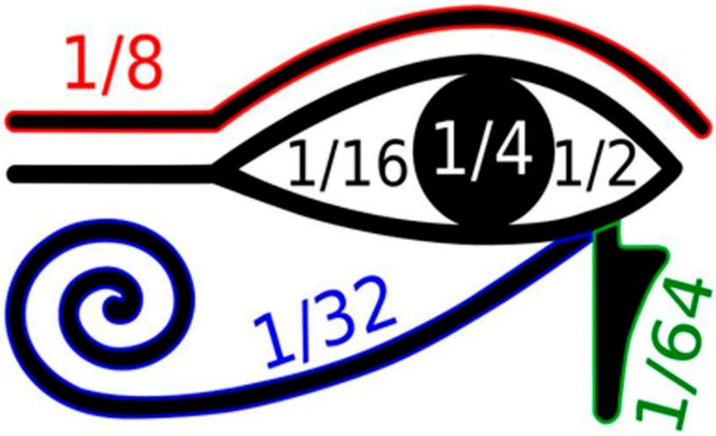
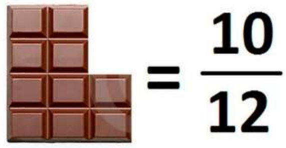
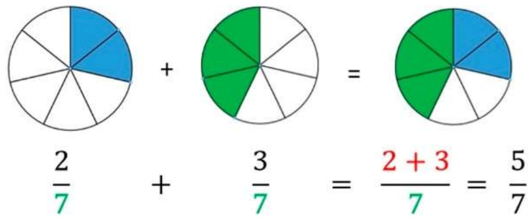
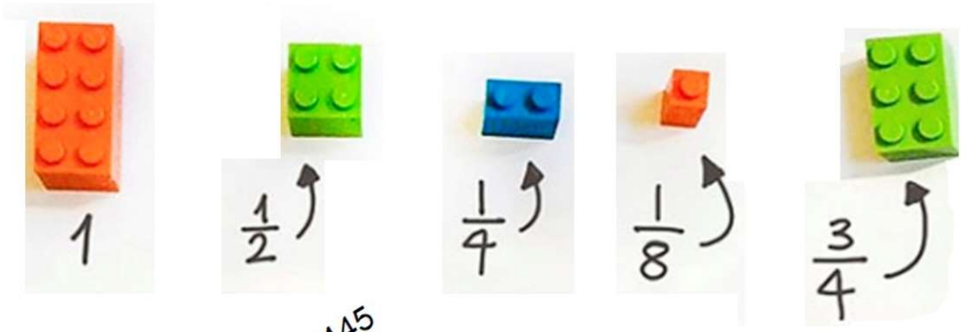
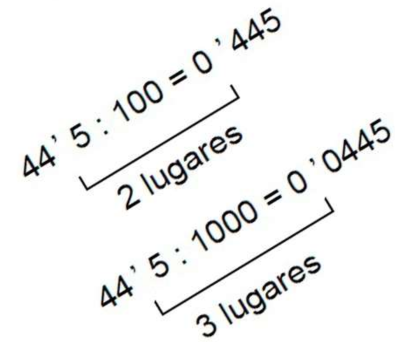
UNIDAD 3:
FRACCIONES Y DECIMALES

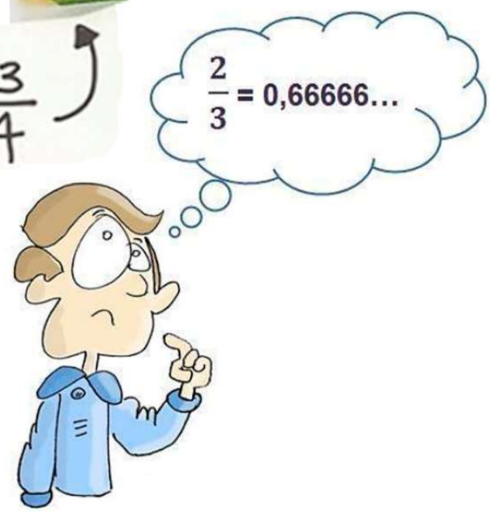












CONTENIDOS:

1) Concepto de fracción. Fracciones equivalentes. Amplificación y simplificación. Fracción irreducible. Comparación de fracciones. Representación y ordenación.

2) Relación entre fracciones y decimales.

- **Expresión decimal de una fracción: enteros, decimales exactos y periódicos.**
- **Expresión fraccionaria de un entero o decimal.**

3) Números decimales. Representación en la recta real, ordenación y operaciones. Cálculo mental, aproximado, con calculadora y ordenador. Aproximación: truncamiento y redondeo.

4) Fracciones en ámbitos cotidianos (horas, minutos, segundos, gramos, kilos, etc).

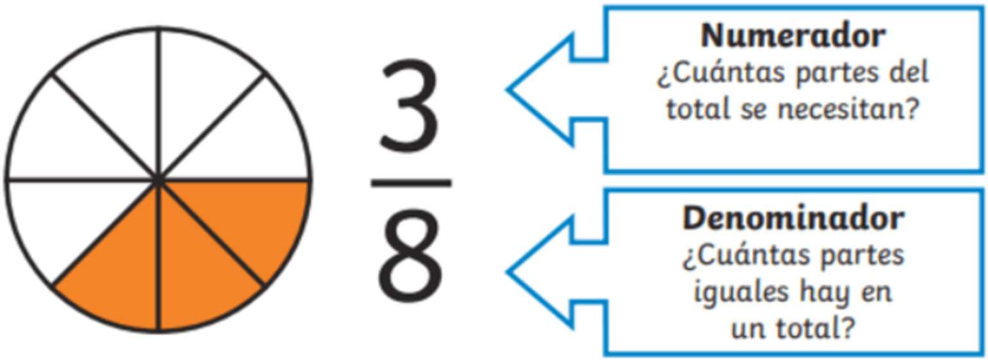
5) Operaciones con fracciones.

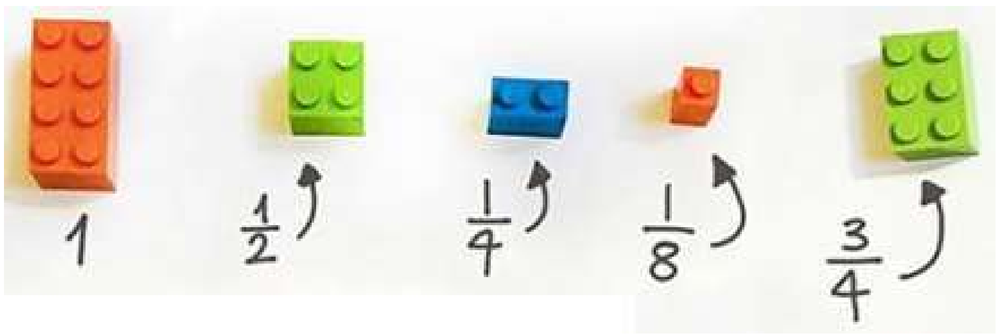
CONCEPTO DE FRACCIÓN:

Una fracción es una forma de **simbolizar una división**. Se presenta como un par de números enteros de la forma $\frac{a}{b}$, donde:

- "b" es el denominador → Indica el número de partes iguales en que dividimos una unidad.
- "a" es el numerador → Indica cuántas de esas partes cogemos.

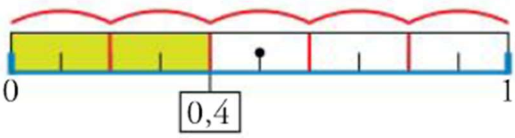
¡Ojo! No podemos dividir por cero, luego el número "b" no puede ser cero.



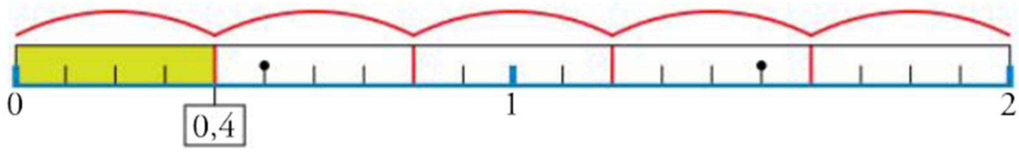


Las fracciones son **divisiones indicadas**. Fíjate en los ejemplos:

- $\frac{2}{5}$ → La unidad se divide en 5 partes y se toman 2.



- 2 : 5 → Dividimos dos unidades entre 5.

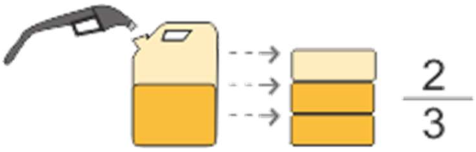


$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$

Una fracción equivale al cociente entre el numerador y el denominador.

Desde épocas remotas, para expresar partes de la unidad dividida, se han utilizado las fracciones: un pan y medio, dos terceras partes de la cosecha, la quinta parte de la herencia… Hoy en día también usamos fracciones a diario:

- ♣ Un depósito contiene 2/3 de gasolina. El TOTAL son 3/3 en este caso.

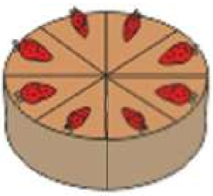


- ♣ Un tercio (1/3) de las patatas "chips" es grasa.
- ♣ El tren con destino a Madrid trae un retraso de tres cuartos de hora (3/4).
- ♣ El 1% de los españoles es celiaco. Significa que 1 de cada 100 (1/100) nacidos en España lo es.

