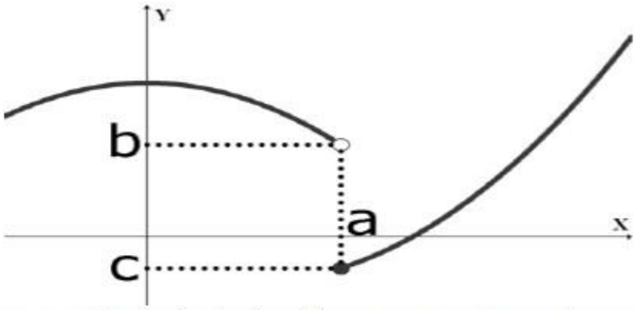
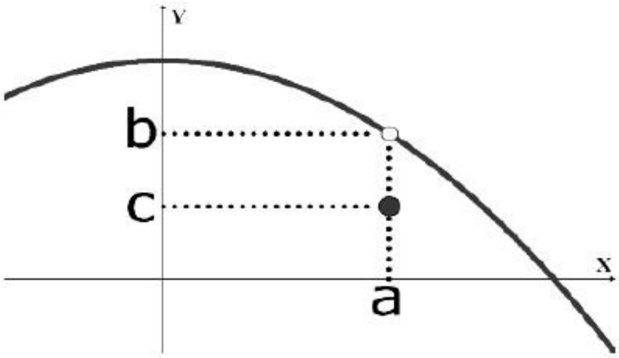
CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Recuerda que para que una función sea continua, su gráfica no puede tener ninguna rotura.

Por ejemplo, la siguiente función no es continua en x = a porque las ramas no "conectan", fíjate que los límites laterales en x = a son distintos, o dicho de otra forma, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$



Tampoco es continua, en x = a, la siguiente función, porque aunque las ramas conectan (existe $\lim_{x\to a} f(x) = b$), no coincide con f(a). Por eso su gráfica tiene un "agujero"



Luego, para que una función f sea continua en x = a se debe cumplir que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

O lo que es lo mismo, se tienen que dar las siguientes condiciones:

C_1: Debe existir f(a) C_2: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Una función $y = f(x)$ es **continua en un punto** $x = x_0$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. Existe $f(x_0)$, es decir, $x_0 \in \mathrm{Dom} f(x)$
2. Existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, es decir, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
3. Los dos valores anteriores coinciden. $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Si f y g son dos funciones continuas en $x = x_0$, se verifica:

- $f + g$ es continua en x_0
- $f - g$ es continua en x_0
- $k \cdot f$ es continua en x_0, $\forall k \in \mathbb{R}$
- $f \cdot g$ es continua en x_0
- f/g es continua en x_0, siempre que $g(x_0) \neq 0$

Las **funciones elementales** son continuas en sus respectivos dominios de definición:

- Las **funciones polinómicas** son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones racionales** no son continuas en los puntos que anulan el denominador.
- Las **funciones con radicales** con índice par no existen en los valores que hacen el radicando negativo. Si el índice es impar, son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones exponenciales** son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones logarítmicas** no son continuas en los puntos en los que la expresión de la que queremos hallar el logaritmo se convierte en cero o en un número negativo.
- De las **funciones trigonométricas** no son continuas aquellas que implican un cociente, es decir:
    - La tangente y secante, que no son continuas en los puntos en los que se anula el coseno ($\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$),
    - La secante y cotangente, que no son continuas en los puntos en los que se anula el seno ($\alpha = k \cdot \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$).

