aquello que se puede medir. Por ejemplo, el peso de una persona, el número de albañiles trabajando en una obra, la distancia entre dos pueblos o la velocidad de un caballo al galopar.

A veces, dos magnitudes pueden estar relacionadas entre sí. Esta relación puede ser:

- ✓ Dos magnitudes son **DIRECTAMENTE PROPORCIONALES** cuando:
    - Al aumentar una (doble, triple...) la otra aumenta de igual manera (doble, triple...).
    - Al disminuir una (doble, triple...), la otra disminuye de igual manera (doble, triple...).

Por ejemplo, los Kg de naranjas que compro en el supermercado y los euros que pago por ellas.

- Si 1 kg cuesta 1´5 euros.
- Entonces 2 Kg cuestan el doble, 3 euros, puesto que es el doble de peso.

- ✓ Dos magnitudes son **INVERSAMENTE PROPORCIONALES** cuando:
  - Al aumentar una (doble, triple...) la otra disminuye de igual manera (mitad, tercio...).
  - Al disminuir una (mitad, tercio…), la otra aumenta de igual manera (doble, triple...).

Por ejemplo, la velocidad de un automóvil y el tiempo que tarda en realizar un determinado recorrido. Si un coche a 100 km/h tarda 30 min en realizar un recorrido, entonces a 50 km/h (la mitad de velocidad), tardará 60 min (el doble de tiempo).

Practicamos:

1. **Señala si existe proporcionalidad o no (y de qué tipo) en las siguientes situaciones:**
   - **a)** El peso de peras compradas en el supermercado y los euros pagados por ellas.
   - **b)** El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un depósito.
   - **c)** La edad de un niño y su altura.
   - **d)** El precio de la botella de naranjada y el número de botellas que podré comprar con 20 euros.
   - **e)** La velocidad de un automóvil y el tiempo que tarda en realizar un mismo recorrido.
   - **f)** La distancia recorrida por un automóvil y el tiempo empleado, manteniendo la misma velocidad.
   - **g)** La cantidad de dinero que lleva una persona al supermercado y cantidad de botellas de aceite que puede comprar.
   - **h)** El consumo de luz de la casa y el costo que paga mensualmente.
   - **i)** La cantidad de km recorridos por un taxista y el combustible que queda en el tanque.
   - **j)** Numero de hojas de un libro y su peso.
   - **k)** Cantidad de personas que viajan en un autobús y dinero recaudado.

l) Número de horas que está encendida una máquina de refrescos y dinero que recauda.

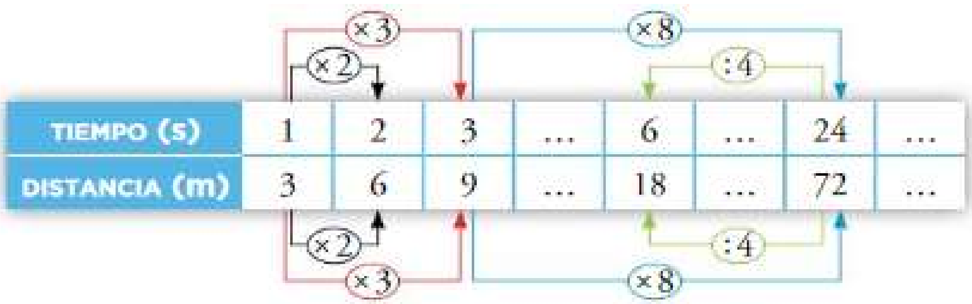
m) Número de litros que escapan por segundo en el desagüe de una piscina y diámetro del desagüe.

n) Número de comensales para zamparse una tarta y cantidad que corresponde a cada uno.

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES:

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número.

Veámoslo con un ejemplo representando las magnitudes en una **tabla de proporcionalidad**. Un corredor avanza a 3 m/s. La distancia recorrida según pasa el tiempo es:



TIEMPO (s)	1	2	3	…	6	…	24	…
DISTANCIA (m)	3	6	9	…	18	…	72	…

Observa que se puedes completar cualquier par de valores de la tabla a partir de un par conocido.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el cociente o razón entre estos dos valores es siempre constante. A esta cantidad se le llama **constante o razón de proporcionalidad directa (r).**

$$\frac{m_1}{m_2} = r \qquad\qquad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \cdots = \frac{24}{72}$$

¿Pero qué significa esta constante o razón de proporcionalidad? La podemos enfocar de dos maneras, pero en ambos casos nos da la misma información:

- *Razón de proporcionalidad entre el tiempo y la distancia:* $r = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$
- Razón de proporcionalidad entre la distancia y el tiempo: $r = \frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{1} = 3$

Aplicación a la resolución de problemas: REGLA DE TRES DIRECTA:

Es un método de cálculo que permite resolver con rapidez problemas en los que aparecen magnitudes directamente proporcionales. Comprobémoslo con un ejemplo: **"Sabiendo que una garrafa de 12 litros de leche cuesta 10´20 € vamos a calcular cuánto costará una garrafa de 15 litros".**

1) En primer lugar, comprobamos que las magnitudes son directamente proporcionales. Para ello identificamos las magnitudes y razonamos la relación que existe entre ellas.
   - "Sabiendo que una garrafa de **12 litros de leche** cuesta **10´20 €** vamos a calcular cuánto costará una garrafa de 15 litros".
   - Las magnitudes son la capacidad de las garrafas (medida en litros) y el precio (medido en euros). Son directamente proporcionales ya que cuantos más litros tenga la garrafa, su precio será mayor.

2) Llamamos "x" a la cantidad desconocida (el precio de los 15 L de leche).

3) Colocamos los datos (los de la misma magnitud uno debajo de otro).

LITROS (L)	**PRECIO (€)**
12L ----------------	10´20 €
15L ------------------	x €

4) Se "despeja" la "x". Para ello se multiplican los dos números contiguos a la "x" y se divide el resultado por el número que está en diagonal con la "x".

$$x = \frac{15 \cdot 10'20}{12} = 12'75 \text{ €} \quad costarán\ los\ 15L\ de\ leche$$

Ejercicio Resuelto:

Un corredor avanza a una velocidad de 3 m/s. ¿Qué espacio habrá recorrido al cabo de 2s? ¿Y de 3 s? ¿Y de 24s? ¿Cuánto tardará en recorrer 72 m? **Vamos a resolver el problema de varias formas:**

1) **Usando una tabla de proporcionalidad.**
2) **Planteando "razones de proporcionalidad" y calculando la "constante de proporcionalidad".**
3) **Mediante una "regla de tres directa".**

1) **<u>Usando una tabla de proporcionalidad</u>:** Si el corredor avanza a 3 m/s. La distancia recorrida según pasa el tiempo es:

TIEMPO (s)	1	2	3	…	6	…	24	…
DISTANCIA (m)	3	6	9	…	18	…	72	…

Podemos "completar" la tabla a nuestro antojo para calcular todos los cálculos pedidos. Es una forma sencilla para hacer cálculos mentales.

2) Planteando "proporciones numéricas":

Tiempo (s)	1	2	3	z
Distanc. (m)	3	x	y	72

Planteamos la igualdad de razones.

