→ CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. **Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.**

a) $f(x)=x^2-4x$

b) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-4x}$

c) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+4}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$

e) $f(x)=\dfrac{3+x}{x\sqrt{x^2+4}}$

f) $f(x)=e^{2x-2}+\cos(2x-2)$

g) $f(x)=e^{\frac{1}{x^2-25}}$

h) $f(x)=\cos\dfrac{x}{x+1}$

i) $f(x)=\dfrac{2}{1+\operatorname{sen}x}$

2. **¿Por qué son continuas en todo R las siguientes funciones?**

a) $f(x)=\dfrac{x\operatorname{sen}x}{2-\cos 2x}$

b) $f(x)=\sqrt[3]{5x+x^2}$

c) $f(x)=\ln\left(2\operatorname{sen}x+\dfrac{5}{2}\right)$

3. **La función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}$ es discontinua en $x=1$. Compruébalo y en el caso de que sea evitable indica que hay que hacer para evitarla. ¿Tiene la función alguna discontinuidad más? Si es así, indica el punto y el tipo de discontinuidad.**

4. **a)** Dependiendo de los valores de k, ¿tiene la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-kx+1}$ alguna discontinuidad?

b) ¿Cuántas discontinuidades tiene si $k>2$? ¿Y si $k\in(-2,2)$? ¿Y si $k=\pm2$?

c) ¿Podría evitarse si $k=-2$? ¿Y si $k=\pm2$?

5. **Indica si las siguientes funciones son o no continuas en $x=1$.**

a) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{-3}{x^2+2} & \text{si } x>1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} e^{1-x} & \text{si } x<1 \\ \cos(x-1) & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

6. **¿Para qué valores de k es continua en $x=1$ la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 1 \\ 2x+k & \text{si } x>1\end{cases}$?**

7. **Se considera la función $f(x)=\begin{cases} |x+1|-k & \text{si } x\le 2 \\ x-5 & \text{si } x>2\end{cases}$. Halla el valor de k para que f sea continua en $x=2$.**

8. **a)** ¿Para qué valor de a es continua en el intervalo $[-\pi,\pi]$ la función $f(x)=\begin{cases} 2\operatorname{sen}x & \text{si } -\pi\le x\le 0 \\ x^2-ax & \text{si } 0<x\le\pi\end{cases}$?

b) ¿Y la función $f(x)=\begin{cases} 2\cos x & \text{si } -\pi\le x\le 0 \\ x^2-ax & \text{si } 0<x\le\pi\end{cases}$?

9. **Determina los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases} e^x+a & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{6}{x+3} & \text{si } 0<x\le 3 \\ x^2-2b & \text{si } x>3\end{cases}$ sea continua en todo R.**

$\rightarrow$ ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

1. Halla las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x+4}$ b) $f(x)=\dfrac{x+4}{x}$

2. Determina las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$

3. Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+8}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-4}$

4. Halla todas las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=2x-\dfrac{4}{x}$ b) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

5. Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{2x+4}$

6. Halla los valores de a y b para que la recta $y=-x+2$ sea la asíntota oblicua de la función $f(x)=\dfrac{ax^2-2}{x+b}$.

7. Halla el dominio de las siguientes funciones. Determina sus asíntotas si las hay.

a) $f(x)=\sqrt{x-2}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

8. Determina si las siguientes funciones tienen asíntotas. Hállalas cuando existan.

a) $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ b) $f(x)=2x-\sqrt{x}$ c) $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

9. Encuentra las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+2}$ g) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ m) $f(x)=xe^{x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{-x^2-4}$ h) $f(x)=\dfrac{x^5}{(x-1)^2}$ n) $f(x)=\dfrac{2x+3}{e^x}$

c) $f(x)=\dfrac{2+x}{x^2+3x+2}$ i) $f(x)=\dfrac{-x^3}{x^2+2}$ ñ) $f(x)=e^{x^2}\ln x$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+3x}$ j) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ o) $f(x)=3e^{1-x^2}$

e) $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{x^2+4}$

k) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

p) $f(x)=\sqrt{x-4}$

f) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2}$

l) $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x^2}$

q) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

10. Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+x-2} & x<0\\ \dfrac{x^2+x-2}{x-2} & x\ge 0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3} & x\le 2\\ \dfrac{2x^3-1}{x^2-3x} & x>2\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x^2-1} & x<0\\ \ln(x+1) & x\ge 0\end{cases}$

11. **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-5x+1}\right)^{\frac{x^2-3x+1}{4x-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2+x-9}{x^3+x^2-6x}-\dfrac{3-x}{2x-x^2}\right)$

12. **Estudia la continuidad de la función** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+4x+4} & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{si } 0<x\end{cases}$.

13. **Calcula el valor de** ***a*** **para que la función** $f(x)=\begin{cases}x\ln x+a & \text{si } x\le 1\\ 3x^2-ax+4 & \text{si } 1<x\end{cases}$ **sea continua en** $x=1$.

→ CONTINUIDAD EN PROBLEMAS

14. **El precio del nuevo modelo de teléfono móvil de la empresa Mandarina evoluciona con el tiempo,** t **, medido en meses según la función:**

$$\begin{cases}450-25t\left(\dfrac{t}{24}-1\right) & \text{si } 0\le t\le 24\\ \dfrac{at+14280}{t+12} & \text{si } t>24\end{cases}$$

a) ¿Cuál es el precio inicial del teléfono móvil?

b) Sabiendo que la función es continua, calcula el valor de *a*.

c) A lo largo de los años, ¿qué ocurrirá con el valor del móvil?

15. Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+b & \text{si } x\le -1 \\ 3x^2+4 & \text{si } -1<x<1 \\ -x^3+8 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ donde b es un parámetro real. Se pide:

Calcular el valor del parámetro b para que f(x) sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$. Sol: $b=6$

16. Sea f(t) el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo t, medido en meses, transcurrido desde su inauguración:

$$f(t)=\begin{cases} -\dfrac{5}{2}t^2+20t, & \text{si } 0\le t\le 6 \\ \dfrac{90t-240}{t+4}, & \text{si } t>6 \end{cases}$$

a) ¿Evoluciona la función f de forma continua?
b) ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?
c) ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40%?
d) ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

17. Sea P(t) el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo t, medido en meses: $P(t)=\begin{cases} t^2, & \text{si } 0\le t\le 5 \\ \dfrac{100t-250}{t+5}, & \text{si } t>5 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de la función P. b) ¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?

18. La cantidad, C, que una entidad bancaria dedica a créditos depende de su liquidez, x, según la función $C(x)=\begin{cases} \dfrac{150+5x}{100}, & \text{si } 10\le x\le 50 \\ \dfrac{200+10x}{25+3x}, & \text{si } x>50 \end{cases}$ donde C y x están expresadas en miles de euros. a) Justifique que C es una función continua. b) Calcule la asíntota horizontal e interprétela en el contexto del problema.

19. El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función: $P(t)=\dfrac{15+t^2}{(t+1)^2}$ donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$. Calcúlese:

a) La población inicial. b) El tamaño de la población a largo plazo

20. Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ $g(x) = -x^2 + c$. Determínese a, b y c, sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos $(-2, -3)$ y $(1, 0)$