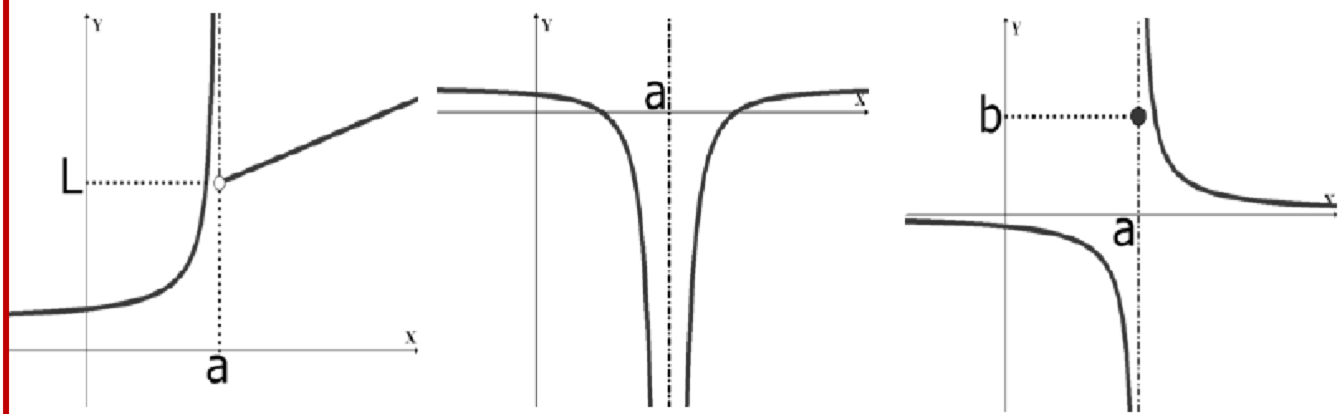
TIPOS DE DISCONTINUIDADES

Una función que **no** es continua en un punto de abscisa x_0, decimos que es discontinua en ese punto.

Discontinuidad asintótica o de salto infinito

Se da cuando $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Ejemplos:



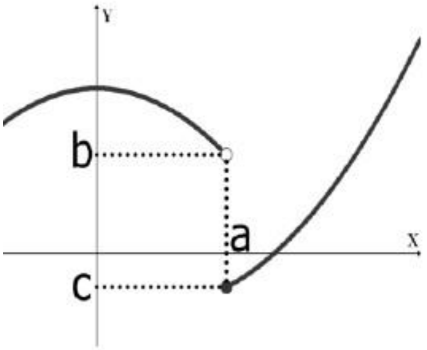
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \infty$
($\nexists$ f(a))	($\nexists$ f(a))	(f(a) = b)

En todos los casos, la asíntota vertical es la recta de ecuación A.V. : x = a

Discontinuidad de salto finito

Se da cuando $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c$, pero $b \neq c$

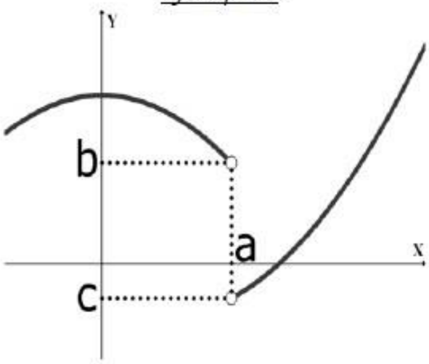
Ejemplos.



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c$

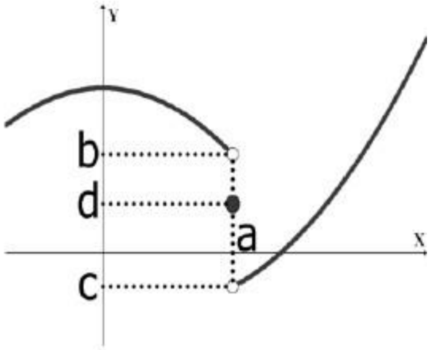
$(f(a) = c)$



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c$

$(\nexists\, f(a))$



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$

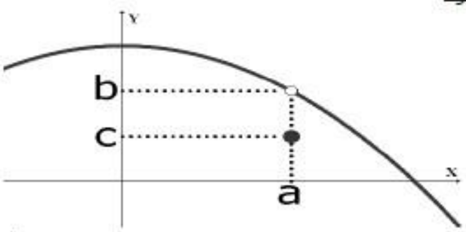
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c$

$(f(a) = d)$

Discontinuidad evitable

Se da cuando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, pero $b \neq f(a)$

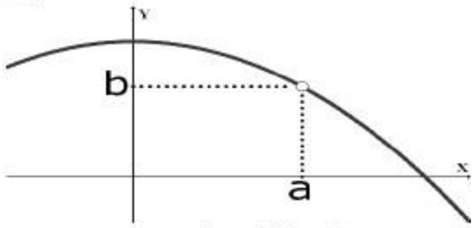
Ejemplos.