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{x} = \frac{3}{y} = \frac{z}{72}$$

Ahora podemos plantear la igualdad entre cualquier par de razones y "despejar" la incógnita que deseemos:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6m$$

$$\frac{1}{3} = \frac{z}{72} \rightarrow z = \frac{1 \cdot 72}{3} = 24s$$

- La constante de proporcionalidad es: $k = \frac{24\,s}{72\,m} = \frac{2\,s}{6\,m} = \frac{1\,s}{3\,m} = \frac{1}{3}$
- Indica que en 1s recorre 3m.
- Si efectúo la división: 1 : 3 ≈ 0´333 s/m (significa que emplea 0´333 s en recorrer 1 m).

3) Mediante "una regla de tres directa":

Tiempo (s) **Distanc. (m)**

1s ---------------- 3 m

2s ------------------ x m $\frac{1}{3} = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6\,m$

Tiempo (s) **Distanc. (m)**

1s ----------------- 3 m

z s ------------------ *72 m* $\frac{1}{3} = \frac{z}{72} \rightarrow z = \frac{1 \cdot 72}{3} = 24\ s$

PRACTICAMOS: PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA:

1. Completa las siguientes tablas de proporcionalidad directa y calcula la constante de proporcionalidad (r). Justifica todas las operaciones.

Magnitud A	1	x	4	z
Magnitud B	15	30	y	225

Magnitud A	10	a	b	c
Magnitud B	15	30	45	60

Magnitud A	p	20	30	r
Magnitud B	1200	600	q	300

2. Rellena los huecos que faltan y determina la constante de proporcionalidad:

$$\frac{[\dots]}{9} = \frac{3}{4} = \frac{1{,}5}{[\dots]} = \frac{[\dots]}{3} = [\dots]$$

3. Un obrero gana 350 € a la semana.

a) ¿Cuánto gana en 45 días?

b) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre ambas magnitudes?

c) ¿Qué significado tiene dicha razón en el contexto del problema?

4. Sabemos que en 50 litros de agua de mar hay 1.300 g. de sal.

a) ¿Cuántos litros hacen falta para obtener 5.200 g. de sal?

b) Señala la razón de proporcionalidad (r) entre los gramos de sal y los litros de agua.

c) ¿Qué significado tiene dicha razón en el contexto del problema?

5. Un coche gasta 5 L de gasolina cada 100 Km. ¿Cuánto recorrerá con 28 L?

6. Si 1 kg de jamón cuesta 7,25 €, ¿cuántos gramos de jamón puedo comprar con 5 €? ¿Cuánto nos costarán 3500 g de jamón?

7. En una protectora de animales, para alimentar a 30 perros se necesitan 45 kg de comida. Si llegan 12 perros más, ¿Cuánta comida necesitarán?

8. Con 200 g de harina elaboramos 6 barras de pan.

a) ¿Cuántas barras elaboraremos con 5 Kg?

b) ¿Cuánta harina necesitamos para hacer 60 barras?

c) Señala la razón de proporcionalidad entre el número de barras de pan y los gramos de harina. ¿Qué significado tiene dicha razón en el contexto del problema?

d) ¿Cuál es la razón entre los gramos de harina y el número de barras?

9. Una persona comprueba que una distancia de 120 km equivale a 75 millas inglesas.

a) ¿Cuál será la distancia en millas entre dos ciudades que distan entre sí 320 km?

b) Si la distancia entre dos pueblos es de 34 millas, ¿a cuántos kilómetros equivaldrá?

10. Una máquina fabrica 400 tornillos en 5 h.

a) ¿Cuánto tardará en fabricar 1.000 tornillos?

b) Calcula la constante de proporcionalidad entre número de tornillos fabricados y el tiempo que tardan en fabricarse, ¿qué significado tiene en el contexto del problema?

11. Una rueda da 4.590 vueltas en 9 min. ¿Cuántas vueltas dará en 2h y media?

12. Un deportista recorre 4.500 m en 10 minutos. ¿Cuántos Km recorrerá en media hora? ¿Y en dos horas y media?

13. Un camión circula a 90 km/h.

a) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 250 km?

b) ¿Qué distancia recorrerá en 15 min?

14. Rafael utiliza mucho un parking. En la última semana pagó 9 euros por 15 horas. ¿Cuánto pagará el próximo mes si ha previsto que necesitará aparcar su coche durante 62 horas?

15. El precio de "*bajada de bandera"* diurna de un taxi es de 3´90 €. Por la noche, el precio asciende a 4´50€. ¿Cuánto pagaremos por hacer una misma carrera de 3´5Km de día y de noche si sabemos que la distancia recorrida se paga a 0´9€/Km?

16. Dada la siguiente tabla de proporcionalidad:

a) ¿Existe proporcionalidad entre las magnitudes A y B? Justifícalo.

b) En tal caso, ¿cuál es la constante proporcionalidad entre A y B? ¿Y de la magnitud B respecto a la A?

c) Completa la tabla indicando las operaciones.

Magnitud A	7	9	11	**y**	**z**
Magnitud B	21	27	**x**	39	135

17. El telesilla de una gran pista de esquí circula a 4 metros por segundo. Rellena la tabla de recorridos.

Tiempo (s)	5	15	50				600
Distancia (m)				500	800	2.000	

18. **FIJATE EN EL SIGUIENTE EJERCICIO:** Sabemos que en un plano una distancia de 2 cm equivale a 40 km en la realidad. Calcula la distancia real entre dos ciudades que en el plano se encuentran a una distancia de 8 cm. Si la distancia real es de 1500 km, ¿a qué distancia se encontrarían en el plano?

LAS ESCALAS:

La escala es la **relación matemática** que existe entre las dimensiones reales de un objeto y las del dibujo (plano, maqueta, etc) que representa dicha realidad.

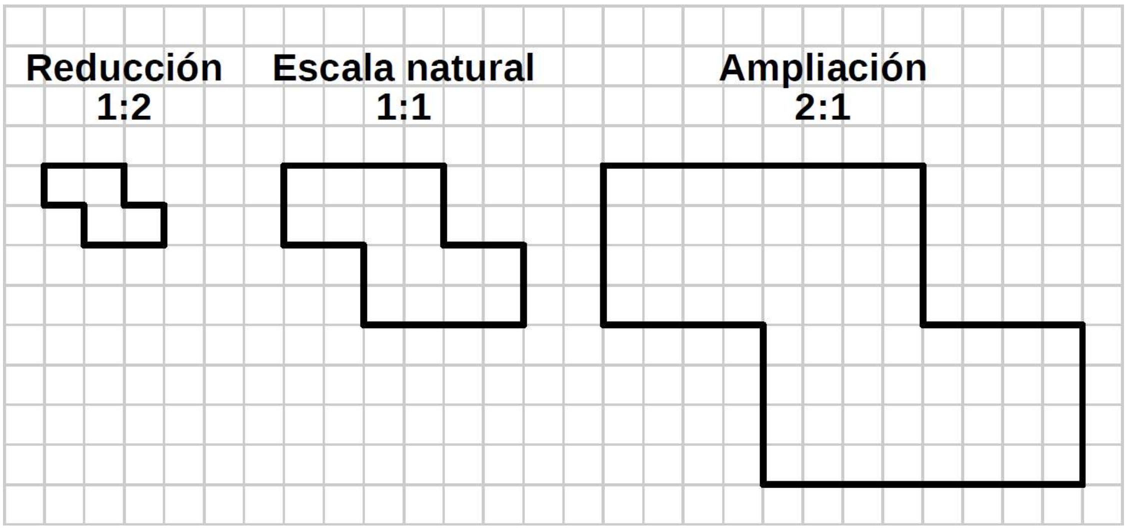
Las escalas se escriben en forma de **razón** donde el antecedente indica el valor del plano y el consecuente el valor de la realidad.

$$\boldsymbol{E = \frac{distancia\,plano}{distancia\,real} = \frac{1}{500}}$$

Por ejemplo, **una escala 1:500 significa que:**

- ✓ **1 unidad del plano → 500 unidades en la realidad**
- ✓ **1 cm del plano → 500 cm en la realidad**
- ✓ **1 m del plano → 500 m en la realidad**

Como esta relación es de **PROPORCIONALIDAD DIRECTA** podemos resolver cualquier ejercicio de Escalas mediante reglas de 3 directas, tablas de proporcionalidad directa, etc.



