1 Resuelve utilizando el método de reducción de Gauss, los siguientes sistemas:

a	b	c	d
$\begin{cases} x-y+3z=-4 \\ x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+4z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=7 \end{cases}$
Sol: (1, 2, -1)	**Sol: (0, 2, 0)**	**Sol:** $\begin{cases} x=1 \\ y=5-t \\ z=t \end{cases}$.	**Incompatible**

2 Aplicando el método de Gauss discute, en función de los valores del parámetro m, los stemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+mz=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+2z=m \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

ojo¡¡¡¡¡ El método de Gauss, se hace usando la notación matricial (tal y como hacemos en clase) , aunque aquí , está resuelto arrastrando las ecuaciones.

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+mz=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-3E1 \\ E3+2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ 3y+(m+2)z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+3E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ (m-10)z=0 \end{cases}$.

A partir de la tercera ecuación: $E3 \equiv (m-10)z=0$, puede deducirse:

- Si $m=10$, queda $E3 \equiv 0 \cdot z = 0 \to$ Esta ecuación se cumple para cualquier valor de z.

El sistema resultante es compatible indeterminado. Para hallar su solución puede hacerse $z=t$ y llevar ese valor a las demás ecuaciones.
Resulta:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+t=2 \\ -y-4t=-2 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t \\ y=2-4t \\ z=t \end{cases}.$$

- Si $m \neq 10$, de $E3 \equiv (m-10)z=0 \Rightarrow z=0 \to$ Observa que, despejando $z=\dfrac{0}{m-10}=0$.

El sistema resultante es compatible determinado. Para hallar su solución se sustituye $z=0$ en las demás ecuaciones, resultando:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+0=2 \\ -y-0=-2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}.$$

b) $\begin{cases} x-y+2z=m \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x-y+2z=m \\ 3y-3z=2-2m \\ 3y-3z=6-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x-y+2z=m \\ 3y-3z=2-2m \\ 0=4+m \end{cases}$.

La tercera ecuación: $E3 \equiv 0=4+m$, sólo tiene sentido si $m=-4$, resultando $0=0$. Se pierde una ecuación: el sistema será compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} x-y+2z=-4 \\ 3y-3z=10 \\ m=-4 \end{cases}$.

Su solución puede darse en función de alguna de las incógnitas. Así, si se hace $z=t$, el sistema queda $\begin{cases} x-y+2t=-4 \\ 3y-3t=10 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4+y-2t \\ y=10/3+t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2/3-t \\ y=10/3+t \\ z=t \end{cases}$.

Como se ha dicho, para $m \neq -4$, el sistema será incompatible.

a) $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ 3x + my + 4z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \\ 2x + my + 4z = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ 3x + my + 4z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 - 3E1 \end{matrix} \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ my + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 - E2 \end{matrix} \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ (m-1)y = -2 \end{cases}.$

A partir de la tercera ecuación: $E3 \equiv (m-1)y = -2$, puede deducirse:

- Si $m = 1$, queda $E3 \equiv 0 \cdot y = -2 \rightarrow$ Esta ecuación es absurda. El sistema resultante es incompatible.
- Si $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Observa que de $E3 \equiv (m-1)y = -2$, despejando $\Rightarrow y = \frac{-2}{m-1}$.

El valor de las demás incógnitas se halla sustituyendo:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ y = -2/(m-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \rightarrow x = 1 - z \rightarrow x = 1 - \frac{2m}{m-1} = \frac{-m-1}{m-1} \\ z = 2 - y \rightarrow z = 2 + \frac{2}{m-1} = \frac{2m}{m-1} \\ y = -\frac{2}{m-1} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \\ 2x + my + 4z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 - 2E1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2. \\ my = 1 \end{cases}$

A partir de la tercera ecuación: $E3 \equiv my = 1$, puede deducirse:

- Si $m = 0$, queda $E3 \equiv 0 \cdot y = 1 \rightarrow$ La ecuación es absurda. El sistema resultante es incompatible.
- Si $m \neq 0$, el sistema es compatible determinado. Observa que de $E3 \equiv my = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{m}$.

