UNIDAD 4.- 2) LÍMITES DE FUNCIONES (TEORÍA CON EJEMPLOS)

Para calcular el límite de una función en un punto, evaluamos la función en ese punto. Puede suceder que el resultado sea indeterminado:

$$\infty - \infty \ ; \quad \frac{\infty}{\infty} \ ; \quad \frac{0}{0} \ ; \quad 0 \cdot \infty$$

$$1^{\infty} \ ; \quad 0^{0} \ ; \quad \infty^{0}$$

EN ESTE CASO HAY QUE HACER LÍMITES LATERALES PARA CONOCER EL SIGNO DEL INFINITO ¡¡

- cuando tengamos $\frac{k \neq 0}{0} = \infty$

Es indeterminado el signo del ∞ y depende de la regla de los signos.

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+1}{x-3} = ?\infty \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x+1}{x-3} \underset{*}{=} \frac{4}{0^-} = -\infty & \text{* para ver el signo se sustituye en 2'9} \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x+1}{x-3} \underset{**}{=} \frac{4}{0^+} = +\infty & \text{** para ver el signo se sustituye en 3'1} \end{cases}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ *porque el denominador es siempre +*

LÍMITES DE POLINOMIOS EN EL INFINITO

Sea un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0$

$\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (a_n x^n) = ?\infty$ El signo del ∞ se obtiene con la regla de los signos

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5x^4 + 2x^3 - x + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-5x^4) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^4 + 2x^3 - x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^4) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^7 + 4x^2 + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^7) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^7 + 4x^2 + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^7) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^5 - 9x^3 + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (4x^5) = +\infty$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^5 - 9x^3 + x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (4x^5) = -\infty$

$$\boxed{\frac{0}{0}}$$

- $\frac{0}{0}$ de funciones polinómicas: $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left(\frac{P(a)}{Q(a)}=\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-\cancel{a})\cdot ?}{(\cancel{x}-a)\cdot ?}$

  Se divide por Ruffini numerador y denominador entre x-a y se calcula el límite en la expresión simplificada.

  Ejemplos

  1) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{-4x^3-4x^2+x+1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{*}{=}}\lim\limits_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}\cdot(2x+1)}{\cancel{(x+1)}\cdot(-4x^2+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+1}{-4x^2+1}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

  * Dividimos numerador y denominador entre x+1 por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 3 & 1 \\ -1 & & -2 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & -4 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & & 4 & 0 & -1 \\ \hline & -4 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

2)

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^4+4x^3-16x+16}{x^3-3x^2+4}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{*}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(-x^3+2x^2+4x-8)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x^2-x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-x^3+2x^2+4x-8}{x^2-x-2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{*}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(-x^2+4)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+4}{x+1}=\frac{0}{3}=0$$

- $\frac{0}{0}$ de funciones irracionales: se multiplica numerador y denominador por el conjugado

Ejemplos

1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x^2-1}}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-\sqrt{2x^2-1})\cdot(x+\sqrt{2x^2-1})}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{2x^2-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(2x^2-1)}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{2x^2-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2+1}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{2x^2-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(-x-1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+\sqrt{2x^2-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{-x-1}{x+\sqrt{2x^2-1}}=\frac{-2}{2}=-1$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{-5+\sqrt{x+25}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(3-\sqrt{x+9})\cdot(3+\sqrt{x+9})\cdot(-5-\sqrt{x+25})}{(-5+\sqrt{x+25})\cdot(-5-\sqrt{x+25})\cdot(3+\sqrt{x+9})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[9-(x+9)]\cdot(-5-\sqrt{x+25})}{[25-(x+25)]\cdot(3+\sqrt{x+9})}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{-x}\cdot(-5-\sqrt{x+25})}{\cancel{-x}\cdot(3+\sqrt{x+9})}=\lim_{x\to 0}\frac{-5-\sqrt{x+25}}{3+\sqrt{x+9}}=\frac{-5-5}{3+3}=\frac{-10}{6}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ COCIENTES DE POLINOMIOS.

Se resuelve dividiendo numerador y denominador entre x^p siendo p la mayor potencia de numerador y denominador. Se puede obtener la siguiente regla:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+.....}{b_m x^m+.....}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m} & si\ \ n=m\\ 0 & si\ \ n<m\\ \infty & si\ \ n>m \quad (El\ \ signo\ del\ \infty\ depende\ de\ la\ regla\ de\ los\ signos)\end{cases}$$

Ejemplos

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5-9x^3+x}{x-2x^5-x^2}=\frac{4}{-2}=-2$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^6-x^3+1}{-2x^5-3x^2}=-\infty$ (en $+\infty$: $4x^6$ es + y $-2x^5$ es -)

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+2x^3+x}{x^6-3x^2+1}=0$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^8+x^5-1}{-x^3-3x^2}=+\infty$ (en $-\infty$: x^8 es + y $-x^3$ es +)

$\infty - \infty$

Tipo 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^3}{x+1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot(x+1)-x^3\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+2x^3+x^2}{x^2-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x+1}-\frac{x^4-x^3-2x^2}{x^2-1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\cdot(x-1)-x^4+x^3+2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}2$$

Tipo 2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)\cdot(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

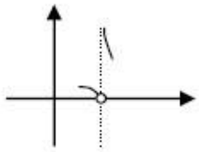
LÍMITES DE POTENCIAS.

Cuando se calcula un límite y aparece ∞ en el exponente <u>siempre</u> hay que estudiar su signo como en los siguientes casos:

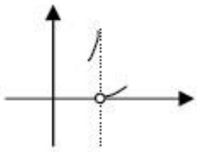
$$a^{+\infty}\begin{cases} +\infty & si \quad a>1 \\ 0 & si \quad 0<a<1 \end{cases} \qquad\qquad a^{-\infty}\begin{cases} 0 & si \quad a>1 \\ +\infty & si \quad 0<a<1 \end{cases}$$

<u>Ejemplos</u>

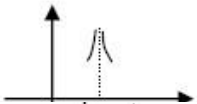
1) $\lim\limits_{x\to1}(3x-1)^{\frac{5}{x-1}} = 2^{\infty} = \begin{cases} 1^- : 2^{\frac{5}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0 & (se\ sustituye\ \ 0'9\ \ en\ \ x-1: signo\ -) \\ 1^+ : 2^{\frac{5}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty & (se\ sustituye\ \ 1'1\ \ en\ \ x-1: signo\ +) \end{cases}$



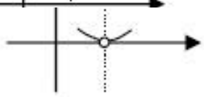
2) $\lim\limits_{x\to1}(3x-1)^{\frac{5}{1-x}} = 2^{\infty} = \begin{cases} 1^- : 2^{\frac{5}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty & (se\ sustituye\ \ 0'9\ \ en\ \ 1-x: signo\ +) \\ 1^+ : 2^{\frac{5}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0 & (se\ sustituye\ \ 1'1\ \ en\ \ 1-x: signo\ -) \end{cases}$



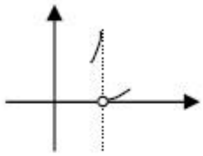
3) $\lim\limits_{x\to1}(3x-1)^{\frac{5}{(x-1)^2}} = 2^{+\infty} = +\infty$



4) $\lim\limits_{x\to1}(3x-1)^{\frac{-5}{(x-1)^2}} = 2^{-\infty} = 0$



5) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} \begin{cases} 2^- : \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty & (se\ sustituye\ \ 1'9\ \ en\ \ x-2: signo\ -) \\ 2^+ : \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0 & (se\ sustituye\ \ 2'1\ \ en\ \ x-2: signo\ +) \end{cases}$



1^{∞}

Las indeterminaciones de tipo $\boxed{1^{\infty}}$ están basadas en el número e y se pueden resolver de muchas formas.

Una de ellas es aplicando la siguiente fórmula (donde A puede ser un número o un infinito)

$$\boxed{\lim_{x\to A} f(x)^{g(x)} = e^{\left[\lim\limits_{x\to A} g(x)\cdot(f(x)-1)\right]}}$$

Veamos un ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{2x+1}=1^{\infty}$$

Aplicamos la fórmula

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{2x+1}=e^{\left[\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\cdot\left(\frac{x}{x+2}-1\right)\right]}$$

Hacemos las operaciones aparte

$$(2x+1)\cdot\left(\frac{x}{x+2}-1\right)=(2x+1)\cdot\frac{x-(x+2)}{x+2}=$$
$$=(2x+1)\cdot\frac{-2}{x+2}=\frac{-4x-2}{x+2}$$

Entonces tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{2x+1}=e^{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x-2}{x+2}\right]}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$$

MÁS EJEMPLOS

2) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5-2x}{3-2x}\right)^{x-4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5-2x}{3-2x}\right)^{x-4}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{5-2x}{3-2x}-1\right]\cdot(x-4)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{5-\cancel{2x}-3+\cancel{2x}}{3-2x}\right]\cdot(x-4)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3-2x}\right]\cdot(x-4)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-8}{-2x+3}\right)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

3) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-5x}{3x^2-2x+1}\right)^{\frac{x}{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-5x}{3x^2-2x+1}\right)^{\frac{x^2}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2-5x}{3x^2-2x+1}-1\right]\cdot\frac{x^2}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\cancel{3x^2}-5x-\cancel{3x^2}+2x-1}{3x^2-2x+1}\right]\cdot\frac{x^2}{3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-3x-1}{3x^2-2x+1}\right]\cdot\frac{x^2}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-3x^3-x^2}{9x^2-6x+3}\right]}=e^{-\infty}=0$$

LÍMITES DE FUNCIONES A TROZOS

$$f(x)=\begin{cases} 3-x & x<1 \\ \dfrac{4x-4}{x^2-1} & 1\le x<3 \\ \dfrac{1}{x-3} & 3\le x<6 \\ 4 & x\ge 6 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$: *como a izquierda y derecha de 1 hay funciones diferentes es necesario calcular límites laterales:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(3-x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4x-4}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)\cdot 4}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4}{x+1} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$: *como a izquierda y derecha de 3 hay funciones diferentes es necesario calcular límites laterales:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{4x-4}{x^2-1} = \dfrac{8}{8} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{no } \exists \lim_{x\to 3} f(x) \quad (\textit{en } x=3 \textit{ hay una D.I.S.I})$$

- $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$: *como a izquierda y derecha de 6 hay funciones diferentes es necesario calcular límites laterales:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^-} \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^+} 4 = \lim\limits_{x\to 3^+} 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{no } \exists \lim_{x\to 3} f(x) \quad (\textit{en } x=6 \textit{ hay una D.I.S.F})$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 4 = 4$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (3-x) = -\infty$

RESUMEN DEL CÁLCULO PRÁCTICO DE LÍMITES

<table>
<tr>
<td>$\infty - \infty$</td>
<td>Si aparece en una expresión polinómica nos quedamos con el término de mayor grado</td>
<td>Si aparece en una suma o resta de fracciones algebraicas resolvemos la operación para transformar la indeterminación en $\frac{\infty}{\infty}$</td>
<td>Si aparece en una suma o resta con raíces cuadradas de expresiones algebraicas, multiplicamos y dividimos por el conjugado.</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{\infty}{\infty}$</td>
<td colspan="2">
Si es un cociente de polinomios $\lim \frac{P(x)}{Q(x)}$
$gr\ P(x) > gr\ Q(x) \rightarrow \infty$
$gr\ P(x) = grQ(x) \rightarrow cociente\ de\ los\ términos\ de\ mayor\ grado$
$gr\ P(x) < gr\ Q(x) \rightarrow 0$
Si es un cociente de otras funciones podemos considerar los diferentes órdenes de infinitos:
$log_a x \ll x^n \ll a^x \quad con\ a > 1$
</td>
<td>Si aparecen raíces cuadradas de expresiones algebraicas, multiplicamos y dividimos por el conjugado.</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{0}{0}$</td>
<td colspan="2">Si es un cociente de polinomios $\lim \frac{P(x)}{Q(x)}$ para resolver la indeterminación factorizamos y simplificamos la expresión.</td>
<td>Si aparecen raíces cuadradas de expresiones algebraicas, multiplicamos y dividimos por el conjugado.</td>
</tr>
<tr>
<td>$0 \cdot \infty$</td>
<td colspan="3">Transformamos la indeterminación en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$</td>
</tr>
<tr>
<td>1^{∞}</td>
<td colspan="3">Para resolver esta indeterminación podemos:

Tomar logaritmos
Buscar la definición del número e
Directamente aplicar: $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>$0^0\ ;\ \infty^0$</td>
<td colspan="3">Para resolver estas indeterminaciones tomamos logaritmos</td>
</tr>
</table>