EJERCICIO RESUELTO 1:

La Torre de Hércules tiene una altura total de 55 m. Si queremos realizar una maqueta a escala 1:110 ¿Qué altura tendrá dicha maqueta?

Distancia Maqueta		Distancia Real
1 m	-------------------------	110 m
x	-------------------------	55 m

$$x = \frac{55 \cdot 1}{110} = 0'5\,m = 50\,cm \text{ (tendrá una altura de 50 cm)}$$

EJERCICIO RESUELTO 2:

En un plano de carreteras realizado a escala 1:50.000, la distancia entre dos ciudades, medida con una regla graduada es de 45mm. ¿Cuál será la distancia real expresada en kilómetros?

Distancia Plano		Distancia Real
1 mm	-------------	50.000 mm
45 mm	--------------	x

$$x = \frac{50000 \cdot 45}{1} = 2.250.000mm = 2'25km \text{ (habrá entre ambas ciudades)}$$

EJERCICIO RESUELTO 3:

Sabemos que la distancia real entre dos ciudades es de 2km. Si en un plano se encuentran a una distancia de 2´5cm medida con una regla graduada ¿A qué escala está el mapa?

Distancia Plano		**Distancia Real**
2´5 cm	-------------	2km = 200. 000cm
1 cm	--------------	x

x = $\frac{200.000 \cdot 1}{2´5} = 80.000cm$ (el plano tiene una escala de E: 1/80.000)

Practicamos: Problemas con Escalas:

1. Si sabemos que en un plano de una casa 0´75 cm equivale a 1 m en la realidad ¿cuánto medirá de ancho una pared que en el plano mide 3´5 cm? ¿A qué escala está el plano?

2. ¿A cuántos kilómetros corresponden 15 cm en un mapa a escala 1:50.000?

3. ¿Qué distancia real medida en km hay entre dos ciudades que están separadas 40 cm en un mapa a escala 1 : 500.000? ¿Y en otro de escala 1 : 25.000?

4. Si en un mapa a escala 1: 50.000 dos puntos están separados por 20 cm, ¿cuántos cm los separarán en un mapa a escala 1:100.000?

5. Si cada 2 cm en el mapa son 5 km. en la realidad ¿cuál es la escala del mapa?

6. En un plano se observa que 28cm representan 476 km en la realidad. ¿Cuánto medirá en dicho plano una carretera de longitud 306km? ¿A qué escala está el plano

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES:

En las magnitudes inversamente proporcionales si se aumenta el valor de una de ellas al doble, al triple, etc., el correspondiente valor de la otra disminuye a la mitad, a la tercera parte, etc.

Veámoslo con un ejemplo: Dos trabajadores descargan un camión en 6 horas. Podemos completar cualquier par de valores de la tabla a partir de un par conocido.

N.º DE TRABAJADORES	1	2	3	4	6	12
TIEMPO DE DESCARGA (h)	12	6	4	3	2	1

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el producto entre estos dos valores es siempre constante. Esta cantidad "r" es la **constante de proporcionalidad inversa.**

$$\mathbf{m_1 \cdot m_2} = r$$

Aplicación a la resolución de problemas: REGLA DE TRES INVERSA:

Es un mecanismo de cálculo que permite resolver con rapidez problemas en los que aparecen magnitudes inversamente proporcionales. Comprobémoslo con un ejemplo: *"Un ciclista, a 20 km/h, tarda 30 minutos en ir de un pueblo a la aldea vecina. ¿Cuánto tardará un motorista, a 50 km/h?"*

VELOCIDAD		TIEMPO (min)
20	⟶	30
50	⟶	x

En las magnitudes inversamente proporcionales se cumple que se mantiene constante el producto de las magnitudes, no el cociente, por tanto:

$$50 \cdot x = 20 \cdot 30 \rightarrow x = \frac{20 \cdot 30}{50} = 12\, min$$

Otra opción es plantear razones de proporcionalidad:

$$\frac{20}{30} = \frac{30}{x}$$

En este caso, y como la relación es de **proporcionalidad inversa** una de las razones debemos invertirla.

$$\frac{20}{50} = \frac{30}{x} \rightarrow \frac{20}{50} = \frac{x}{30} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 30}{50} = 12\, min$$

Practicamos: Problemas de proporcionalidad inversa:

1. Cinco obreros hacen una pared en 15 días. ¿Cuánto tardarán 3 obreros en hacer la misma pared?

2. Un granjero tiene pienso para alimentar a sus 12 vacas durante 45 días. a) Si compra 3 vacas más y, teniendo en cuenta que cada vaca debe comer siempre la misma cantidad de pienso, ¿cuánto tiempo le durará el pienso? b) Si quiere alimentar a sus vacas durante 90 días, ¿cuántos animales podrá tener sin disminuir la cantidad de pienso que consume cada vaca? c) Calcula la constante de proporcionalidad inversa.

3. Cuatro albañiles tardan en arreglarme el tejado 18 días. Si quiero acabar el tejado en 12 días, ¿Cuántos albañiles tengo que contratar?

4. Con un depósito de agua pueden beber 30 caballos durante 8 días. Si se venden 6 caballos, ¿cuántos días durará el agua?

5. Tres Amigos ponen 7,50 € cada uno para hacer un regalo. Si dos amigos más quieren participar en el regalo, ¿cuánto debe poner cada uno?

6. Supongamos que 3 pintores tardan 20 días en pintar un mural. ¿Cuánto tardarían en pintar el mismo mural si fuesen el doble de pintores? ¿Y si fuesen 5 pintores?

7. Para envasar cierta cantidad de aceite se necesitan 8 barriles de 20L cada uno, ¿cuántos barriles necesitaremos si los que tenemos son de 5L de capacidad?

8. Una piscina ha tardado en llenarse 6h utilizando cuatro grifos iguales. ¿Cuántos grifos, iguales a los anteriores, serían necesarios para llenarla en 3h?

9. Completa la siguiente tabla de proporcionalidad inversa y calcula la constante de proporcionalidad. Justifica los resultados.

Magnitud A	2	8	16	**c**	**d**
Magnitud B	8	**a**	**b**	0´5	0´05

REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES:

Son una aplicación de la **proporcionalidad directa de magnitudes**. Haremos un reparto directamente proporcional en situaciones como las siguientes:

- Si al realizar un trabajo entre dos personas una de ellas trabaja más horas que la otra, es lógico que pensar que debe cobrar más. El que haga el doble de horas, cobrará el doble.