El valor de las demás incógnitas se halla sustituyendo:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \\ my = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \rightarrow x = 1 - 2z \rightarrow x = 1 - \frac{4m-2}{m} = \frac{-3m+2}{m} \\ z = 2 - y \rightarrow z = 2 - \frac{1}{m} = \frac{2m-1}{m} \\ y = \frac{1}{m} \end{cases}$$

3 Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible

a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 7 \end{cases}$

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \times(-1) \underset{F_2 - 1 \cdot F_1 \rightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \times(-3) \underset{F_3 - 3 \cdot F_1 \rightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \end{array}\right) \times(-1)$$

$$\underset{F_3 - 1 \cdot F_2 \rightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = -10 \end{cases} \quad (1)$$

- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:
  $-2x_2 = -10 + 2x_3$
  $\boldsymbol{x_2 = 5 - x_3}$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:
  $x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - (5 - x_3) - x_3 = 1$

La respuesta:

$x_1 = 1$
$x_2 = 5 - x_3$
$x_3 = x_3$

$$\boxed{S = \{(1, 5 - z, z) / z \in \mathbb{R}\}}$$

b)

Transformar la matriz aumentada del sistema em uma matriz en forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \times(-1) \underset{F_2-1\cdot F_1\to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \times(-3) \underset{F_3-3\cdot F_1\to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -2 & -2 & -11 \end{array}\right) \times(-1)$$

$$\underset{F_3-1\cdot F_2\to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2\cdot x_2 - 2\cdot x_3 = -10 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

No existe solución.

4 Expresa en la forma matricial $AX = B$ el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2y = 1 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$.

Resuélvelo calculado la matriz inversa de A y despejando X.

Solución:

El sistema dado es equivalente a $\begin{cases} x-6y=3 \\ x-3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La matriz A es invertible, pues $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3$.

Su inversa es: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La solución de la ecuación $AX = B$ es $X = A^{-1}B$.

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1;\ y = -\frac{1}{3}.$$

5 Resuelve el sistema $(AB)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(AB)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 4z = 2 \\ -3x - 8y - 10z = 5 \\ 2x + 7y = 0 \end{cases}.$$

Transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} y - 4z = 2 \\ -3x - 8y - 10z = 5 \\ 2x + 7y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+8E1 \\ E3-7E1 \end{matrix}\begin{cases} y - 4z = 2 \\ -3x - 42z = 21 \\ 2x + 28z = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2/(-3) \\ E3/2 \end{matrix}\begin{cases} y - 4z = 2 \\ x + 14z = -7 \\ x + 14z = -7 \end{cases}.$$

Como aparecen dos ecuaciones repetidas, el sistema es compatible indeterminado, equivalente a: $\begin{cases} y - 4z = 2 \\ x + 14z = -7 \end{cases}$.

Haciendo $z = t$ se obtiene la solución: $\begin{cases} x = -7 - 14t \\ y = 2 + 4t \\ z = t \end{cases}$.

6 Dado el sistema $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x-4y-2z=-3 \end{cases}$

a) Exprésalo en forma matricial. Resuélvelo.
b) Añade una ecuación lineal al sistema de modo que el sistema resultante sea incompatible

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ expresión matricial del sistema.

Solución :
Sistema Compatible
Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 & -3 \end{array}\right) \times(-3) \underset{F_2-3\cdot F_1 \to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -1\cdot x_2 - 5\cdot x_3 = -6 \end{cases} \quad (1)$$

- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:
  $-x_2=-6+5x_3$
  $\boldsymbol{x_2=6-5x_3}$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:
  $x_1=1+x_2-x_3=1+(6-5x_3)-x_3=7-6x_3$

La respuesta:

$x_1=7-6x_3$
$x_2=6-5x_3$
$x_3=x_3$

La solución general: $X=\begin{pmatrix} 7-6x_3 \\ 6-5x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