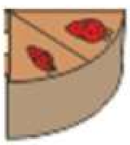
<u>FRACCIONES EQUIVALENTES. SIMPLIFICACIÓN Y AMPLIFICACIÓN</u>:

Imagina que tienes un pastel, lo divides en 8 partes IGUALES y te comes 2 partes.

❖ ¿Qué fracción representa el TOTAL de la tarta? → $\frac{8}{8}$



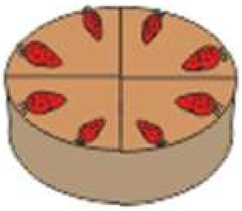
❖ ¿Qué fracción del pastel te has comido? → $\frac{2}{8}$



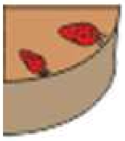
❖ ¿Qué fracción te quedaría? → $\frac{8}{8} - \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$

Piensa ahora en esta otra situación:

❖ Si lo divides en 4 partes iguales, ¿qué fracción representa el TOTAL?



❖ Si os comieseis 1 de las 4 partes → $\frac{1}{4}$

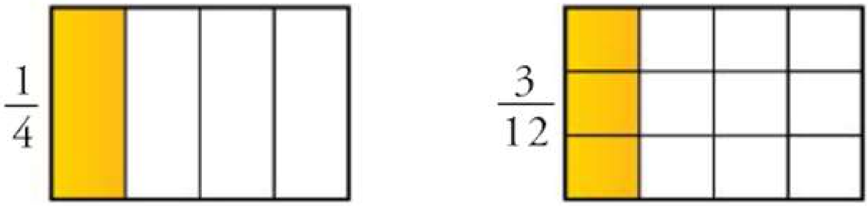


❖ ¿Qué fracción te quedaría? → $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

<u>¿EN QUÉ CASO QUEDA MÁS TARTA?</u> Es sencillo: LA MISMA (fíjate en los dibujos). Eso es porque 6/8 y 3/4 son FRACCIONES EQUIVALENTES, es decir, son dos maneras de simbolizar la misma fracción.

Fíjate en este otro ejemplo:

Observa que las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$ expresan el mismo valor, aunque sus términos sean diferentes:

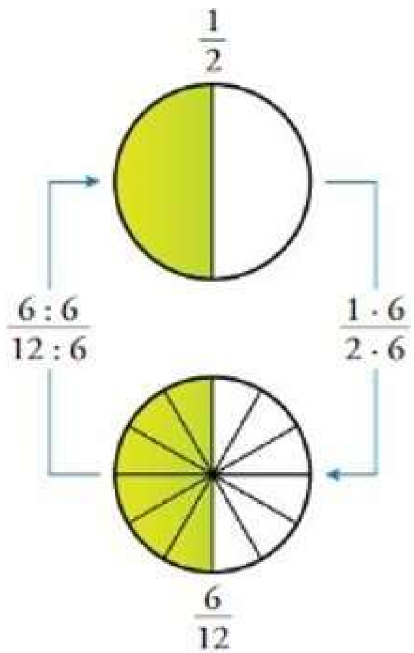


Las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$ son equivalentes.

Para obtener fracciones equivalentes multiplicaremos o dividiremos numerador y denominador por el mismo número. Esto es lo que denominamos respectivamente **amplificar y simplificar** una fracción. Un proceso es inverso del otro.

$$\frac{6}{12} = \frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2}$$

(Simplificación)



$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12}$$

(Amplificación)

SIMPLIFICAR una fracción es transformarla en la fracción equivalente más sencilla posible. Es importante que simplifiquemos SIEMPRE las fracciones. Los CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD serán útiles a la hora deagilizar cálculos.

Simplificaremos de varias formas la fracción: $\frac{780}{585}$

- Dividiendo sucesivamente numerador y denominador por un mismo número hasta que obtengamos dos números primos entre sí.

$$\frac{780}{585} \overset{\div \boxed{3}}{=} \frac{260}{195} \overset{\div \boxed{5}}{=} \frac{52}{39} \overset{\div \boxed{13}}{=} \frac{4}{3}$$

- Lo podemos hacer de una manera más eficiente calculando el M.C.D de numerador y denominador y dividiendo entre ese número.

M.C.D (780, 585) = 195

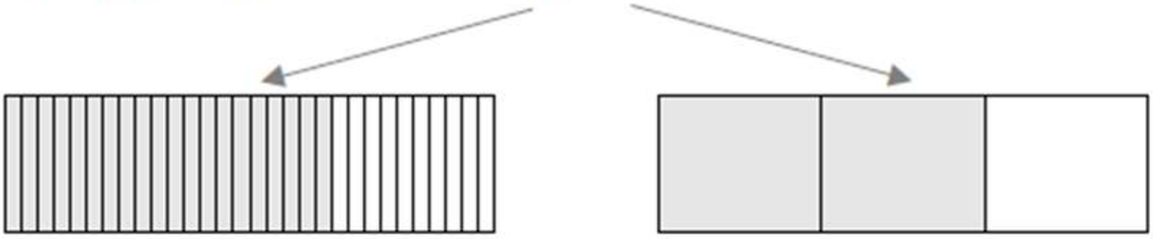
$$\frac{780}{585} = \frac{785 : 195}{585 : 195} = \frac{4}{3}$$

- Otra forma (aunque realmente es lo mismo que acabamos de hacer) sería factorizando numerador y denominador y simplificando):

$$\frac{780}{585} = \frac{2 \bullet 2 \bullet \cancel{3} \bullet \cancel{5} \bullet \cancel{13}}{3 \bullet \cancel{3} \bullet \cancel{5} \bullet \cancel{13}} = \frac{4}{3}$$

Fíjate en este otro ejemplo:

$$\frac{20}{30} = \frac{20:10}{30:10} = \frac{2}{3} \qquad \frac{20}{30} \text{ y } \frac{2}{3} \text{ son equivalentes}$$



Es importante que simplifiquemos SIEMPRE las fracciones, así trabajaremos con fracciones más sencillas.

Practicamos:

1. **Simplifica las siguientes fracciones.**

1) $\frac{12}{18} =$	6) $\frac{300}{360} =$	11) $\frac{105}{147} =$
2) $\frac{30}{72} =$	7) $\frac{15}{30} =$	12) $\frac{528}{240} =$
3) $\frac{48}{32} =$	8) $\frac{49}{21} =$	13) $\frac{780}{420} =$
4) $\frac{18}{42} =$	9) $\frac{80}{64} =$	14) $\frac{468}{252} =$

2. Contesta RAZONADAMENTE sirviéndote de algún ejemplo:

a) Si al numerador y al denominador de una fracción se les suma la misma cantidad, ¿se obtiene una fracción equivalente?

b) Si una fracción es equivalente a otra, y esta a su vez lo es de una tercera, ¿son equivalentes la primera y la tercera?

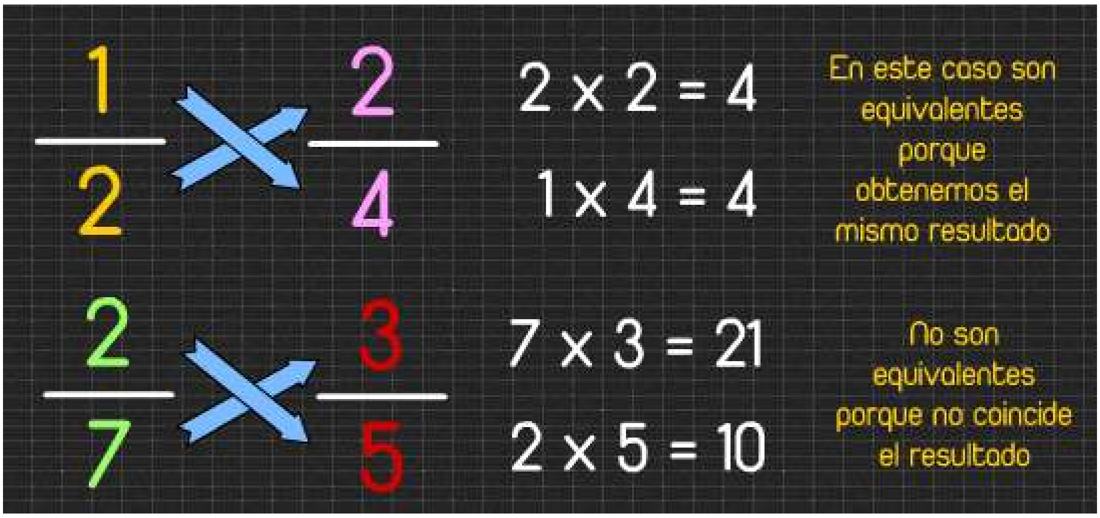
c) ¿Existe una fracción equivalente a tres cuartos cuyo denominador sea 10? Razona tu respuesta.

d) ¿Es cierto que el numerador y el denominador de una fracción tienen que ser primos para que la fracción sea irreducible?

<u>COMPARACIÓN DE FRACCIONES:</u>

Si tenemos dos fracciones y queremos comprobar que son equivalentes, podemos proceder de muchas formas. Algunas de ellas son:

- **Multiplicando en cruz.** Si el resultado es el mismo las fracciones son equivalentes.