- Si dos personas compran un décimo de lotería, pero no lo pagan a partes iguales, es lógico que el premio tampoco lo repartan a partes iguales y que se lleve más dinero el que proporcionalmente aporto más dinero.

Ejercicio Resuelto:

"Un abuelo reparte 450 € entre sus nietos de 8, 12 y 16 años de edad de manera DIRECTAMENTE PROPORCIONAL a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?"

Método 1: Usando fracciones: Recibirá más dinero el nieto mayor puesto que es un reparto directamente proporcional a sus edades.

La suma total de las edades es 16 + 12 + 8 = 36 años, por tanto:

Nieto Mayor (16 años): Le corresponden $\frac{16}{36}\ de\ 450 = \frac{16 \bullet 450}{36} = 200€$

Nieto Mediano (12 años): $\frac{12}{36}\ de\ 450 = \frac{12 \bullet 450}{36} = 150€$

Nieto Menor (8 años): $\frac{8}{36}\ de\ 450 = \frac{8 \bullet 450}{36} = 100€$

Método 2: Mediante razones de proporcionalidad: Supongamos que cada nieto debe percibir x, y, z euros. Podemos organizar los datos en una tabla:

	Edad	**Lo que recibe**
Menor	8 años	x
Mediano	12 años	y
Mayor	16 años	z
Total	**36 años**	**x + y + z = 450€**

El total de dinero a repartir (450€) es el que le corresponde al total de años (16 + 12 + 8 = 36 años) y, por tanto, la razón de proporcionalidad es:

$$k = \frac{450}{36}$$

Lo que recibe cada nieto debe ser proporcional a dicha razón, es decir:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16} = \frac{450}{36}$$

Por tanto cada nieto recibirá:

$$\frac{x}{8} = \frac{450}{36} \qquad x = \frac{450 \cdot 8}{36} = 100€$$

$$\frac{y}{12} = \frac{450}{36} \qquad y = \frac{450 \cdot 12}{36} = 150€$$

$$\frac{z}{16} = \frac{450}{36} \qquad z = \frac{450 \cdot 16}{36} = 200€$$

Calculando la constante de proporcionalidad (k), y razonando su significado en el contexto del problema, resulta aún más sencillo:

$k = \frac{450}{36}$ = 12´5 €/ año, es decir, por cada año le corresponde 12´5 €:

- ✓ Al nieto mayor (16 años) le corresponden 16 • 12´5 = 200€.
- ✓ Al nieto mediano (12 años) le corresponden 12 • 12´5 = 150€.
- ✓ Al nieto menor (8 años) le corresponden 8 • 12´5 = 100€.

Ejercicio Resuelto:

"Entre dos pintores pintan una casa en siete días. Los tres primeros días trabajan los dos juntos, pero los otros cuatro días sólo trabaja uno de ellos. Si cobran 2250 €, vamos a calcular cómo las tienen que repartir".

El primer pintor ha trabajado solo los 3 primeros días, mientras que el segundo un total de 7 días. Esto suma un total de 3 + 7 = 10 días, cobrando por ello un total de 2250 €.

	Días trabajados	**Lo que gana**
Pintor 1	3 días	x
Pintor 2	7 días	y
Total	**10 días**	**x + y = 2.250€**

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{7} = \frac{2250}{10}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{2250}{10} \longrightarrow x = \frac{3 \bullet 2250}{10} = 675 \text{ €.}$$

Por tanto, un pintor cobrará 675 € y el otro el resto, 2250 – 675 € = 1.575 €.

Calculando la constante de proporcionalidad (k), y razonando su significado en el contexto del problema, resulta aún más sencillo:

k = $\frac{2250}{10}$ = 225 €/ día, es decir, por cada día le corresponde 225 €:

A un pintor le corresponden 3 • 225 = 675€.

Al otro le corresponde 7 • 225 = 1.575€.

Practicamos: Ejercicios de repartos directamente proporcionales.

1. Entre tres amigos compran un décimo para el sorteo de Navidad. Pedro paga 5 €, Teresa 10 € y Ana 5 €. Si cobran un premio de 1800 €, ¿cómo se lo tendrán que repartir?

2. Entre cuatro amigos compran una plaza de garaje. Alberto aporta 3200 €, Beatriz 8000 €, Carlos 10.000 € y David 5.300 €. Al cabo de un año la venden por 31.800 €. ¿Cómo tendrán que repartir el dinero? Justifícalo. ¿Qué beneficio obtiene cada uno?

3. Los cursos 1º, 2º y 3º de ESO de un colegio recaudan 610€ para hacer un viaje. Deciden repartir el dinero en partes directamente proporcionales al número de alumnos. ¿Cuánto le corresponde a cada curso si 1º tiene 50 alumnos, 2º tiene 48 y 3º tiene 24? Calcula la constante de proporcionalidad y explica su significado en el contexto del problema.

4. Dos socios invierten en un negocio las cantidades de tres y cinco mil euros. Si deciden repartir los 24.600 euros de beneficio en forma directamente proporcional a lo que invirtieron, ¿cuánto ha de corresponder a cada uno?

5. Los cinco propietarios de casas que residen en una plaza deciden arreglarla de manera que el gasto de cada uno sea proporcional a los metros de fachada que ocupa su casa. Dos de ellos tienen una fachada de 12 m, otros dos de 17 m y el último de 24 m. ¿Cuánto han de pagar respectivamente si el coste total de la obra es de 35.000 €?

6. En una campaña de recogida de pilas para reciclar, Yolanda recoge 7 pilas, Miriam 11 y Juan 12. Si como premio ganan 60 bolígrafos, ¿cómo se los deberían repartir? Calcula la constante de proporcionalidad y explica su significado en el contexto del problema.

7. Una señora reparte entre sus nietos, en partes directamente proporcionales a sus edades (9, 15 y 21 años), sus tierras. Si al menor le tocan 16 Ha, ¿cuál es el número total de hectáreas que ha repartido entre sus nietos? ¿Cuántas les corresponden a los otros dos nietos?

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES:

Una manera sencilla de hacer un reparto inversamente proporcional es haciendo un reparto directamente proporcional a la inversa de las cantidades.

"Una madre decide repartir entre sus tres hijos una paga extra de 70€ como premio por las buenas notas obtenidas. Les dice que cada uno recibirá una cantidad inversamente proporcional al número de días que olvidó hacer su cama. ¿Cuánto le tocará a cada uno?"

Martín → 1 día *Laura → 2 días* *Óscar → 4 días*

Por tanto, al que **menos veces** dejo sin hacer la cama le debe corresponder **más dinero.** Son **magnitudes inversamente proporcionales** y corresponde hacer un reparto inversamente proporcional. Debemos repartir 70€ en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 4.

Resolveremos el problema repartiendo 70 en partes directamente proporcionales a los inversos de esos números: 1, ½ y ¼:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{x+y+z}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{70}{\frac{7}{4}} = \frac{70 \cdot 4}{7} = 40$$

Por tanto, k = 40 es la constante de proporcionalidad y cada un@ recibirá:

Martín $\rightarrow$ $40 \cdot 1 = 40$ euros

Laura $\rightarrow$ $40 \cdot 1/2 = 20$ euros

Óscar $\rightarrow$ $40 \cdot 1/4 = 10$ euros

PROP. INVERSA

OLVIDOS		PREMIO
1	$\rightarrow$	40
2	$\rightarrow$	20
4	$\rightarrow$	10

×2 ×4 :2 :4

Observa que se cumple que el que tiene el doble de olvidos gana la mitad de dinero y así sucesivamente.

