UNIDAD 4.- 1) FUNCIONES ELEMENTALES (TEORÍA)

1.- CONCEPTO DE FUNCIÓN. CARACTERÍSTICAS

Una función real de variable real f es una forma de hacerle corresponder a un número real "x" un único número real "y = f(x)". Se suele representar así: $f: R \rightarrow R$, $y = f(x)$

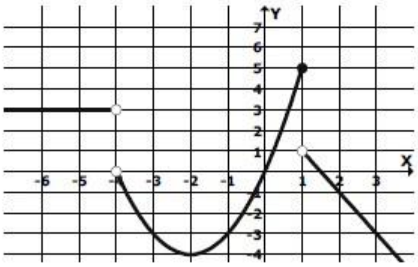
Si en la función f sustituimos el valor x = a obtenemos el valor y = f(a), llamado imagen de "a".

El conjunto de todos los puntos del plano (x, y) que cumplen la fórmula o ecuación y = f(x) se llama gráfica de la función f.

⇒ DOMINIO

El *dominio* de definición de una función f es el conjunto de todos los valores "x" para los que exista f(x). Se representa por D(f).

Por ejemplo, para la función f cuya gráfica es



$D(f) = R - \{-4\}$

Si sólo tenemos la fórmula y queremos calcular el dominio tenemos que averiguar los valores de la "x" para los que se puede calcular la fórmula.

Ejemplo:

Si $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$, la fórmula no se puede calcular cuando el denominador es cero.

Como $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow D(f) = R - \{\frac{1}{2}\}$

⇒ CORTES CON LOS EJES

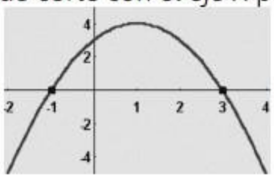
Como la ecuación del eje X es y = 0, para calcular los puntos de corte de la gráfica de una función f(x) con el eje X resolvemos el sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$. Obtenemos entonces la ecuación f(x) = 0.

Si la ecuación no tuviese solución, entonces la gráfica no corta al eje X

Como la ecuación del eje Y es x = 0, para calcular el punto de corte con el eje Y resolvemos el sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$. Obtenemos entonces x = 0 , y = f(0), que da lugar al punto (0, f(0)).

Si no existe f(0) entonces la gráfica no corta al eje Y

Si conocemos los puntos de corte con el eje X podemos saber en qué intervalo del eje X es f(x) > 0.

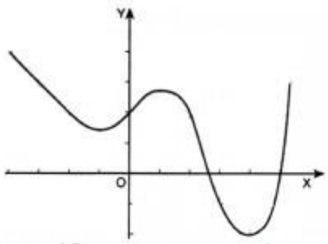
Por ejemplo, esta función  corta al eje X en los puntos (– 1, 0) y (3, 0).

La función es positiva en el intervalo (– 1, 3) pues en este intervalo la gráfica está por "encima" del eje X

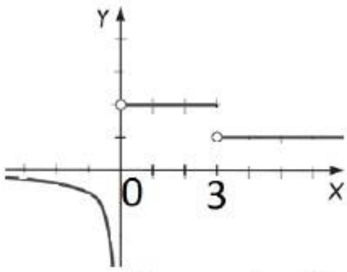
⇒ CONTINUIDAD

Una función es continua cuando su gráfica no tiene ninguna "rotura" y, por tanto, se puede dibujar de un solo trazo.

Ejemplos:



Esta gráfica corresponde a una función continua



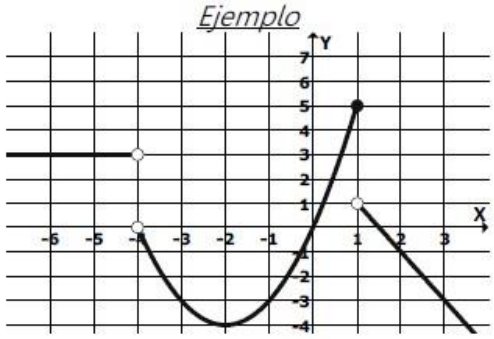
Esta gráfica corresponde a una función discontinua.

Los puntos de discontinuidad son x = 0, x = 3

⇒ MONOTONÍA

Estudiar la monotonía de una función es averiguar los intervalos del eje X donde la función es creciente, decreciente o constante.