- **Simplificando las fracciones:** si son equivalentes, al reducirlas al máximo (fracción irreductible), obtendremos la misma fracción.

$$\frac{10}{30} \overset{:2}{=} \frac{5}{15} \overset{:5}{=} \frac{1}{3} \qquad \frac{14}{42} \overset{:2}{=} \frac{7}{21} \overset{:7}{=} \frac{1}{3}$$

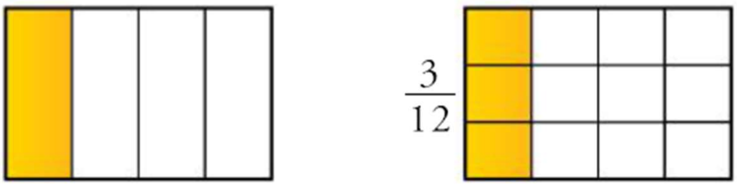
- **Calculando las divisiones:** Una fracción es una forma de representar una división. Dos fracciones serán equivalentes si el resultado ambas divisiones es el mismo. Por ejemplo: $\frac{10}{30} = \frac{14}{42}$

$$\begin{array}{l|l} 10 & 30 \\ \hline 100 & 0{,}33\ldots \\ \ \ 100 & \\ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ \ddots & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 14 & 42 \\ \hline 140 & 0{,}33\ldots \\ \ \ 140 & \\ \ \ \ \ 14 & \\ \ \ \ \ \ \ \ddots & \end{array}$$

Fíjate en el ejemplo que ya vimos antes:

Observa que las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$ expresan el mismo valor, aunque sus términos sean diferentes:

$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{12}$



$\underbrace{\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25}$ $\underbrace{\frac{3}{12} = 3 : 12 = 0{,}25}$

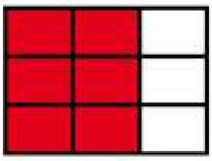
$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$ son equivalentes.

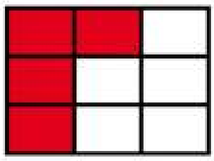
ORDENACIÓN DE FRACCIONES:

- Cuando dos o más fracciones tienen igual denominador es mayor la que tiene el numerador mayor.
- Cuando dos o más fracciones tienen igual numerador es mayor la que tiene el denominador menor.

Observa en cada pareja la fracción que representa la parte coloreada.



$\frac{6}{9}$



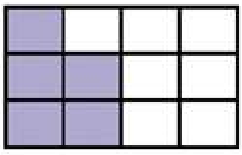
$\frac{4}{9}$

Tiene más parte coloreada la primera figura.

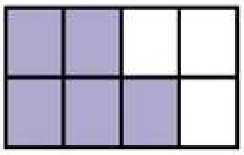
$$\frac{6}{9} > \frac{4}{9}$$

Fíjate:

- $9 = 9$ ▶ Los denominadores son iguales.
- $6 > 4$ ▶ Es mayor la fracción que tiene el numerador mayor.



$\frac{5}{12}$



$\frac{5}{8}$

Tiene más parte coloreada la segunda figura.

$$\frac{5}{8} > \frac{5}{12}$$

Fíjate:

- $5 = 5$ ▶ Los numeradores son iguales.
- $12 > 8$ ▶ Es mayor la fracción que tiene el denominador menor.

Para comparar y ordenar fracciones cuando no tengan el mismo denominador debemos reducirlas a común denominador.

Reducción de Fracciones a común denominador:

Reducir fracciones a común denominador consiste en transformarlas en otras equivalentes pero que tengan todas el mismo denominador.

Para ordenar las fracciones $\frac{13}{20}$, $\frac{11}{15}$ y $\frac{7}{10}$:

1.- Descomponemos los denominadores:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2.- Calculamos el mínimo común múltiplo:

$$\left.\begin{array}{l} 20 = 2^2 \cdot 5 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 10 = 2 \cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{m.c.m.}(20,15,10) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 =$$

3.- Amplificamos las fracciones:

$$\frac{13}{20} = \frac{39}{60}$$

x3

$$\frac{11}{15} = \frac{44}{60}$$

x4

$$\frac{7}{10} = \frac{42}{60}$$

x 6

4.- Ordenamos según sus numeradores:

$$\frac{39}{60} < \frac{42}{60} < \frac{44}{60}$$

$$\frac{13}{20} < \frac{7}{10} < \frac{11}{15}$$

Practicamos:

1. **Señala cuales de los siguientes pares de fracciones son equivalentes. Fíjate en los ejemplos:**

$\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{10}$	$\frac{5}{7}$ y $\frac{15}{21}$	$\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{20}$	$\frac{7}{12}$ y $\frac{4}{6}$
$1 \times 10 = 10$	$5 \times 21 = 105$	$2 \times 20 = 40$	$7 \times 6 = 42$
$3 \times 3 = 9$	$7 \times 15 = 105$	$5 \times 8 = 40$	$12 \times 4 = 48$
No equivalentes	Equivalentes	Equivalentes	No equivalentes

$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$	$\frac{5}{6} \bigcirc \frac{25}{30}$
$\frac{4}{21} \bigcirc \frac{1}{7}$	$\frac{9}{12} \bigcirc \frac{7}{23}$
$\frac{2}{7} \bigcirc \frac{8}{28}$	$\frac{6}{18} \bigcirc \frac{3}{36}$
$\frac{12}{20} \bigcirc \frac{3}{2}$	$\frac{4}{7} \bigcirc \frac{10}{70}$
$\frac{4}{9} \bigcirc \frac{20}{45}$	$\frac{7}{32} \bigcirc \frac{1}{8}$

2. **Ordena los siguientes grupos de fracciones:**

   a) **De Mayor a Menor:**

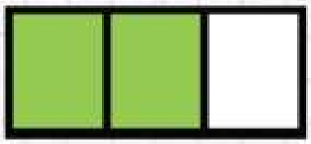
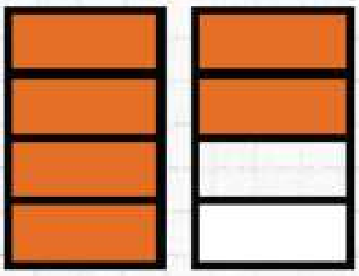
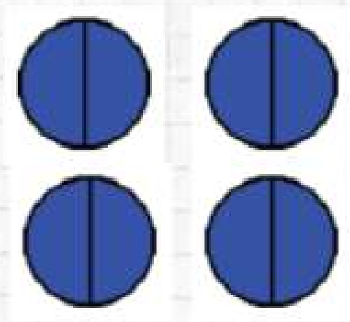
   $$\frac{2}{15}, \frac{110}{15}, \frac{15}{15}, \frac{13}{15}, \frac{9}{15}$$

   b) **De Menor a Mayor:**

   $$\frac{2}{5}, \frac{11}{12}, \frac{4}{6}, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}$$

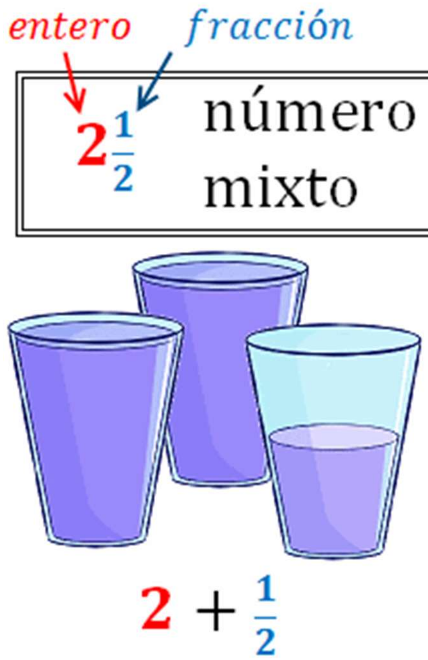
Tipos de Fracciones: Fracciones propias e impropias:

- **Fracción propia:** El numerador es menor que el denominador.
- **Fracción impropia:** El numerador es mayor al denominador. Representa a un número mayor que la unidad.
- **Fracciones aparentes:** Aquellas cuyo numerador es múltiplo del denominador. Se llaman "aparentes" porque realmente son números enteros.

FRACCIONES PROPIAS	FRACCIONES IMPROPIAS	FRACCIONES APARENTES
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{8}{2}$
		
El numerador (2) es menor que el denominador (3), la fracción representa un número ***menor*** que el entero.	El numerador (6) es mayor que el denominador (4), la fracción representa un número ***mayor*** que el entero.	El numerador (8) es mayor que el denominador (2), como en las fracciones impropias, pero en este caso el número que representa la fracción es ***igual*** a un entero.

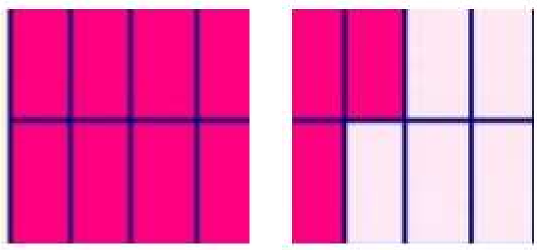
Fracciones impropias y números mixtos:

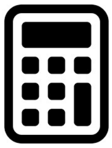
Las fracciones impropias se pueden expresar como **NÚMEROS MIXTOS.** Los números mixtos (o fracciones mixtas) son números formados por **la suma número entero y una fracción propia.** Fíjate en el siguiente ejemplo. La parte entera es 2 y la fraccionaria es ½. Lo más importante es que entiendas su significado.