Ejercicios de repartos inversamente proporcionales:

1. Se desea repartir una bolsa de 92 caramelos entre 3 hermanos de manera inversamente proporcional a sus edades, que son de 8, 9 y 12 años respectivamente. ¿A cuánto toca cada uno?

2. Se va a repartir un premio de 130.000€ entre los tres porteros de los equipos de una ciudad de manera inversamente proporcional a los goles recibidos. Si éstos fueron 36, 43 y 70 goles respectivamente, ¿cuánto corresponde a cada uno?

3. Un padre quiere repartir 25.000 euros entre sus tres hijos que tienen 5, 10 y 25 años respectivamente. ¿Cuánto le corresponderá a cada hijo si el reparto de hace de forma inversamente proporcional a las edades?

4. Se desean repartir 800.000€ entre tres ciclistas de un equipo que participa en una contrarreloj en función de los tiempos realizados: 24’ el primero, 36´ el segundo y 54´ el tercero, ¿cuánto corresponderá a cada uno?

5. Tres personas participan en un concurso que consiste en vaciar un depósito en el menor tiempo posible. El premio de 2280€ se reparte de forma proporcional al tiempo que inviertan y que, sabemos, ha sido de 30, 90 y 25 segundos respectivamente. ¿Cómo debe hacerse el reparto? ¿Cuánto recibe cada uno?

6. ¿Cómo repartirías un bote de 136 € de propinas de un mes de trabajo entre dos camareros, Paco y Lucía, sabiendo que han faltado 3 y 5 días respectivamente?

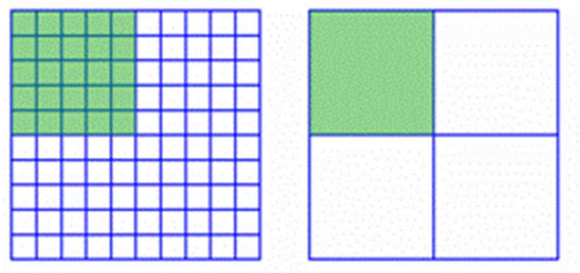
7. Tres amigos se reparten una pizza de forma inversamente proporcional a sus pesos que son respectivamente 60, 72 y 90 Kg. ¿Qué parte de pizza se debe comer cada uno?

8. ¿Cómo repartirías 11.000€ entre tres hermanos de forma inversamente proporcional a sus edades de 6, 12 y 18 años?

PORCENTAJES:

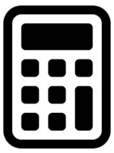
Otra de las aplicaciones de la **proporcionalidad directa** son los porcentajes. En tu vida diaria oyes continuamente hablar de ellos: la subida salarial será de un 2%, las rebajas son de un 20%... Si te dicen que la subida salarial es un 2% significa que por cada 100 € que cobres tu sueldo aumentará 2 €.

¿Cómo calculo un porcentaje (%) de un número? Veamos como haríamos para calcular el 25% de 120. Para ello debemos entender que 25% significa 25 de cada 100 o, lo que es lo mismo, $\frac{25}{100}$ y, por tanto:

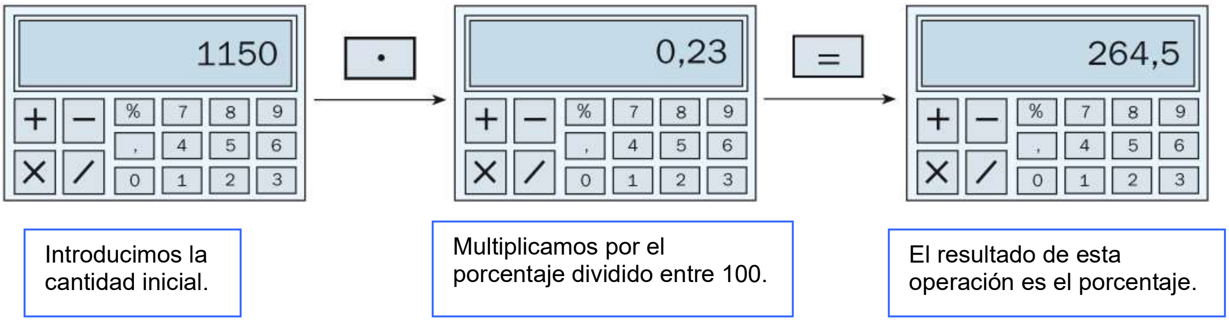


25% de 120 = $\frac{25}{100}$ de 120 = $\frac{25}{100} \cdot 100 = 0{\prime}25 \cdot 120 = 30$.

Podemos hacer el mismo razonamiento simplificando $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ y, por tanto, calcular el 25% de 120 es lo mismo que calcular un ¼ de 120.



Porcentajes con la calculadora: Calculamos el 23% de 1150.



También podemos resolver cualquier problema de porcentajes aplicando **REGLAS DE TRES DIRECTAS** y, en este caso, hemos de tener MUCHO cuidado en dónde colocamos cada magnitud en dicha regla de tres.

"Nos hemos apuntado a un cursillo de Inglés de la Universidad de Cardiff que se desarrolla durante 120 h. Si sabemos que podemos faltar a un máximo de 25% de las horas para que nos den el título, ¿a cuántas horas podremos faltar como máximo?".

Puesto que 120 h son el TOTAL del curso, suponen el 100% de las horas. Veamos cómo lo plantearíamos:

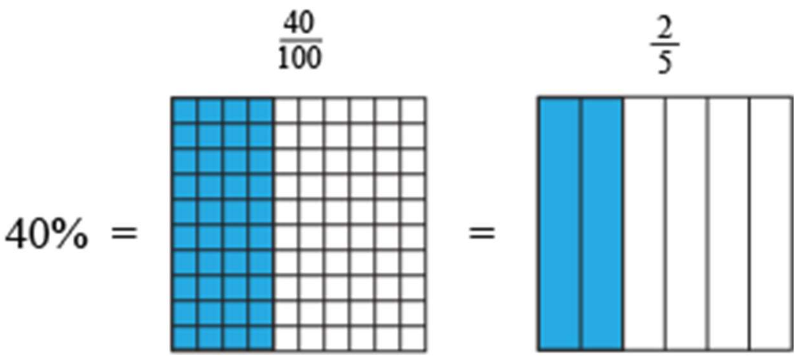
HORAS -------------- %

120 h -------------- 100%

x ----------------- 25% $x = \frac{25 \cdot 120}{100}$ = 30 h (a las que puedo faltar)

<u>Los porcentajes como fracciones:</u>

Podemos trabajar los problemas de porcentajes considerando la fracción que representan. Cuando hablamos de que el 40% de una población usa gafas, nos referimos a que 40 de cada 100, es decir $\frac{40}{100}$, de esa población usa gafas. Si simplificamos dicha fracción, podemos decir que $\frac{2}{5}$ de la población usa gafas.