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$

$(f(a) = c)$



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$

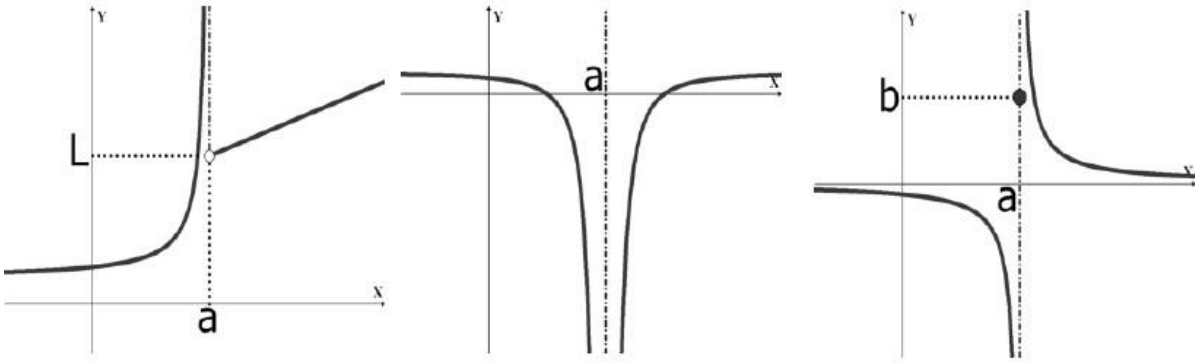
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$

$(\nexists\, f(a))$

▪ ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

1) ASÍNTOTAS VERTICALES : es equivalente a que la función tenga una discontinuidad asintótica .

Ejemplos:



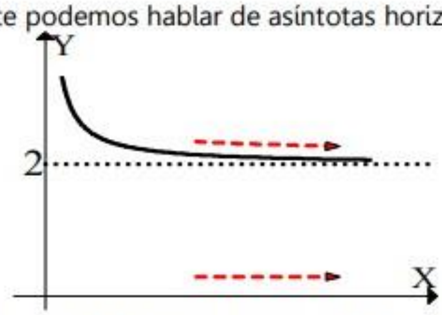
$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$

En todos los casos, la asíntota vertical es la recta de ecuación A.V. : x = a

2) ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \Rightarrow$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $\pm\infty$ de ecuación: $\boxed{\text{A.H.}: y = L}$