Ejemplo: Fíjate en cómo se representa una fracción mixta $(\frac{11}{8})$ como parte de una unidad y se expresa en forma de número mixto.

$$\frac{11}{8} = \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = 1 + \frac{3}{8} = 1\frac{3}{8}$$





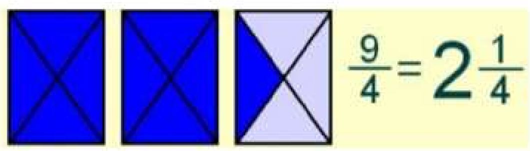
Ahora ya entiendes lo que significa cuando en tu calculadora aparece algo como esto. No es más que una forma de expresar un número mixto y, por tanto, una fracción impropia.

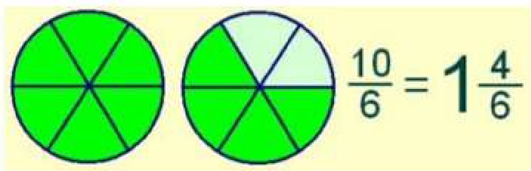
$$1 \lrcorner\ 3 \lrcorner\ 8 = 1\frac{3}{8} = 1 + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$$

Fíjate en estos otros ejemplos:

$$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{6}{6} + \frac{4}{6} = 1 + \frac{4}{6} = 1\frac{4}{6} = 1\frac{2}{3}$$





Practicamos: Representa las siguientes fracciones como partes de una unidad. Expresa como número mixto aquellas que sea posible.

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{8}{6}$$

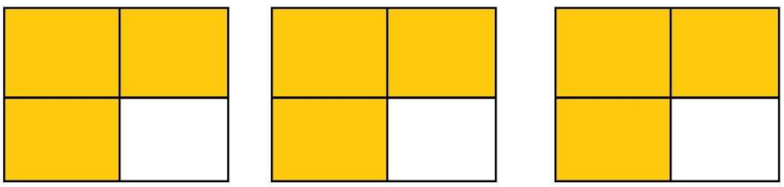
UN NUEVO CONJUNTO: LOS NÚMEROS RACIONALES (Q):

Si sumamos, restamos o multiplicamos números enteros siempre se obtiene otro número entero.

Si dividimos 8 entre 2 el resultado también es un número entero. Es decir, si repartimos 8 pasteles entre 2 personas le corresponden 4 pasteles a cada persona (y no sobra ninguno).

Pero, qué pasaría si quisiéramos repartir 3 pasteles entre 4 personas. ¿Podemos hacerlo? ¡¡Claro que si!! Pero el resultado de dividir 3 : 4 no es un número entero. **Existen muchas divisiones donde el resultado no es un número entero.**

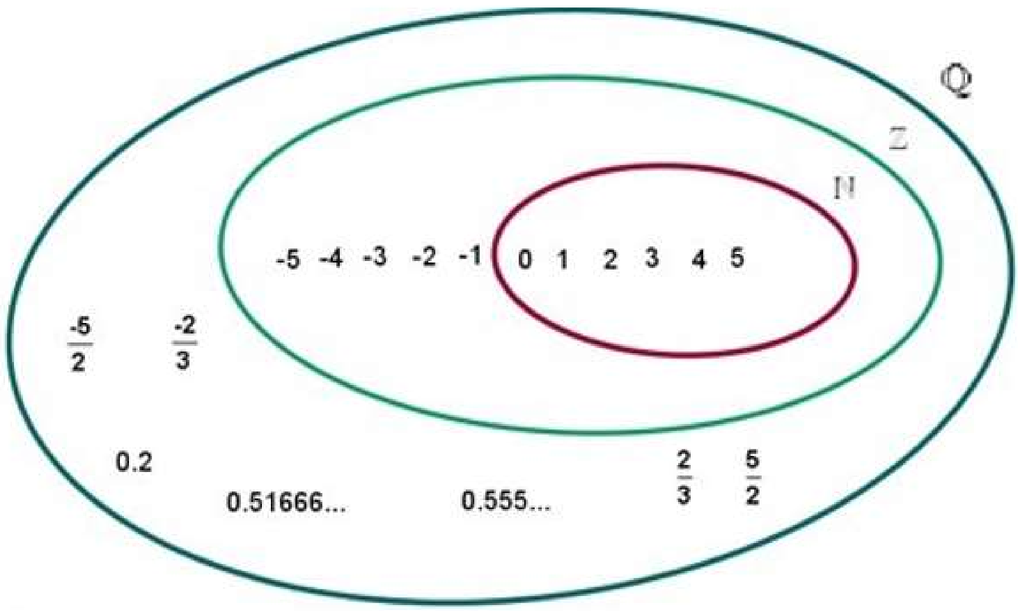
¿SABÍAS QUÉ? $3 : 4 = \frac{3}{4}$ → esto significa que repartimos cada pastel en 4 trozos iguales y a cada persona le damos 3 de esos trozos, es decir, le damos $\frac{3}{4}$ de pastel a cada persona.



Esto justifica la necesidad de un nuevo conjunto. Los **números racionales** son todos aquellos que pueden representarse como un cociente de dos números enteros, es decir, como una fracción:

$$\frac{a}{b} \qquad b \neq 0$$

El conjunto de los números racionales se denota por Q (la primera letra de cociente, *"quotient",* en varios idiomas). Los números naturales son un subconjunto dentro del de los enteros y el conjunto de los enteros es un subconjunto dentro del de los racionales. ¿Conoces las **muñecas rusas o Matrioshkas**? Es algo así, cada nuevo conjunto irá albergando en su interior a los anteriores. Estudiaremos más conjuntos durante los próximos cursos.



NÚMEROS DECIMALES. TIPOS DE DECIMALES:

Puesto que una fracción es una manera de representar un reparto en partes iguales y en matemáticas la operación que sirve para realizar este reparto es la división, si divido el numerador entre el denominador de una fracción obtendré el valor de dicha fracción. Podemos encontrarnos los siguientes casos:

1) **Decimal exacto:** La parte decimal de un número decimal exacto está compuesta por una cantidad finita de términos.

Ejemplo: $\frac{1}{4} = 0'25$

2) **Decimal periódico puro:** La parte decimal, llamada periodo, se repite infinitamente.

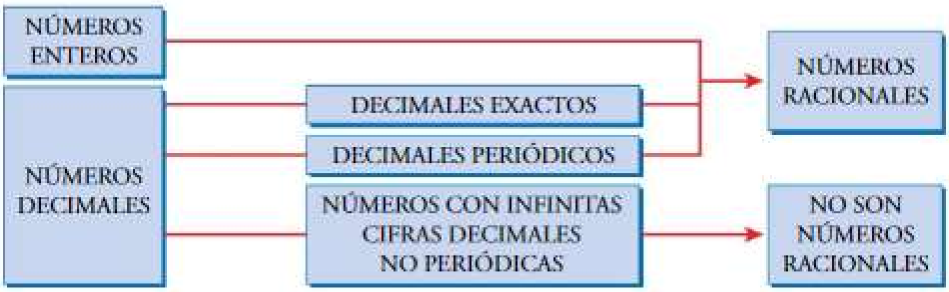
Ejemplo: $\frac{1}{3} = 0'33333\ldots = 0'\hat{3}$

3) **Decimal periódico mixto:** Su parte decimal está compuesta por una parte no periódica y una parte periódica que se repite infinitamente.

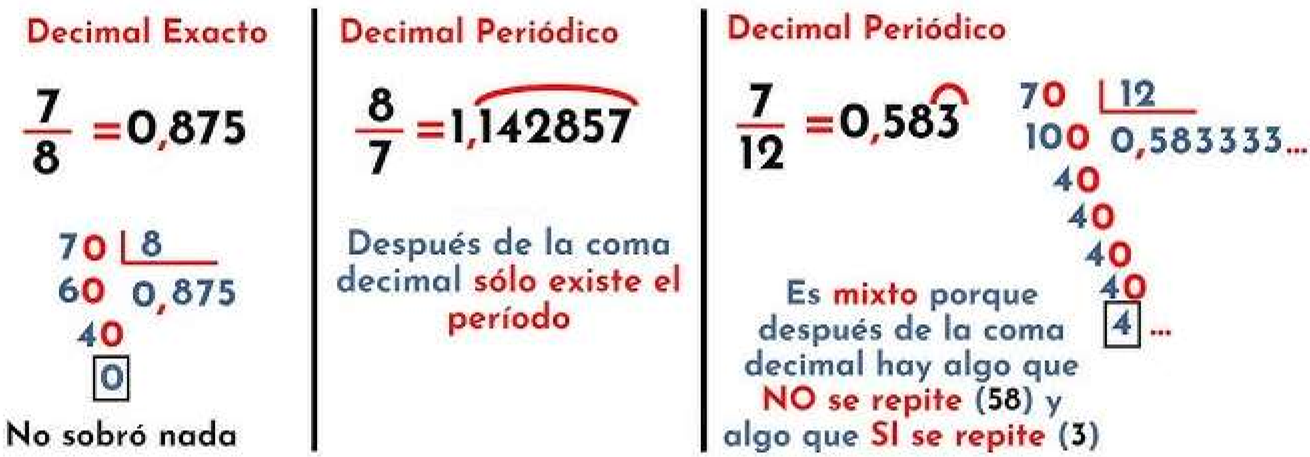
Ejemplo: $\frac{38}{15} = 2'533333\ldots = 2'5\hat{3}$

4) **Decimales no exactos y no periódicos:** Hay números decimales que tienen **infinitas cifras decimales no periódicas** como pueden ser las raíces no exactas o el número π. Son los que denominamos **números irracionales**.