Y, por tanto, si la población es de 2500 habitantes y queremos saber cuántos usan gafas podemos calcular $\frac{2}{5}$ de 2500, que serán:

$$\frac{2}{5} \cdot 2500 = \frac{2 \cdot 2500}{5} = \frac{5000}{5} = 1000 \textit{ habitantes usan gafas.}$$

Si lo hacemos mediante una regla de tres obtendremos el mismo resultado:

Nº de habitantes ------- % Que usan gafas

100 habitantes ------------------- 40

2500 habitantes ------------------ X $\quad x = \frac{2500 \cdot 40}{100} =$ *1000 habitantes.*

CALCULO RÁPIDO CON PORCENTAJES (ÍNDICES DE VARIACIÓN):

Los **aumentos y disminuciones porcentuales** son dos tipos de problemas que encontrarás con frecuencia en el mundo real. Los entenderemos muy fácilmente con ejemplos:

AUMENTO O SUBIDA PORCENTUAL:

Un reloj de 50 € aumenta su precio un 16%. ¿Cuánto vale ahora? Con lo que sabemos hasta ahora, podríamos resolverlo así:

- Aumento: $\frac{16}{100}$ • 50 = 0,16 • 50 = 8 €
- Precio final: 50 + 8 = 58 €

Usando un INDICE DE VARIACIÓN: Si sube un 16%, el precio será el 100% (precio inicial) + 16% (aumento) = 116% del precio inicial.

Precio Inicial (100%) + Subida (16%) = Precio Final (116%)

$\frac{116}{100} \bullet 50 = \mathbf{1´16} \bullet 50 = 58$ €.

El Índice de Variación (IV) es: 1 + 0´16 = 1´16.

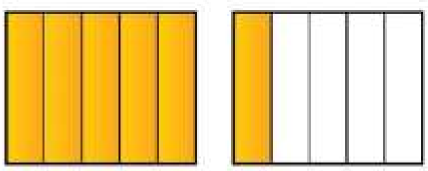
Por tanto:

- **Para hacer un aumento porcentual del 20% debemos multiplicar la cantidad inicial por 1´2.**
- **Para un aumento del 30% multiplicaremos por 1´3.**
- **(…)**

Observa el significado del porcentaje 120%:

120% = 100% + 20%.

$$\frac{120}{100} = \frac{100}{100} + \frac{20}{100} = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{5}$$



100% + 20% = 120%

DISMINUCIÓN O BAJADA PORCENTUAL:

Una nevera valía 620 €. Se rebaja un 40%. ¿Cuánto vale ahora? Con lo que sabemos hasta ahora, podríamos resolverlo así:

- Disminución: $\frac{40}{100} \bullet 620 = 0{,}4 \bullet 620 = 248$ €
- Precio final: **620 - 248 = 372 €**

Usando un INDICE DE VARIACIÓN: Si al precio inicial (100%) le quitamos un 40%, queda el 60% del precio inicial.

Precio Inicial (100%) – Rebaja (40%) = Precio Final (60%)

$\frac{60}{100} \bullet 620 =$ **0´60 • 620 = 372 €**

El Índice de Variación (IV) es: 1 – 0´4 = 0´6.

Por tanto:

- **Para hacer una disminución porcentual del 20% debemos multiplicar la cantidad inicial por 0´8.**
- **Para una disminución del 30% multiplicaremos por 0´7.**
- **Para una disminución del 45% multiplicaremos por 0´55.**
- **(…)**

Practicamos:

1. Unos pantalones cuestan 50€. Utiliza **ÍNDICES DE VARIACIÓN** para calcular las siguientes variaciones en su precio:
   - **a)** Una disminución del 30%:
   - **b)** Una disminución del 25%:
   - **c)** Una disminución del 13%:
   - **d)** Un aumento del 30%:
   - **e)** Un aumento del 25%:
   - **f)** Un aumento del 13%:

2. En un colegio hay 575 alumnos matriculados de los que el 8% son pelirroj@s. ¿Cuántos pelirroj@s hay?

3. En una clase de 2º ESO hay 15 alumn@s. Si sabemos que 11 son chicas, ¿qué porcentaje de chicas y de chicos hay?

4. Unas zapatillas que costaban 120€ tienen una rebaja del 25%. ¿Cuánto cuestan ahora?

5. Isabel ha comprado un CD que costaba 18 euros, pero le han hecho una rebaja del 15 %. ¿Cuánto ha pagado?

6. Roberto ha pagado 35´2 euros por unos pantalones que estaban rebajados un 12%. ¿Cuánto costaban los pantalones sin rebajar?

7. Unos zapatos costaban 56€. En rebajas hacen un 20% de descuento. ¿Cuánto ahorraré?

8. En un incendio se han quemado el 22% de los 95000 árboles de un monte ¿Cuántos arboles sobreviven al incendio?

9. De los 85 estudiantes de un curso de 1º ESO, 51 son chicas. Calcula el % de chicos y chicas.

10. Lucía ha pagado 30,6 euros por una camisa que costaba 36 euros. ¿Qué tanto por ciento le han rebajado?

11. Por un libro he pagado 8€ después de hacerme un 10% de descuento. Calcular el valor del libro sin el descuento.

12. Juan trabaja a comisión y recibe el 8 % de lo que vende. Este mes necesita conseguir 2.500 euros. ¿Cuánto debe vender?

13. Por un vestido que valía 120 € he pagado 96 €. ¿Qué % de descuento me han hecho?

14. Por un libro que valía 15 € he pagado 17,4 € incluido el IVA. Calcular el tanto por ciento de IVA aplicado.

15. El precio sin I.V.A. de un determinado medicamento es de 15 euros. Sabiendo que el I.V.A. es el *súper-reducido* del 4%, ¿cuánto costará con I.V.A.?

16. En un restaurante, el precio del menú es 12 € más un 10 % de IVA. ¿Cuánto pagaré por un menú?

17. Un cliente ha comprado una lavadora por 375 euros. Estaba de oferta con un 20% de descuento. ¿Cuál era el precio sin rebaja?

18. En una oferta de un comercio de electrodomésticos nos descuentan el 15% de un frigorífico cuyo precio es de 475 €. En un segundo comercio, el mismo frigorífico está marcado en 545 € y nos descuentan la cuarta parte. ¿Dónde conviene comprarlo?

19. De 5 toneladas de carbón de una mina se eliminan 2.400 kg de impurezas. ¿Qué tanto por ciento es carbón puro?

20. ¿Cuánto tendrá que pagar el dueño de un restaurante por la compra de 492 vasos a 3'25 € la docena, si pagando al contado le hacen un 8% de rebaja?

21. Un artículo que valía 120€, subió su precio en enero un 20%. Posteriormente, en febrero, bajó su demanda, y su precio bajó un 20%. ¿Sigue valiendo lo mismo? ¿Cuánto vale?

22. El precio de un traje es de 360 euros. En las rebajas se le ha aplicado un primer descuento del 30% y después se ha vuelto a rebajar un 20%. ¿Cuál es el precio final?

23. El precio de un coche es de 11.400 euros. Al comprarlo me han hecho un descuento del 22 %, pero después había que pagar un 17% de impuestos de matriculación. ¿Cuál es el precio final?

24. El precio de una Tablet a principios de año era de 520 €. A lo largo del año, primero subió un 10%, después otro 25% y, finalmente bajó un 30% su precio.