Análogamente podemos hablar de asíntotas horizontales en $-\infty$

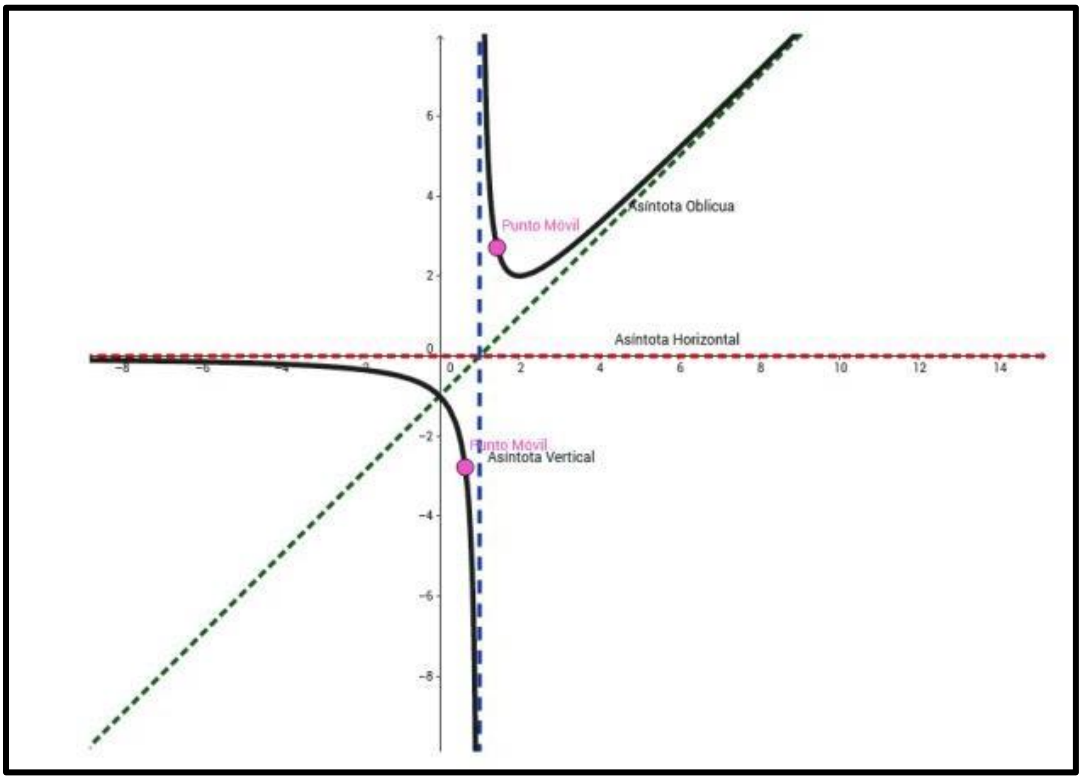


Por ejemplo, la función representada tiene una asíntota horizontal en ∞, que es la recta de ecuación A.H.: y = 2

3) ASÍNTOTAS OBLICUAS

Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = n \Rightarrow$ f(x) tiene una **asíntota oblicua** en $\pm\infty$ de ecuación:

$$\boxed{A.O.: \ y = mx + n}$$

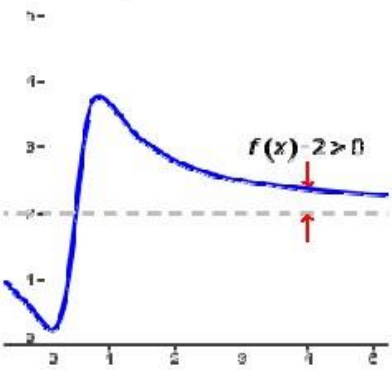


⇒ POSICIÓN DE LA GRÁFICA RESPECTO A LAS ASÍNTOTAS HORIZONTALES Y OBLICUAS

- La gráfica está por encima de la asíntota en ∞ cuando $y_{gráfica} > y_{asíntota}$, o sea cuando $y_{gráfica} - y_{asíntota} > 0$.

Por ejemplo, la función f(x) tiene asíntota horizontal en ∞ A.H.: y = 2.

Observa que $y_{gráfica} - y_{asíntota} = f(x) - 2 > 0$

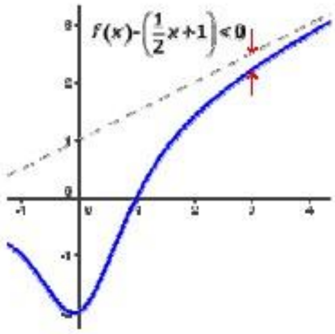


- La gráfica está por debajo de la asíntota en ∞ cuando $y_{gráfica} < y_{asíntota}$, o sea cuando $y_{gráfica} - y_{asíntota} < 0$.

- La gráfica está por debajo de la asíntota en ∞ cuando $y_{gráfica} < y_{asíntota}$, o sea cuando $y_{gráfica} - y_{asíntota} < 0$.

Por ejemplo, la función f(x) tiene asíntota oblicua en ∞ A.O.: $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Observa que $y_{gráfica} - y_{asíntota} = f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) < 0$



Análogamente podemos hablar de la posición entre gráfica y asíntota en $-\infty$