UNIDAD 2: SISTEMAS DE ECUACIONES

1.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Def. - Se llama **ecuación lineal con n incógnitas** a toda ecuación polinómica de primer grado con n incógnitas.

Def. Llamamos **sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas** a todo conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Se expresa en la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

A lo largo de la unidad solo abordaremos el estudio de los sistemas lineales de ecuaciones, por lo que, frecuentemente nos referiremos a ellos como sistemas de ecuaciones, sin decir lineales y suponiendo que lo son.

Def. Dado un sistema lineal como (1), llamamos **solución del sistema** a toda n-upla de números reales que satisfagan las m ecuaciones de la expresión (1).

Def. Dos **sistemas** se dice que son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

2.- CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

Def. - Un sistema de ecuaciones se dice que es:

a) **Sistema incompatible** **(S.I.)** cuando no tiene solución.

b) **Sistema compatible determinado** **(S.C.D.)** cuando tiene una única solución.

c) **Sistema compatible indeterminado** **(S.C.I.)** cuando tiene infinitas soluciones.

Clasificar o discutir un sistema es determinar cuántas soluciones tiene, es decir, determinar si es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado.

Nota : **(Transformaciones equivalentes en sistemas lineales).** Las siguientes transformaciones en un sistema dan lugar a sistemas equivalentes:

a) Multiplicar (o dividir) una ecuación por un escalar no nulo.

b) Sumarle a una ecuación una combinación lineal de las restantes.

c) Eliminar una ecuación que sea combinación lineal de otras del sistema.

3.- EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA

Expresión matricial de un sistema: Todo sistema lineal se puede expresar matricialmente de acuerdo con la expresión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A partir de esta igualdad, llamando

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

podemos escribir la llamada **expresión matricial del sistema**, que sería $\boldsymbol{A \cdot X = B}$

A la matriz A se le llama **matriz de coeficientes** y, definimos también la **matriz ampliada del sistema** como la matriz

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

4.- DISCUSIÓN DE SISTEMAS. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Discutir o clasificar un sistema es decir de qué tipo es: compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible y para ello , usamos el siguiente teorema

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS Sea:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

un sistema m lineal de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Sea A su matriz de coeficientes y A* su matriz ampliada . Entonces:

a) Si $\text{rg}A = \text{rg}A^* = n \Longrightarrow$ El sistema es **compatible determinado (S.C.D.)**

b) Si $\text{rg}A = \text{rg}A^* < n \Longrightarrow$ El sistema es **compatible indeterminado (S.C.I.)**

c) Si $\text{rg}A \neq \text{rg}A^* \Longrightarrow$El sistema es **incompatible (S.I.)**

Nota Es importante tener en cuenta que $\text{rg}A < \text{rg}A^*$, ya que A* tiene siempre las mismas filas que A y una columna más. Este detalle es de enorme utilidad ya que nos ahorra en muchas ocasiones, tener que determinar $\text{rg}A^*$.

Nota En muchas ocasiones **los sistemas dependerán de uno o dos parámetros** por lo que tendremos que distinguir los diferentes casos en función de los rangos de A y de A*.

5.- RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

5.1.- Método matricial o de la matriz inversa

El método matricial es un método de resolución de sistemas lineales basado en el cálculo matricial. Supongamos un sistema con expresión matricial *A X = B*

Realmente hemos transformado un sistema lineal en una ecuación matricial.

En el caso en que A sea regular, existirá la matriz inversa de A, por lo que multiplicando a izquierda en ambos miembros de la expresión matricial nos queda que $X = A^{-1} B$, que es justo lo que hicimos en la unidad anterior cuando resolvíamos ecuaciones matriciales.

Ejemplo Consideremos el sistema $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+2y+2z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$. Entonces, su expresión matricial es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así pues, llamando: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El sistema lineal es equivalente a la ecuación matricial $A \cdot X = B$. Ahora bien, es inmediato ver que: $|A| = 4$. Así pues, A es regular siendo $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Así pues, despejando X de la forma habitual $X = A^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}$

5.2.- Método de Gauss

El método de Gauss es un método eficaz , sobre todo para sistemas de más de tres incógintas.. Básicamente consiste en :

- transformar el sistema de partida en otro equivalente que sea escalonado mediante transformaciones equivalentes . Estas transformaciones se suelen hacer directamente sobre la matriz ampliada del sistema (por filas), ya que las incógnitas no sufren modificación alguna en ninguna de las transformaciones.
- Una vez obtenido un sistema equivalente pero escalonado, se pueden ir sustituyendo los valores de la incógnita de abajo a arriba (fase de subida) hasta determinarlas todas.