- **a)** ¿Cuál es el precio final?
- **b)** ¿Cuál es el índice de variación total?
- **c)** ¿Qué porcentaje TOTAL subió o bajó dicho precio?

25. En el contrato de trabajo de un empleado se establece una subida anual del 7´2%. Si empieza ganando 900 € al mes, ¿cuánto ganará al cabo de 5 años?

26. Si con receta médica solo pagamos el 40% del precio total. ¿Cuánto nos costaría este medicamento si lo comprásemos con receta?

27. La etiqueta de "valor nutricional" de un bollo de cacao se indica a continuación. Si hemos desayunado 2 porciones y media.

- **a)** Indica cuántos gramos de cada uno de los componentes hemos ingerido.
- **b)** ¿Qué porcentaje del valor diario de una dieta sana hemos ingerido?
- **c)** ¿Cuántas calorías hemos ingerido?

Información nutricional

Tamaño de la porción **113 g**
Porciones por envase 8

Cantidad por porción

Calorías 100

Grasa total	2g
Grasas saturadas	1.5g
Grasas *trans*	0g
Colesterol	10mg
Sodio	460mg
Total de carbohidratos	4g
Fibra	0g
Azúcares	4g
Proteína	16g

*Dieta Sana: 2000 calorías

28. Un televisor que cuesta 325 € está rebajado un 25%. Al ir a pagar en caja, nos añaden, además, el 21% de IVA.

a) ¿Cuál es el precio final?

b) ¿Cuál es el Indice de Variación total del precio?

29. En el salón de casa tenemos un televisor de 32 pulgadas y mis padres han decidido que se nos queda pequeño y que vamos a comprarnos uno nuevo de 55 pulgadas en las rebajas. Realiza los siguientes cálculos:

a) Sabiendo que el televisor tenía un precio de 420€ y que me han hecho una rebaja del 30% y que tenemos que añadirle un IVA del 21%, ¿cuánto pagaremos por el televisor?

b) Sabiendo que 1 pulgada equivale a 2´54 cm, calcula cuántos cm hemos aumentado el tamaño de nuestra nueva tele.

Tanto por ciento, tanto por uno, tanto por mil:

Tanto por ciento	Significado	Razón	Tanto por uno	Tanto por mil
12 %	12 de cada 100	$\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$	12 : 100 = 0,12	120 ‰
70 %	70 de cada 100	$\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$	70 : 100 = 0,70	700 ‰
60 %	60 de cada 100	$\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$	60 : 100 = 0,60	600 ‰
25 %	25 de cada 100	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	25 : 100 = 0,25	250 ‰

PORCENTAJES ENCADENADOS:

Cuando se aplica un aumento o disminución porcentual varias veces sobre una cantidad inicial, podemos calcular el resultado aplicando sucesivamente cada aumento o disminución porcentual o bien realizando el cálculo "de una vez" aplicando los índices de variación que hemos visto. Hablamos en este caso de cálculo usando porcentajes encadenados.

Ejercicio Resuelto:

Un ordenador que costaba inicialmente 650€ aumentó su precio durante el año pasado un 10%. Puesto que lo compramos en rebajas nos hicieron un descuento del 20%. ¿Qué precio hemos pagado por el ordenador?

Haciendo la regla de tres: $\left.\begin{array}{ll} 100\,\% & \rightarrow 650\,€ \\ 110\,\% & \rightarrow x \end{array}\right\} \quad x = \dfrac{110 \cdot 650}{100} = 715\,€$

Su precio este año por tanto es de 715 €. Le aplicamos la rebaja del 20 % :

$$\left.\begin{array}{ll} 100\,\% & \rightarrow 715\,€ \\ 80\,\% & \rightarrow x \end{array}\right\} \quad x = \frac{80 \cdot 715}{100} = 572\,€$$

Luego pagamos 572 € por el ordenador.

Haciendo los porcentajes encadenados:

El precio inicial del 100 % se aumenta un 10 % luego: $100 + 10 = 110\,\%$ del precio inicial.

Le aplicamos la rebaja del 20 % y tenemos: $100 - 20 = 80\,\%$ del precio anteriormente aumentado.

El precio final del ordenador será el 80% del 110% de 650€. Usando **Índices de Variación** resulta mucho más rápido y sencillo:

$$\frac{80}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot 650 = 0'8 \cdot 1'1 \cdot 650 = 572€$$

Practicamos: Problemas con porcentajes encadenados.

1. En una factura de 475 € nos aplican un descuento del 10 % y nos cobran un 21 % de IVA. ¿Cuál es el importe final de la factura?

2. El valor de una acción a finales de semana es de 19 €. El lunes sube un 1%, el martes baja un 4% y el miércoles sube otro 14%.

- **a)** ¿Cuál es el valor inicial de la acción el jueves?
- **b)** ¿En qué porcentaje se ha incrementado su valor respecto al lunes?

3. En una determinada ciudad se reciclaron hace dos años 3520 Tm de vidrio. El año pasado, la cantidad reciclada disminuyó en un 7´3%. Tras una serie de campañas de publicidad, este año se consiguió reciclar un 24´8% más que el anterior.

- **a)** ¿Cuánto vidrio se ha reciclado en este último año?
- **b)** ¿Cómo ha variado la cantidad de vidrio reciclado respecto del primer año?

4. El precio de las naranjas ha sufrido importantes cambios estos meses. A principios de mayo, el precio de un kilo de naranjas era de 1´30€, subiendo el precio durante este mes un 14%. En el mes de junio también se produjo un incremento en el precio del 9%. Sin embargo, en el mes de julio, el precio bajó un 12% sobre el mes anterior.

- **a)** Esquematiza las subidas y bajadas de precio durante este periodo de tiempo.
- **b)** ¿Cuál era el precio del kilo de naranjas a finales de julio?
- **c)** ¿Cuál ha sido el porcentaje que ha variado el precio de las naranjas entre mayo y julio?

FACTORES DE CONVERSIÓN:

Son fracciones por las que se multiplica una magnitud con el fin de expresarla en otra unidad, o bien transformarla en otra magnitud con la cual guarda una relación de **proporcionalidad directa**.

EXAMPLE

Veamos cómo usar factores de conversión para pasar de km/h a m/s. Para ello tendremos en cuenta que:

- La distancia (km) y el tiempo (h) son magnitudes directamente proporcionales ya que cuanto más tiempo circulemos más distancia recorreremos.

- Queremos transformar 2 unidades → Necesitamos 2 factores de conversión.

- Observa que si una misma unidad se encuentra en el numerador y denominador se simplifica:

$$\frac{70\,\cancel{km}}{\cancel{h}}\ \frac{1000\text{ m}}{1\ \cancel{km}}\ \frac{1\ \cancel{h}}{3600\text{ s}} = \frac{70000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 19{,}44\ \text{m/s}$$

EXAMPLE

"Un lingote tiene una masa de 500g. Si sabemos que la densidad del oro es 19´3 g/cm3, calcula el volumen de dicho lingote usando un factor de conversión".