7 Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas, en función de los parámetros a y b

$$\left.\begin{array}{r} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=b \\ 2x-5y+az=-2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} ax+y=1 \\ x+az=0 \\ ay+z=b \end{array}\right\}$$

a) Intercambiamos las ecuaciones para tener de pivote 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & b \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{array}\right) \times(-3) \underset{F_2-3\cdot F_1 \to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & -13 & -1 & -3b+1 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{array}\right) \times(-2) \underset{F_3-2\cdot F_1 \to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & -13 & -1 & -3b+1 \\ 0 & -13 & a-2 & -2b-2 \end{array}\right) \times(-1)$$

$$\underset{F_3-1\cdot F_2 \to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & -13 & -1 & -3b+1 \\ 0 & 0 & a-1 & b-3 \end{array}\right)$$

→ **Si a ≠1 , sistema compatible determinado .(única solución=**
→ **Si a = 1, b = 3 , sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)**
→ **Si a = 1, b ≠3, sistema incompatible (no existe solución)**

b) Intercambiamos las ecuacones para tener de pivote 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & b \\ a & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \times(-a) \underset{F_3-a\cdot F_1 \to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & b \\ 0 & 1 & -a^2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & b \end{array}\right) \times(-a) \underset{F_3-a\cdot F_2 \to F_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & 1 \\ 0 & 0 & a^3+1 & -a+b \end{array}\right)$$

- **Si $a^3 + 1 \neq 0$, sistema compatible determinado .**
- **Si $a^3 + 1 = 0$ y $b - a \neq 0$, es decir , a = - 1 y $b \neq -1$, sistema incompatible .**
- **Si $a^3 + 1 = 0$ y $b - a = 0$, es decir, a = -1 y b = -1 , sistema compatible indeterminado**

8 Halla el valor de k para que el sistema $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+kz=0 \end{cases}$ tenga solución distinta de la trivial. Para dicho valor de k, calcula sus soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \times(-2) \underset{F_2-2\cdot F_1\to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \times(-1) \underset{F_3-1\cdot F_1\to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & k-1 & 0 \end{array}\right) \times\left(\frac{-2}{3}\right) \underset{F_3-\left(\frac{2}{3}\right)\cdot F_2\to F_3}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \end{array}\right)$$

- ✓ Si $k \neq -1$, sistema compatible determinado , solución única : la solución trivial (0,0,0).
- ✓ Si K = -1 , sistema compatible indterminado, infinitas soluciones :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3\cdot x_2 - 3\cdot x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$\equiv$

- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:
  $3x_2=3x_3$
  $\boldsymbol{x_2=x_3}$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:
  $x_1=x_2-x_3=x_3-x_3=0$

La respuesta:

$x_1=0$
$x_2=x_3 \quad (k=-1)$
$x_3=x_3$

La solución general: $X=\begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

9 Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$.

a) Halla sus soluciones.
b) Añade otra ecuación para que el sistema siga siendo homogéneo y tenga solución única.
c) Añade otra ecuación para que el sistema siga siendo compatible indeterminado.

a) Por tratarse de un sistema homogéneo es compatible. Como tiene 3 incógnitas y sólo 2 ecuaciones, será indeterminado. Calculamos su solución por Gauss.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$\equiv$

- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:
  $2x_2=-3x_3$
  $\boldsymbol{x_2=\frac{-3}{2}\cdot x_3}$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:
  $x_1=-x_2-x_3=-\left(\frac{-3}{2}\cdot x_3\right)-x_3=\frac{1}{2}\cdot x_3$

La respuesta:

$x_1=\frac{1}{2}\cdot x_3$
$x_2=\frac{-3}{2}\cdot x_3$
$x_3=x_3$

La solución general: $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot x_3 \\ \frac{-3}{2}\cdot x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

b) Debe añadirse una ecuación que no dependa de las dos dadas. Por ejemplo: x+ y =0.

Comprobamos que es C.D. viendo que el rango de la matriz de coeficientes es 3.

El sistema sería $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$; que por ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1-2=-1\neq 0$, solo tiene la solución trivial: $x=0; y=0; z=0$.

c) Debe añadirse una ecuación que dependa de las dos dadas, rg(A) = 2, es decir det(A) =0

Por ejemplo $E3 \equiv E2 - E1 \to y+2z=0$.
El sistema sería $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$; que por ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1-1=0$, es compatible indeterminado, y equivalente al dado.