Pi (π) es quizás el **número irracional** más famoso. Se han calculado más de un millón de decimales de π y sigue sin repetirse (3´14159265358…). Hay muchos otros números que quizás te suenen como el número "e" (número de Euler) y el número de oro o razón aurea, φ (phi), así como las raíces no exactas ($\sqrt{2} = 1´414213 \ldots$) que también son irracionales.



CUADRO RESUMEN:



Número decimal
- Exacto
  Ej. 5,21
- Periódico
  - Puro
    Ej. 5, 11111…
  - Mixto
    Ej. 5,211111…

Exacto y Periódico: Racional (Fracción)

- Infinitas cifras decimales no periódicas ⟹ Irracional (no se puede expresar en forma de fracción)
  Ej. $\sqrt{2}$ = 1´414213....
  π = 3´14159265...

Practicamos:

1. **Escribe y clasifica de que tipo es el número decimal correspondiente a estas fracciones:**

a) $\frac{22}{8}$ c) $\frac{55}{3}$ e) $\frac{16}{80}$

b) $\frac{9}{22}$ d) $\frac{200}{48}$ f) $\frac{21}{8}$

FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN NÚMERO DECIMAL:

Un decimal exacto o periódico puede expresarse en forma de fracción. Es lo que denominamos fracción generatriz. Para los decimales exactos es un proceso muy sencillo y para los periódicos usaremos un **algoritmo**. Un **algoritmo** es un conjunto de instrucciones o pasos que sirven para ejecutar una tarea. Ya conoces algoritmos, por ejemplo, el de la división.

✓ **Decimal Exacto:** Su obtención es muy simple. Dejamos en el numerador el número sin la coma y en el denominador pondremos la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

$$12´34 = \frac{1234}{100} = \frac{617}{50}$$

Simplificación de fracciones: Recordemos que debemos simplificar la fracción para trabajar siempre con la fracción más sencilla posible y así facilitar los cálculos.

✓ **Decimal Periódico Puro:**

Ejemplo: Queremos obtener la fracción generatriz de $3´\widehat{45}$. Observa el proceso:

1) Llamaremos N a este número. N = $3´\widehat{45}$ = 3´454545…

2) Multiplicamos N por 10, 100, 1000, etc con la intención de que un periodo pase de decimal a entero (en este caso será multiplicando por 100). Obtenemos el número 100N = $3´\widehat{45}$ = 345´4545…

3) Restamos ambas expresiones con la intención de que la parte decimal desaparezca.

4) Despejamos la N y obtenemos la fracción buscada (¡¡¡no te olvides de simplificar!!!).

$$\begin{array}{rcl} 100N & = & 345{\prime}454545\ldots \\ \underline{\quad - \; N} & \underline{=} & \underline{\quad 3{\prime}454545\ldots} \end{array}$$

99 N = 342

N = $\frac{342}{99} = \frac{38}{11}$

✓ **Decimal Periódico Mixto:** El proceso es similar al anterior solo que debemos multiplicar dos veces nuestro número N para que al restarlo desaparezca la parte decimal.

Ejemplo: Calculemos la fracción generatriz de 13´ $0\widehat{15}$.

1) Llamaremos N al número. N = 13´ $0\widehat{15}$ = 13´ 015151515…

2) Multiplicamos dos veces N por 10, 100, 1000, etc con la intención de que el anteperiodo primero y luego un periodo pasen de decimal a entero (en este caso será multiplicando por 10 para el anteperiodo y 1000 el periodo). Obtenemos los números:

10N = 130´ 15151515…

1000N = 13015´ 15151515…

3) Restamos ambas expresiones con la intención de que la parte decimal desaparezca.

4) Despejamos la N y obtenemos la fracción buscada (¡¡¡simplifícala!!!).

$$\begin{array}{r} 1000N = 13015'\,15151515\ldots \\ \underline{-\ 10N = \quad 130'\,15151515\ldots} \\ 990\ N = 12885 \end{array}$$

$$N = \frac{12885}{990} = \frac{859}{66}$$

Los decimales cuya expresión no es **ni exacta ni periódica** (números irracionales) no podremos expresarlos exactamente con una fracción, aunque si podremos obtener fracciones que aproximen su valor. No veremos ese proceso en este curso.

Practicamos:

1. Encuentra la fracción generatriz correspondiente a los siguientes números decimales:

a) 0, 95555… **c) 3,035** **e) 32,172**

b) 45,232323… **d) 7,2535353…** **f) 14,6666…**

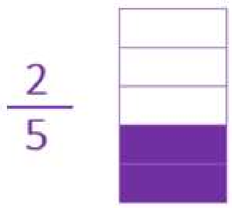
REPRESENTACIÓN Y ORDENACIÓN DE FRACCIONES:

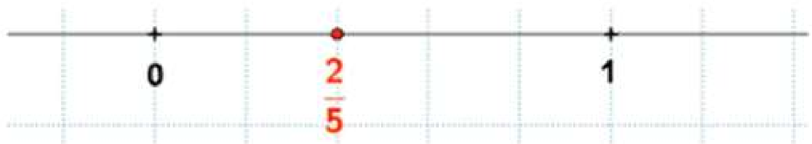
Las fracciones también pueden ser representadas en la recta numérica. Para hacerlo hemos de tener en cuenta el tipo de fracción:

- **Fracciones propias:** Las que tienen el numerador menor que el denominador (son mayores que 0 pero menores que 1).

$$0 < \frac{2}{5} < 1$$

Para representar $\frac{2}{5}$ dividiremos la unidad en 5 partes y tomaremos 2.



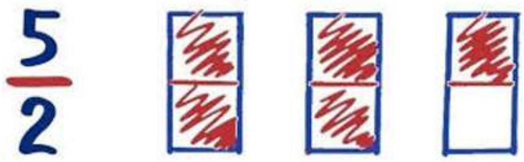


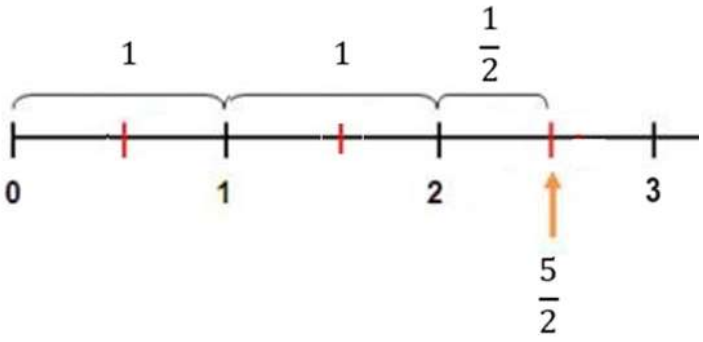
Observa que al hacer la división 2 : 5 = 0´4.

$$0 < \frac{2}{5} < 1$$

$$0 < 0´4 < 1$$

- **<u>Fracciones impropias:</u>** Tienen un valor mayor que 1. Para representarlas debemos descomponerlas como ya vimos.





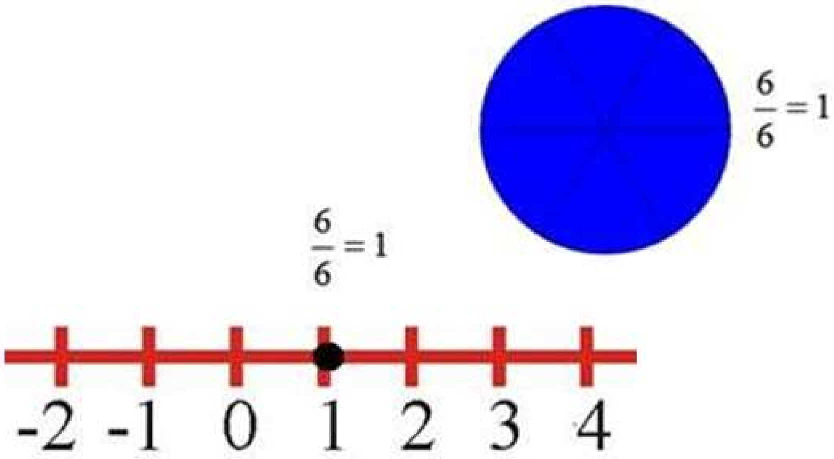
$$\frac{5}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

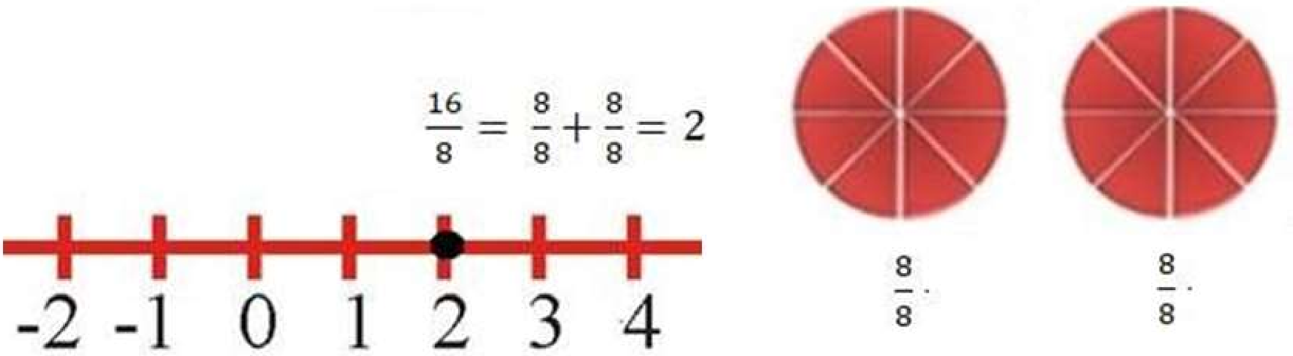
Observa que al hacer la división 5 : 2 = 2´5.

$$\frac{5}{2} > 1$$

2´5 > 1

- **Fracciones aparentes:** Si el numerador de una fracción es múltiplo del denominador, la fracción representa un número natural (o entero).