Ejemplo



Es creciente en el intervalo (– 2 , 1), pues la gráfica correspondiente es ascendente

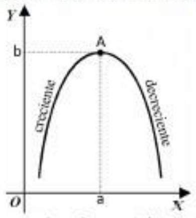
Es decreciente en (– 4 , – 2) U (1 , ∞) pues aquí su gráfica es descendente

Es constante en el intervalo (– ∞ , – 4) pues su gráfica en este intervalo es horizontal

⇒ EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

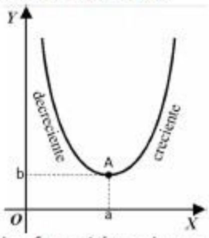
Estudiar los extremos de una función es determinar los máximos y mínimos relativos de la función.

Una función tiene un *máximo relativo* en un punto A(a,b), si en dicho punto la función es continua y pasa de creciente a decreciente.



Se suele decir que la función alcanza un máximo relativo en x = a y el valor máximo que alcanza es b.

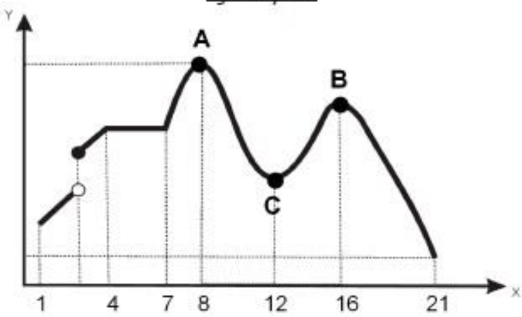
Una función tiene un *mínimo relativo* en un punto A(a,b), si en dicho punto la función es continua y pasa de decreciente a creciente.



Se suele decir que la función alcanza un mínimo relativo en x = a y el valor mínimo que alcanza es b.

Si el máximo relativo corresponde al mayor valor de la función se dice que el máximo es absoluto y si el mínimo relativo corresponde al menor valor se dice que el mínimo es absoluto

Ejemplo



Máximos relativos: A y B (A es un máximo absoluto). La función alcanza un máximo en x = 8 y en x = 16 .

Mínimo relativo: C (no es mínimo absoluto). La función alcanza un mínimo en x = 12

2.- FUNCIONES ELEMENTALES

2.1.- FUNCIONES CUYA GRÁFICA ES UNA RECTA

Todas las funciones cuya fórmula es del tipo f(x) = mx + n, con m, n ∈ R tienen como gráfica una línea recta. Por ser una función polinómica, su dominio de definición es R.

El coeficiente de x se llama pendiente de la recta

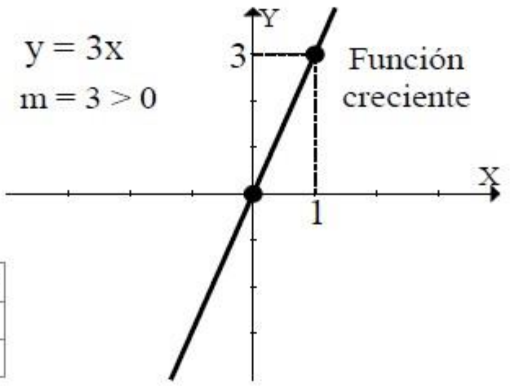
Si la pendiente es positiva, la función es creciente, si es negativa decreciente y, si es 0, es constante

Estas funciones se pueden clasificar en tres tipos:

- *Funciones lineales*: Son del tipo f(x) = mx , con m ≠ 0.

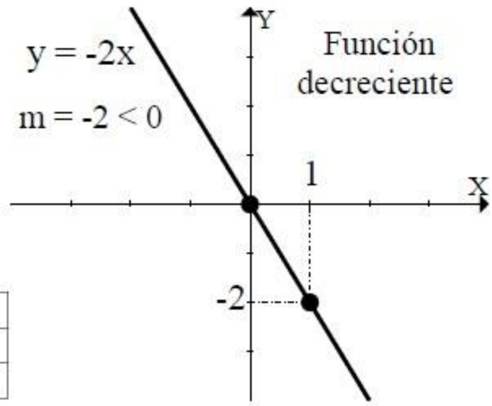
La gráfica de estas funciones es una recta que pasa por el origen de coordenadas O(0,0).