Ejemplos:

a) $\begin{cases} 2x-5y+3z=4 \\ x-2y+z=3 \\ 5x+y+7z=11 \end{cases} \rightarrow A^{*}=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix} \underset{F_3^{'}=F_3-5F_1}{\overset{F_2^{'}=F_2-2F_1}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{pmatrix} \approx$

$\underset{\approx}{F_3^{'}=F_3+11F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-2y+z=3 \rightarrow x=2y-z+3=0+2+3=5 \\ -y+z=-2 \rightarrow y=z+2=-2+2=0 \\ 13z=-26 \rightarrow z=-2 \end{cases}$

Por tanto, se trata de un S.C.D., cuya solución es: $x=5$, $y=0$, $z=-2$

b) $\begin{cases} x-3y+7z=10 \\ 5x-y+z=8 \\ x+4y-10z=-11 \end{cases} \rightarrow A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{pmatrix} \underset{F_3^{'}=F_3-F_1}{\overset{F_2^{'}=F_2-5F_1}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 7 & -17 & 21 \end{pmatrix} \underset{F_3^{'}=2F_3-F_2}{\approx}$

$\approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2^{'}=\frac{1}{2}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-3y+7z=10 \\ 7y-17z=-21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-3+17\lambda \\ z=7\lambda \text{ (Lo elegimos)} \end{cases}$

Se trata, pues, de un S.C.I.

c) $\begin{cases} x-3y-2z=7 \\ 2x-y+15z=3 \\ x-8y-21z=11 \end{cases} \rightarrow A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 15 & 3 \\ 1 & -8 & -21 & 11 \end{pmatrix} \underset{F_3^{'}=F_3-F_1}{\overset{F_2^{'}=F_2-2F_1}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & -5 & -19 & 4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3^{'}=F_3+F_2}$

$\approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-3y-2z=7 \\ 5y+19z=-11 \\ 0=-7 \end{cases}$, sistema que es evidentemente un S.I. ya que la última ecuación carece de solución y resulta una contradicción.

→ **Método de Gauss para discutir y resolver simultáneamente sistemas dependientes de un parámetro**

$$\left.\begin{array}{l} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[mF_1 - F_3 \to F_3]{F_1 - F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & m-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 + F_3 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m^2+m-2 & m-1 \end{array}\right)$$

Como $m^2 + m - 2$ *se anula para* $m = -2$ *ou* $m = 1$*, distinguimos tres casos:*

1. *Se* $m \neq -2$ *e* $m \neq 1$ *entón* $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|b) = 3$*, que é o número de incógnitas, logo o sistema é compatible determinado, sendo a única solución*

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{m-1}{m^2+m-2} = \tfrac{m-1}{(m-1)(m+2)} = \tfrac{1}{m+2} \\ y &= z = \tfrac{1}{m+2} \\ x &= 1 - mz - y = \tfrac{1}{m+2} \end{aligned}$$

2. *Se* $m = 1$*, entón*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Neste caso $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|b) = 1$*, que é estritamente menor que o número de incógnitas, así que o sistema é compatible indeterminado. As infinitas solucións obtémolas despexando unha variable calquera da ecuación* $x+y+z = 1$*, por exemplo* $x = 1-y-z$*, de xeito que o conxunto de solucións ven dado por*

$$\{(1-y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

3. *Se* $m = -2$*, temos que*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right),$$

polo que $\text{Rango}(A) = 2 < 3 = \text{Rango}(A|b)$ *e o sistema é incompatible.*

6.- SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Def.- Un **sistema** de ecuaciones se llama **homogéneo** cuando la columna de términos independientes esté formada por ceros, es decir, cuando es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Nota : Es evidente, al ser rg$A$ =rg$A$ * , que un sistema homogéneo es siempre compatible. Será determinado cuando rg$A$ = n e indeterminado cuando rg$A \neq n$. Además tiene siempre una solución, llamada **solución trivial,** que es: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …$x_n=0$.

a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases}$. Es evidente que se trata de un sistema homogéneo. Veamos si es compatible determinado o indeterminado. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{rg}A = \text{rg}A^* = 3 \rightarrow S.C.D.$

Evidentemente al ser compatible determinado, su solución es la trivial: $x=0$, $y=0$, $z=0$

b) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \\ 2x-4y-z=0 \end{cases} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Pero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rg}A = \text{rg}A^* = 2 \rightarrow S.C.I.$

Para resolverlo nos podemos quedar con las dos primeras ecuaciones, ya que son las filas del menor no nulo y, por tanto, la 3ª fila depende de las dos primeras. Así pues:

$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$. Aplicando Gauss $\rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$. Llamando $y=\lambda \rightarrow \begin{cases} x=3\lambda \\ y=\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$.