Practicamos:

1. Dalas las siguientes fracciones:

$$\frac{4}{3} \qquad \frac{3}{7} \qquad \frac{10}{5} \qquad \frac{12}{5} \qquad \frac{7}{6}$$

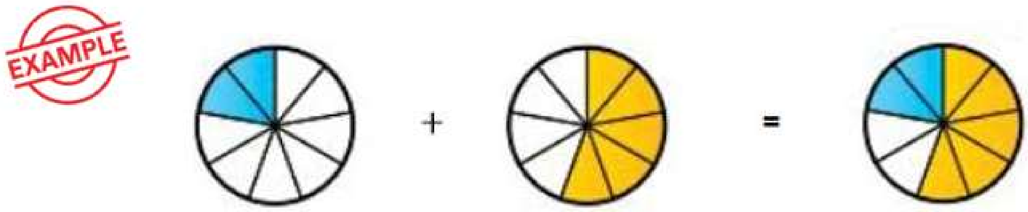
a) Represéntalas como partes de una unidad.

b) Exprésalas en forma de número mixto cuando sea posible.

c) Representa cada una en una recta numérica distinta.

OPERACIONES CON FRACCIONES: SUMA Y RESTA DE FRACCIONES:

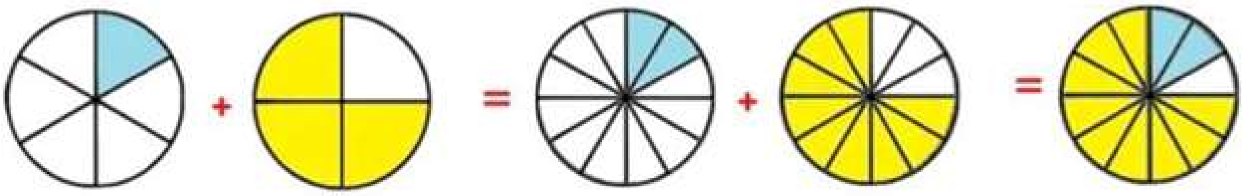
- **Con el mismo denominador:** La suma o resta de fracciones con igual denominador es otra fracción que tiene por numerador la suma o resta de los numeradores, y por denominador ese mismo denominador.



$\frac{2}{9}$ $\qquad$ $\frac{5}{9}$ $\qquad$ $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+5}{9}=\frac{7}{9}$

- **Con distinto denominador:** Se deben reducir a común denominador.

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}=\frac{2+9}{12}=\frac{11}{12}$$



$$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}=\frac{2+9}{12}=\frac{11}{12}$$

REPASAMOS: Reducción de fracciones a común denominador:

Comparar, sumar y restar fracciones es muy sencillo cuando todas tienen el mismo denominador. Cuando no lo tienen, las sustituimos por otras equivalentes con igual denominador. Veámoslo con el siguiente ejemplo:

Reducir a común denominador $\frac{5}{6}, \frac{4}{9}$ ***y*** $\frac{7}{12}$.

- Calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores.

  mín.c.m. (6, 9, 12) = 36 → El denominador común será 36.

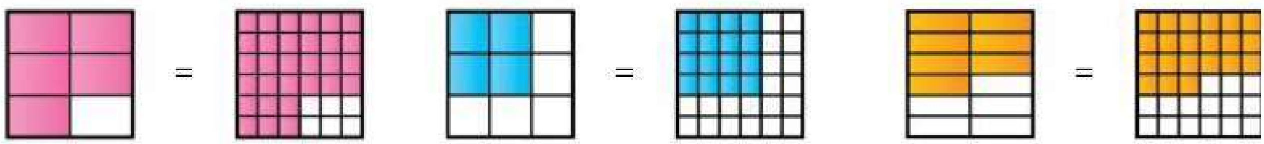
- Transforma cada fracción en otra equivalente con denominador 36.

  Divide 36 entre cada denominador, y multiplica en la fracción, arriba y abajo, por ese número:

$$36 : 6 = 6 \qquad 36 : 9 = 4 \qquad 36 : 12 = 3$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{30}{36} \qquad \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{16}{36} \qquad \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{21}{36}$$

  Has obtenido tres fracciones, equivalentes a las primitivas, todas con el denominador 36.



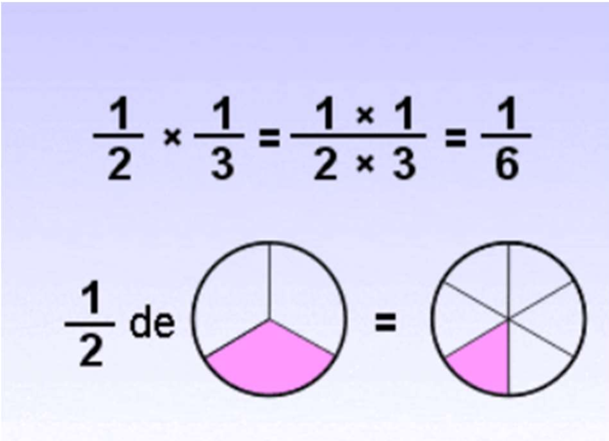
$\frac{5}{6}$ $\frac{30}{36}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{16}{36}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{21}{36}$

<u>OPERACIONES CON FRACCIONES: MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES:</u>

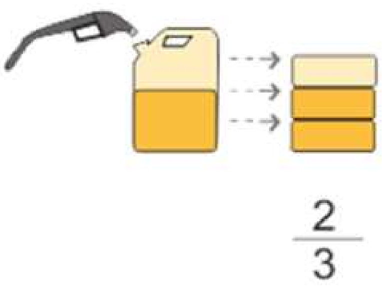
- **¿Cómo se hace?** Las fracciones se multiplican "en línea", es decir, numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3} = \frac{1 \bullet 1}{2 \bullet 3} = \frac{1}{6}$$

- **¿Qué significa?** Significa que de 1/3 de algo tomo una mitad (1/2).



<u>Fracción de una cantidad:</u> Si sabemos que en un bidón de gasolina entran 3300 L y está lleno en sus 2/3, ¿qué cantidad de gasolina hay en el bidón? Pues muy sencillo, para obtener la fracción de un número cualquiera, multiplico la fracción por el número en cuestión.



Tenemos 2/3 de 3300L y se calcula:

$$\frac{2}{3} \bullet 3300 = \frac{2 \bullet 3300}{3} = 2.200L$$

OPERACIONES CON FRACCIONES: DIVISIÓN DE FRACCIONES:

- **¿Cómo se hace?** Multiplicamos sus términos **"en cruz"** o lo que es lo mismo: se multiplica una fracción por la inversa de la otra.

$$\frac{3}{2} : \frac{5}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

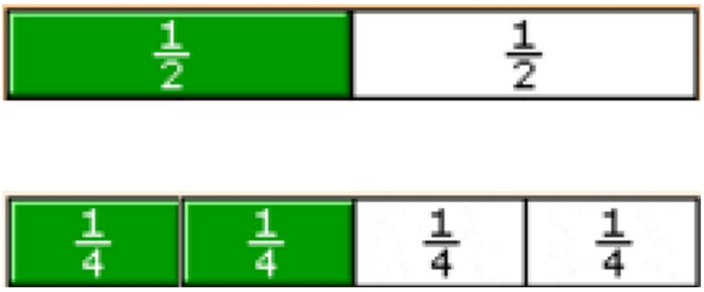
EXAMPLE

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1 \bullet 4}{2 \bullet 1} = \frac{4}{2} = 2$$

O bien:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \bullet \frac{4}{1} = \frac{1 \bullet 4}{2 \bullet 1} = \frac{4}{2} = 2$$

- **¿Qué significa?** Significa que divido 1/2 de algo en partes de 1/4. Estás cogiendo, por tanto, dos partes.



POTENCIAS DE NÚMEROS FRACCIONARIOS:

La potencia de una fracción se calcula igual que una potencia de un número entero:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

Al operar con potencias de fracciones, las propiedades son las mismas que estudiamos para números enteros.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

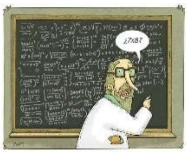
$$\left(\frac{7}{2}\right)^5 : \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^{5-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^3$$

$$\left[\left(\frac{2}{11}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{2}{11}\right)^{3 \cdot 2} = \left(\frac{2}{11}\right)^6$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^0 = 1$$

Potencias fraccionarias con exponente negativo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$



Demostración:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{3} : \left(\frac{3}{5}\right)^{6} = \frac{3^3}{5^3} : \frac{3^6}{5^6} = \frac{3^3 \bullet 5^6}{5^3 \bullet 3^6} = \frac{5^3}{3^3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3}$$

Por tanto:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{3} : \left(\frac{3}{5}\right)^{6} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3}$$

Practicamos:

1. Reduce usando las propiedades de las potencias y después calcula como en el ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$$

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

b) $\left(\frac{7}{2}\right)^{7} : \left(\frac{7}{2}\right)^{5}$

c) $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

d) $\left(\frac{1}{10}\right)^{10} : \left(\frac{1}{10}\right)^{4}$

e) $\left(\frac{9}{2}\right)^{3} : \frac{9}{2}$

f) $\left(\frac{-3}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{2}$

2. Reduce usando las propiedades de las potencias y después calcula:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^3$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^{-3}$

c) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^5\right]^3 : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^2$

d) $\left(\frac{2}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left[\left(\frac{2}{5}\right)^5 : \left(\frac{2}{5}\right)^4\right]$

f) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^3 : \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

h) $\left(\frac{7}{2}\right)^5 : \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^3$

i) $\left[\left(\frac{2}{11}\right)^3\right]^2$

j) $\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2$

k) $\left(\frac{x}{y}\right)^6 : \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^4$

3. Calcula:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **b)** $\left(\frac{1}{-2}\right)^{-2}$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ **e)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ **f)** $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$

4. Reduce:

a) $x^3 \cdot x^{-2}$ **b)** $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^4}$ **c)** $\left(\frac{1}{x}\right)^{-3} \cdot x^{-3}$

5. Reduce:

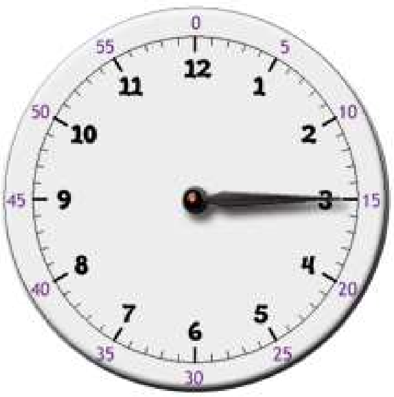
a) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} : x^{-1}$ **b)** $\left(\frac{z}{m}\right)^{-2} : m^3$ **c)** $a^5 : \left(\frac{a}{b}\right)^{-4}$

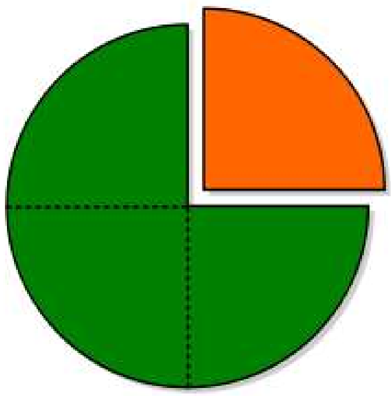
FRACCIONES EN ÁMBITOS COTIDIANOS:

En el día a día también utilizamos las fracciones a la hora de cuantificar el tiempo y el peso, por ejemplo. Decimos "llego media hora tarde"; "son las tres y cuarto"; y "póngame tres cuartos de kilo de manzanas".

- ✓ Cuando hablamos de "las 3 y cuarto" estamos hablando de las 3h 15min.

- ✓ Esos 15 min serían $\frac{15}{60}$ de la circunferencia y si simplificamos dicha fracción $\frac{15:15}{60:15} = \frac{1}{4}$ que equivalen a dividir en cuatro partes y tomar una.





Un error típico que a veces se comete es decir que 15min son 0´15h. El error está en que no nos estamos dando cuenta que el tiempo se mide según un **sistema sexagesimal** y, por tanto:

$$15\text{ min} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 0´25\text{h}.$$

Practicamos:

1. ¿Qué parte del día ha transcurrido a las ocho en punto de la mañana? ¿Y a las ocho en punto de la tarde? Responde con fracciones irreducibles.

REPASO: OPERACIONES CON DECIMALES:

Repasaremos las operaciones con decimales haciendo algunas operaciones combinadas:

a) 12´35 + 7´65 - (8´9 + 5´45) = 20 – 14´35 = 5´65

$$\begin{array}{r} 12{,}35 \\ +\ 7{,}65 \\ \hline 20{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8{,}90 \\ +\ 5{,}45 \\ \hline 14{,}35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20{,}00 \\ -\ 14{,}35 \\ \hline 5{,}65 \end{array}$$

Para sumar o restar números decimales:

- Se colocan en columna haciendo corresponder las comas.
- Se suman (o se restan) unidades con unidades, décimas con décimas, etc.

Todo lo que se dijo sobre los números negativos en las operaciones con enteros sirve también para las operaciones con decimales.

b) 3´25 • 2´5 + 15 : 4 = 8´125 + 3´75 = 11´875

$$\begin{array}{r l} 3{,}\ 2\ 5 & \leftarrow \text{2 cifras decimales} \\ \times\ 2{,}\ 5 & \leftarrow \text{1 cifra decimal} \\ \hline 1\ 6\ 2\ 5 & \quad\downarrow \\ 6\ 5\ 0\ \ & \\ \hline 8{,}\ 1\ 2\ 5 & \leftarrow 2 + 1 = \text{3 cifras decimales} \end{array}$$

Para multiplicar números decimales:

- Se multiplican como si fueran enteros.
- Se coloca la coma en el producto, apartando tantas cifras decimales como las que reúnan entre todos los factores.

1 5 | 4 3 3	→	El cociente entero deja un resto de 3 unidades.

1 5, 0 | 4
  3 0   3,7
    2
	→	Transformamos las tres unidades del resto en 30 décimas y las dividimos entre 4. Por eso ponemos la coma en el cociente. Sobran 2 décimas.

1 5, 0 | 4
  3 0   3,75
    20
     0
	→	Continuamos la división transformando las 2 décimas en 20 centésimas.

c) 4 : 2´5 + 93´3 : 24´88 = 1´6 + 3´75 = 5´35

$$4 : 2{,}5 \quad \times 10 \quad \Downarrow \quad \times 10$$

```
40,0 |25
150   1,6
 00
```

$$93{,}3 : 24{,}88 \quad \times 100 \quad \Downarrow \quad \times 100$$

```
9330     |2488
18660     3,75
 12440
  0000
```

REPRESENTACIÓN Y ORDENACIÓN DE DECIMALES EN LA RECTA REAL.

Dados dos números decimales, es menor:

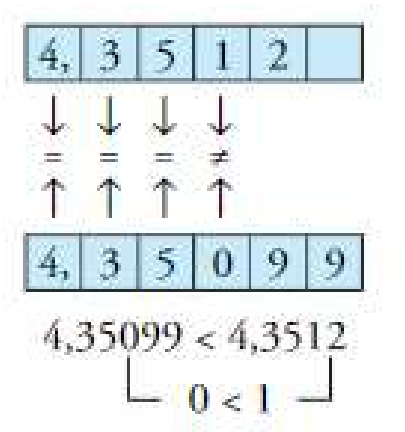
1. El que tenga menor la parte entera. Por tanto:

$$3.528 < 5.00001 \leq 7.36$$

2. Si tienen la misma parte entera, el que tenga la menor parte decimal.

$$3.00001 < 3.36 < 3.528$$

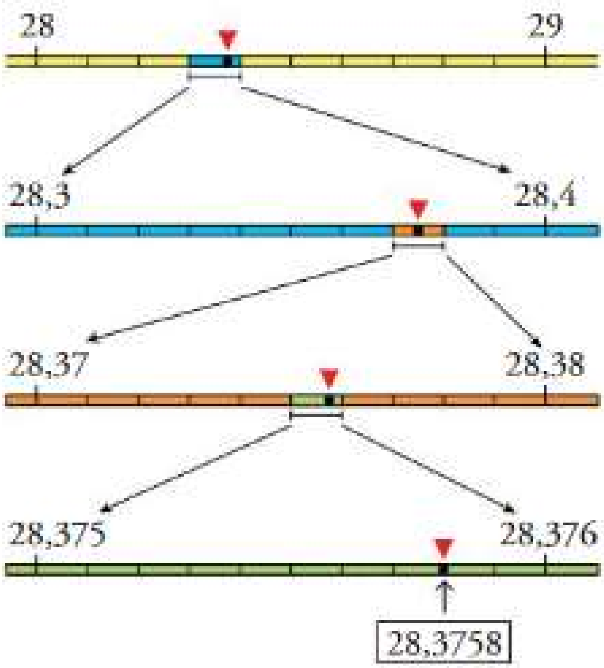
Por tanto, para comparar dos números decimales, contrastamos cifra a cifra los órdenes de unidades correspondientes, empezando por la izquierda.



Cada número decimal tiene su lugar en la recta numérica. Para representar las décimas dividimos la unidad en 10 partes.

Para representar las centésimas dividimos cada décima en 10 partes. Para representar las milésimas dividimos cada centésima en 10 partes, y así continuaríamos para las diez milésimas, cien milésimas, etc.