Por ejemplo: $f(x) = 3x$, $f(x) = -2x$ son funciones lineales.



x	y = 3x
0	0
1	3

Si la pendiente es positiva la función es creciente.



x	y = − 2x
0	0
1	− 2

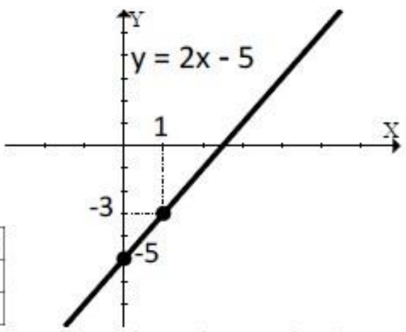
Si la pendiente es negativa la función es decreciente

- *Funciones afines*: Son del tipo $f(x) = mx + n$, con $m , n \neq 0$.

La gráfica de estas funciones es una recta que NO pasa por el origen de coordenadas O(0,0).

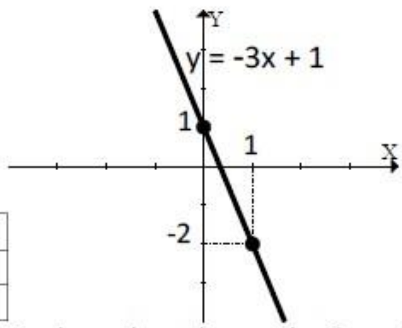
El término independiente de la fórmula, n, se llama ordenada en el origen.
La recta corta la eje Y en el punto (0, n)

Por ejemplo: $f(x) = 2x - 5$, $f(x) = -3x + 1$ son funciones afines.



x	y = 2x − 5
0	− 5
1	− 3

La pendiente es 2 y la ordenada en el origen −5



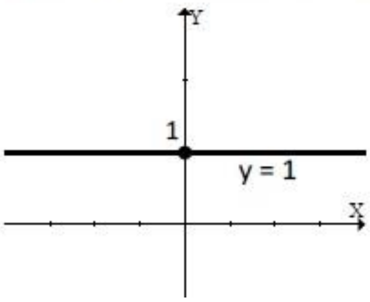
x	y = −3x + 1
0	1
1	− 2

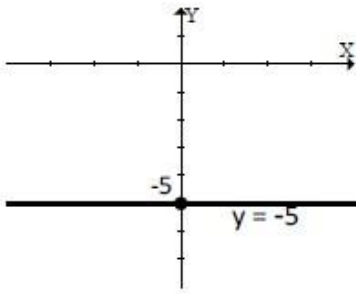
La pendiente es −3 y la ordenada en el origen 1

- *Funciones constantes*: Son del tipo $f(x) = n$.

La gráfica de estas funciones es la recta horizontal que pasa por el punto (0, n).

Por ejemplo: $f(x) = 1$, $f(x) = -5$ son funciones constantes.



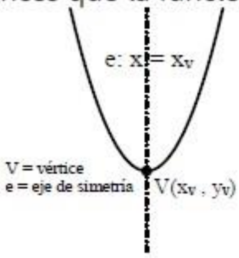


2.2.- FUNCIONES PARABÓLICAS

Las funciones cuadráticas son aquellas cuya fórmula viene dada por un polinomio de 2º grado.

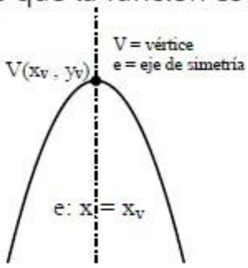
Estas funciones se expresan de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo $a \neq 0$ y su gráfica es una <u>parábola</u>.
Por ser una función polinómica, su dominio de definición es R.

Si $a > 0$, la parábola tiene las ramas hacía arriba. Decimos entonces que la función es <u>convexa</u>



El vértice V es un mínimo absoluto

Si $a < 0$, la parábola tiene las ramas hacía abajo. Decimos entonces que la función es <u>cóncava</u>



El vértice V es un máximo absoluto

El *<u>vértice</u>* de la parábola, $V(x_v, y_v)$, se calcula por las fórmulas:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \\ y_v = f(x_v) \end{array}}$$

2.3.- FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Son aquellas del tipo $f(x) = \dfrac{k}{x}$, siendo $k \neq 0$. En estas funciones, $D(f) = R - \{ 0 \}$

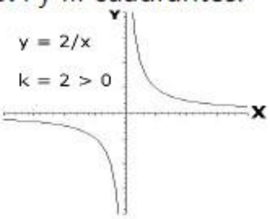
La gráfica de este tipo de funciones es una hipérbola de <u>asíntotas</u> los ejes de coordenadas.