- La masa (gramos) y el volumen (cm^3) son magnitudes directamente proporcionales ya que cuánto más masa tengamos mayor volumen ocupará.
- Queremos transformar una unidad, necesitamos un factor de conversión:
- Observa que si una misma unidad se encuentra en el numerador y denominador se simplifica:

$$500g \cdot \frac{1\,cm^3}{19´3g} = \frac{500g \bullet 1cm^3}{19´3\ g} = 25´9\ cm^3$$

Practica:

1. **Expresa en m/s usando FACTORES DE CONVERSIÓN:**
   - **a)** 25 km/h.
   - **b)** 60 km/h.
   - **c)** 120 km/h.
   - **d)** 130´5 km/h.

2. **Expresa en km/h usando FACTORES DE CONVERSIÓN:**
   - **a)** 30 m/s.
   - **b)** 130 m/s.
   - **c)** 200 m/s.
   - **d)** 33´3 m/s.

3. **Realiza las siguientes transformaciones de unidades utilizando factores de conversión:**
   - **a)** 21.250 m → km
   - **b)** 25 km → m
   - **c)** 7,7 kg → hg
   - **d)** 150 min → h
   - **e)** 2400 s → min
   - **f)** 120 km/h → m/s
   - **g)** 60 pulg → cm (1 pulg = 2´54 cm)

4. **Usa factores de conversión y realiza los siguientes cambios de unidades de tiempo:**
   - **a)** 24 s → min
   - **b)** 18 h → días
   - **c)** 150 min → s
   - **d)** 10800 s → h
   - **e)** 2,5 años → h
   - **f)** 8500 ms → s
   - **g)** 86400 ms → h
   - **h)** 720 min → h
   - **i)** 0,25 h → s
   - **j)** 3 días → min

5. **Usa factores de conversión y realiza los siguientes cambios de unidades:**
   - **a)** 15,25 kL → L
   - **b)** 50 L → kL
   - **c)** 150 mL → hL
   - **d)** 33 cL → mL
   - **e)** 750 dL → cL
   - **f)** 8500 mL → L
   - **g)** 0,65 hL → mL
   - **h)** 250 cL → daL
   - **i)** 52 daL → cL
   - **j)** 9,25 kL → dL

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA: REGLA DE TRES COMPUESTA:

Se emplea cuando se relacionan **tres o más magnitudes**. Una regla de tres compuesta se compone de varias reglas de tres simples aplicadas sucesivamente.

Regla de 3 compuesta con dos proporcionalidades directas: ***"Hemos ido a la fuente del pueblo para recoger agua. Sabemos que 5 botellas de agua, de 2 L cada una, pesan 10 kg. ¿Cuánto pesan 2 botellas de 3 L cada una?"***

Las tres magnitudes que tenemos en el problema son:

- Número de botellas.
- Capacidad de las botellas en litros.
- Peso de las botellas en kg.

Escribimos la relación entre ellas sabiendo que:

5 — 2 — 10
2 — 3 — X

Ahora tenemos que averiguar la relación entre las magnitudes, comparando siempre con la magnitud donde esté la incógnita "x":

- Comparamos botellas con kilos: Si hay menos botellas entonces pesarán menos. Tienen proporcionalidad directa.

- Comparamos litros con kilos: Si hay más litros entonces pesarán más. Tienen proporcionalidad directa.

D

5 — 2 — 10

2 — 3 — X

D

Ahora, escribimos las relaciones en forma de razones para poder despejar la incógnita "x" y resolvemos:

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{X} \longrightarrow \frac{10}{6} = \frac{10}{X} \longrightarrow x = \frac{6 \cdot 10}{10} = 6 \text{ kg}$$

<u>**SOLUCIÓN:**</u> Dos botellas de tres litros cada uno pesan un total de 6 kg.

<u>**Regla de 3 compuesta con proporcionalidad directa e inversa:**</u> "***En 4 días, 6 impresoras imprimieron un total de 100 libros. ¿Cuántos días tardarán en imprimir 50 libros si tenemos 4 impresoras?***"

Las magnitudes que tenemos en el problema son:

- Número de días.
- Número de impresoras.
- Número de libros.

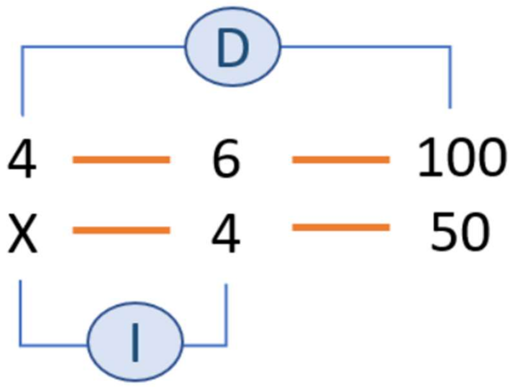
La relación entre ellas es:

4 — 6 — 100

X — 4 — 50

Vemos el tipo de proporcionalidad entre las magnitudes:

- Si hay que hacer menos libros entonces se necesitan menos días. Proporcionalidad directa.
- Si hay menos impresoras entonces se necesitan más días. Proporcionalidad inversa.



Ahora, escribimos las relaciones en forma de razones para poder despejar la incógnita "x". **¡OJO! La magnitud que es inversa debemos invertirla,** es decir, el denominador pasa a ser numerador y el numerador pasa a ser denominador. Si hay más de una se invertirá también.

$$\frac{4}{X} = \frac{4}{\underset{\Uparrow}{6}} \cdot \frac{100}{50}$$

Inversa

Ahora resolvemos como el problema anterior:

$$\frac{4}{x} = \frac{4 \bullet 100}{6 \bullet 50} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{400}{300} \rightarrow \text{x} = \frac{4 \bullet 300}{400} = 3\ días$$

SOLUCIÓN: Para imprimir 50 libros, 4 impresoras tardan 3 días.

Practicamos:

1. Cinco caballos en cuatro días consumen 60 kg de pienso. ¿Cuántos días podrán alimentarse a 8 caballos con 360 kg de pienso?

2. En un comedor escolar 75 alumnos han consumido 230 kg de pescado en 2 meses. ¿Cuántos kg de pescado consumirán 150 alumnos en 3 meses?

3. Doce obreros, trabajando 8 horas diarias hacen una pared de 50 m de larga en 25 días. ¿Cuánto tardarán 5 obreros en hacer una pared de 100 m de larga si trabajan 10 horas diarias?

4. Sesenta terneros consumen 4.200 kg de pienso a la semana. ¿Durante cuantos días podremos alimentar a quince terneros si disponemos de 600 kg de pienso?

5. Por enviar un paquete de 5 kg de peso a una ciudad que está a 60 km de distancia, una empresa de transporte me ha cobrado 9 €. ¿Cuánto me costará enviar un paquete de 50 kg a 200 km de distancia?

6. En una fábrica trabajando una jornada de 8 horas diarias han necesitado 5 días para fabricar 1.000 ruedas. ¿Cuántos días se necesitarán para fabricar 3.000 ruedas si aumentan 2 horas en la jornada de trabajo diaria?

7. En un cine dando 2 sesiones diarias, puede dar entrada a 18.000 personas en 30 días. ¿A cuántas personas podrán recibir 4 cines dando 3 sesiones diarias durante 45 días?

8. Para llenar un depósito hasta una altura de 80 cm se ha necesitado aportar un caudal de 20 litros por minuto durante 1h y 20min. ¿Cuánto tiempo se tardará en llenar otro depósito hasta una altura de 90 cm si se le aporta un caudal de 15 litros por minuto?