No hay dos números decimales consecutivos, porque entre dos decimales siempre se pueden encontrar otros decimales (de hecho, infinitos decimales).



Para comparar números decimales, contrastamos cifra a cifra los órdenes de unidades correspondientes, empezando por la izquierda.

Ordena de menor a mayor los siguientes números decimales:

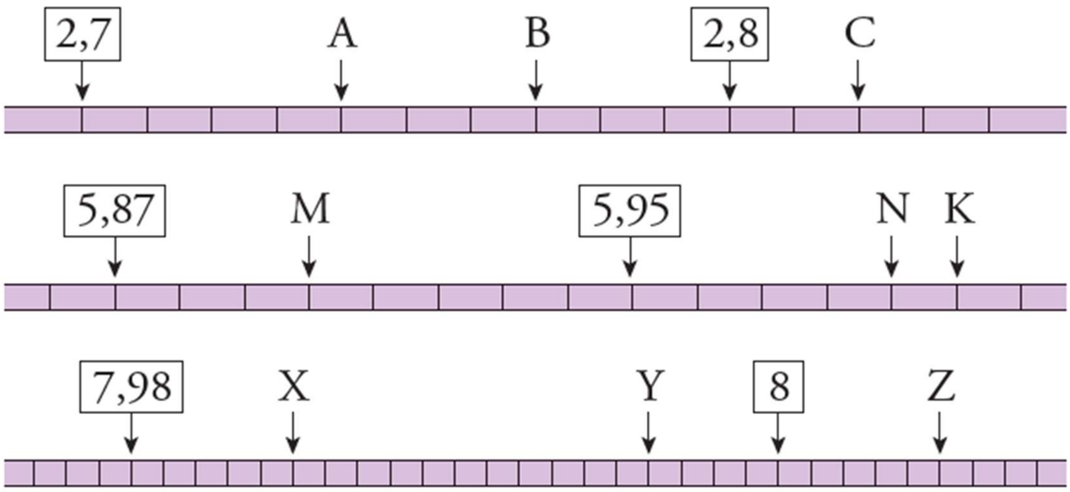
13´203   12´24   12´303   3´501   13´02   123´189   13´023

Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades	´	Décimas	Centésimas	Milésimas
		1	3	´	0	2	
		1	3	´	0	2	3
		1	2	´	2	4	
	1	2	3	´	1	8	9
		1	3	´	2	0	3
			3	´	5	0	1
		1	2	´	3	0	3

SOLUCIÓN: 3´501 < 12´24 < 12´303 < 13´02 < 13´023 < 13´203 < 123´189

Practicamos:

1. Escribe el número asociado a cada letra:



2. Dibuja una recta numérica y representa en ella los siguientes números:

A = 8,7 B = 9 C = 9,4 D = 10

3. Dibuja una recta numérica y representa en ella los siguientes números:

M = - 0,02 N = 0,07 K = 0,1 H = 0,15

4. Ordena de mayor a menor los siguientes números decimales:

a) 0,24; 81,5; –3,43; 0,5; 0,25; –1,72; 3,45; 3,456 y 2,89.

b) –1,345; 1,453; –3,415; 1,543; –1,435; 1,5; –1,6; 1,534 y 1,345

5. Ordena de menor a mayor en cada caso:

a) 7´4	6´9	7´09	7´11	5´88	7´12
b) 3´9	3´941	3´906	4´001	4´04	
c) 0´039	0´01	0´06	0´009	0´075	
d) -5’32	-5’032	-5’4,	-3’2	-0´22	-0´212

6. Intercala un número decimal entre:

a) 2,2 y 2,3

b) 4,01 y 4,02

c) 6,354 y 6,355

d) 1,59 y 1,6

e) 8 y 8,1

f) 5,1 y 5,101

CÁLCULO APROXIMADO: TRUNCADO Y REDONDEO:

En ocasiones, como resultado de los cálculos matemáticos, obtenemos números con excesivas cifras decimales (infinitas en algunos casos como ya hemos visto). Su manejo resulta engorroso y realmente aportan información poco significativa. En estos casos, sustituimos los resultados por otros más manejables de valor aproximado. Para obtener este valor aproximado podemos **TRUNCAR y REDONDEAR** el número en cuestión.

Para **truncar un número** se eliminan las cifras que están a la derecha de la unidad a la que queremos truncar. Por ejemplo, si queremos truncar por décimas significa que todas eliminaremos todas las cifras posteriores a las décimas (centésimas, milésimas…).

EXAMPLE Truncamos 2´38515 a la décima, centésima y milésima.

- A la décima →2´3
- A la centésima →2´38
- A la milésima →2´385

El **redondeo** consiste en suprimir las cifras decimales a partir de un determinado orden de unidades, sumando uno a la última cifra resultante cuando la primera cifra suprimida es 5 o mayor que 5 y dejándola tal cual está si es menor de 5.

Redondeamos 2´38515 a la décima, centésima y milésima:

- A la décima → 2,4
- A la centésima → 2,39
- A la milésima → 2,385

La idea es muy sencilla, si yo quiero redondear 2´38515 a las décimas:

✓ Lo primero que debo hacer es localizar entre qué décimas se encuentra, 2´3 y 2´4 en este caso.

✓ ¿De cual está más cerca? Teniendo en cuenta que la mitad lo marcaría el 2´35.

✓ Evidentemente 2´38515 se encuentra más cerca de 2´4 y efectivamente ese es su redondeo.

✓ El razonamiento es el mismo para cualquier aproximación.

$$2'3 < 2'38515 < 2'4 \quad \rightarrow \quad 2'38515 \approx 2'4$$

Como puedes ver con ambos procesos podemos obtener aproximaciones distintas y la elección de uno u otro dependerá de la precisión que necesitemos.

¿Pero si podemos redondear un número decimal qué sentido tiene calcular la fracción generatriz y trabajar con ella?

- Papá, ¿eres bueno en matemáticas?
- Sí, claro... Además las matemáticas no son tan importantes.
- Si corto 1 tarta en 3 trozos iguales, cada trozo es el 0´333 de la tarta, ¿correcto?
- Correcto.
- Pero al multiplicar 0´333 por 3 obtenemos 0´999, ¿dónde está el 0´001 que falta de la tarta?
- Evidentemente se ha quedado pegado al cuchillo.
- Gracias, papá. Tú sí que sabes.

Pensemos en la siguiente situación: “Sara, Luis y Andrea han jugado a medias un billete de lotería y les ha tocado un premio de 1 millón de euros. Luis (que es un listo) plantea que, como lo han jugado a medias, lo justo es que cada uno se lleve 1/3 del premio y por tanto les corresponde 1/3 de 1.000.000 a cada uno. Hasta aquí todo bien, ¿no? Luis asegura que 1/3 = 0´33333…. y redondeando a las décimas es 0´3 con lo cual con la siguiente operación pueden calcular lo que le corresponde a cada un@:

$$\frac{1}{3}\ de\ 1.000.000 = \frac{1}{3} \cdot 1.000.000 = 0´3 \ \cdot 1.000.000 = 300.000\ €$$

Por tanto, Luis entrega a Andrea y Sara 300.000€ a cada una. ¿Estás de acuerdo con Luis? ¿Cuál crees que es el problema de su *razonamiento*?”

Lo que plantea matemáticamente no es incorrecto, pero si inexacto. La fracción 1/3 da como resultado un decimal periódico puro (con infinitas cifras decimales) y si lo redondeo pierdo demasiada precisión en los cálculos. Vamos a decirle a Luis que trabajaremos con fracciones para este tipo de decimales y que el reparto será así:

$$\frac{1}{3}\ de\ 1.000.000 = \frac{1}{3} \cdot 1.000000 = \frac{1 \cdot 1000000}{3} = 333.333´3333\ldots$$

Si redondeamos a las centésimas ahora resultará 333.333´33 para cada un@. Comprobemos que 3 · 333.333´33 = 999.999´99. Ya le podemos decir a Luis que nos parece mejor este reparto y que se quede con el céntimo que falta hasta el millón.

Practicamos:

1. Aproxima los siguientes números como se indica en la tabla:

Número	Redondeo decimas	Redondeo centésimas	Truncado décimas	Truncado centésimas
1125´234				
14´527				
222´6228				
825´337				
$2´2\widehat{6}$				
$17´\widehat{37}$				
$0´\widehat{5}$				
$\frac{2}{3}$				

2. Observa los siguientes números decimales:

$1{,}292929\ldots$ $\quad 4{,}76\overset{\frown}{2}$ $\quad \pi = 3{,}14159265\ldots$

$3{,}7$ $\quad 13{,}\overset{\frown}{8}$ $\quad 12{,}854$

$\sqrt{2} = 1{,}7320508\ldots$ $\quad 5{,}3888\ldots$

a) ¿Cuáles son decimales exactos?

b) ¿Cuáles son periódicos puros?

c) ¿Cuáles son periódicos mixtos?

d) ¿Cuáles no son ni exactos ni periódicos?

e) Redondea a las unidades los anteriores números decimales.

3. Expresa las siguientes fracciones como un número decimal y redondea a las décimas el resultado.

a) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{2}{7}$ g) $-\frac{11}{3}$

b) $-\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{3}$ h) $\frac{43}{62}$

c) $\frac{3}{9}$ f) $\frac{42}{105}$