Las asíntotas son rectas hacía las que tiende a acercarse la gráfica de la función sin llegar a tocarlas.

Si $k > 0$, la función es decreciente y la gráfica es una hipérbola situada en el I y III cuadrantes.

<u>Ejemplo</u>:

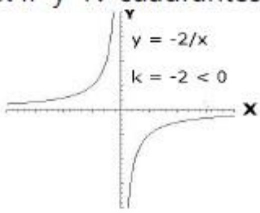
x	$y = \frac{2}{x}$
1	2
1/2	4
– 1	– 2
– 1/2	– 4



Si $k < 0$, la función es creciente y la gráfica es una hipérbola situada en el II y IV cuadrantes.

<u>Ejemplo</u>:

x	$y = \frac{-2}{x}$
1	– 2
1/2	– 4
– 1	2
– 1/2	4



2.4.- FUNCIONES EXPONENCIALES DE BASE a

Son aquellas cuya fórmula es del tipo $f(x) = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$

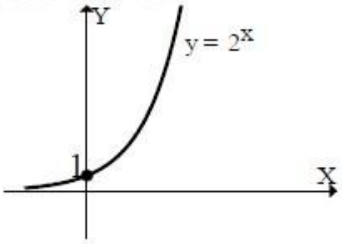
La gráfica de este tipo de funciones y que corta al eje Y en el punto (0,1) y tiene como asíntota horizontal al eje X.

En estas funciones, $D(f) = R$, $Im(f) = (0, \infty)$

Si a > 1 , es creciente.

Ejemplo:

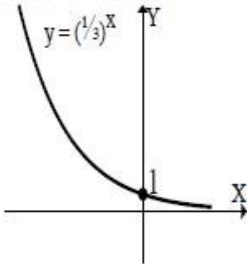
x	$y = 2^x$
0	1
1	2
– 1	0,5



Si a < 1 , es decreciente.

Ejemplo:

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$
0	1
1	0,3
– 1	3



Como puedes ver, la gráfica de estas funciones no corta al eje X

La función exponencial más importante en matemáticas es la de base el número "e":

$$f(x) = e^x \quad \text{, siendo } e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828.... \text{ número irracional.}$$

2.5.- FUNCIONES LOGARÍTMICAS DE BASE a

Su fórmula es del tipo $y = \log_a (x)$ [logaritmo en base a de x] , con a > 0, a ≠ 1. En estas funciones D(f) = (0, ∞)

Recuerda: $y = \log_a (x) \Leftrightarrow a^y = x$

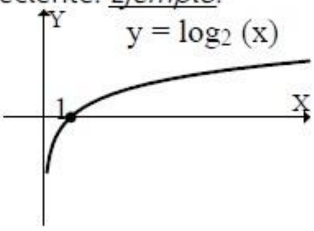
Si la base es 10, entonces $\log_{10} (x)$ se escribe simplemente log (x) y se llama logaritmo decimal de x

Si la base es el número "e", entonces $\log_e (x)$ se escribe simplemente ln (x) ó L (x) y se llama logaritmo neperiano o logaritmo natural de x

La gráfica de la función logarítmica de base a es una curva que corta al eje X en el punto (1, 0) y tiene como asíntota vertical al eje Y.

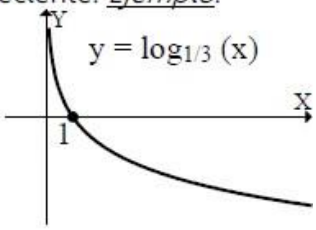
Si a > 1 , es creciente. *Ejemplo*:

x	$y = \log_2 (x)$
1	0
2	1
1/2	– 1



Si a < 1 , es decreciente. *Ejemplo*:

x	$y = \log_{1/3} (x)$
1	0
1/3	1
3	– 1



La función logarítmica más importante es la función logaritmo neperiano: f(x) = ln(x)

2.5.- FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Son aquellas cuya fórmula está formada por dos o más expresiones, cada una definida en un intervalo diferente. Por ejemplo, $y = \begin{cases} x-3 \text{ , si } x < 4 \\ -x \text{ , si } x \geq 4 \end{cases}$ es una función definida en dos intervalos: