CONTENIDOS:

- ✓ **Números enteros y sus operaciones. Problemas con números enteros.**
- ✓ **Potencias de números enteros.**
- ✓ **Múltiplos y divisores de un número. Números primos y compuestos.**
- ✓ **Criterios de divisibilidad por 2, por 3, por 5 y por 10. Resolución de problemas de divisibilidad.**
- ✓ **Descomposición en factores primos.**
- ✓ **Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.**
- ✓ **Resolución de problemas de divisibilidad.**

NÚMEROS NEGATIVOS: UTILIZACIÓN EN CONTEXTOS REALES:

Imagina esta situación: Estamos viendo el telediario y el experto en el tiempo nos comenta que a las 20:00, la temperatura en Salamanca es de +3ºC pero que se espera que durante la madrugada baje 7ºC. ¿Sabrías decir que temperatura alcanzarán? Si tuvieses que representarlo con una operación matemática, ¿cómo harías? Si has sabido hacerlo, enhorabuena, ya estás trabajando en un nuevo conjunto: el conjunto de los números enteros.

Comprenderás que hay muchas situaciones del día a día en las que hablamos de números negativos. Los números negativos son aquellos cuyo valor es menor que cero y se representan con un signo menos delante. Los utilizamos en diversos contextos:

- Cuando la temperatura está por debajo de cero: «hoy tenemos una temperatura de -2ºC».
- Para las pérdidas monetarias: *«tengo la cuenta bancaria en números rojos: tengo – 500€».*
- «Un submarino está a 550 m bajo el nivel del mar (está a -550m)»
- (…)

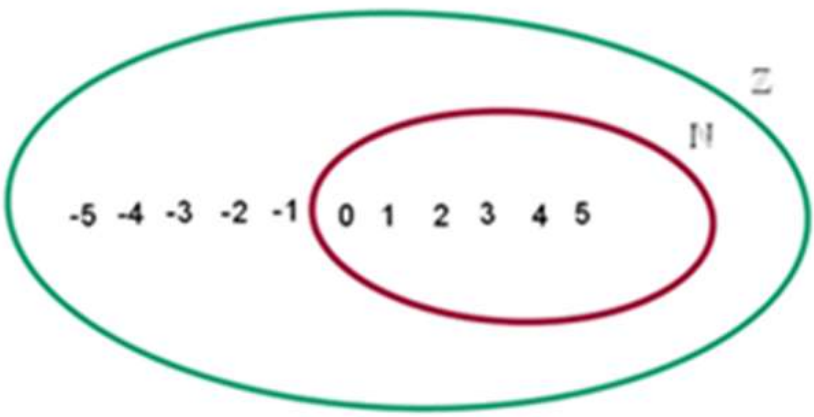
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS (Z):

¿Los números negativos son números naturales? Los números naturales son los que utilizamos para contar: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5…}. Pero, claro, los números negativos no se pueden contar físicamente. Es imposible contar -2 piedras o -3 euros pero lo que si podemos es pensar en el concepto de -3€ como *“debo 3€”* ya que podemos pensar en conceptos que no existen físicamente. Por tanto, los números negativos NO son naturales.

Para resolver este problema y darle sentido a esas expresiones que escuchamos a diario aparece un nuevo conjunto, el de los números enteros que abarca a los enteros positivos, al cero y a los enteros negativos. Este conjunto se representa por la letra Z (letra inicial del vocablo alemán Zahl, que significa “número”).

Z = {…- 4, - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4…}

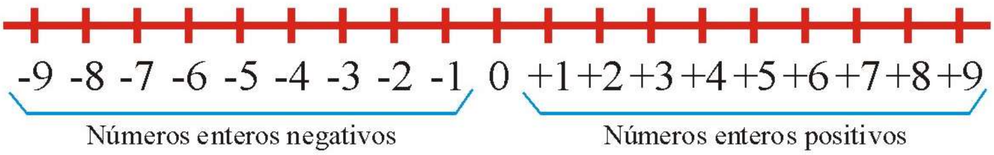
Este nuevo conjunto nos permite realizar cualquier tipo de resta que con el conjunto de los naturales no podíamos realizar. El conjunto de los números enteros abarca también al conjunto de los números naturales, es decir, los números naturales son también enteros y, por tanto, el conjunto de los números naturales es un subconjunto dentro del de los enteros.



¿Conoces las muñecas rusas o Matrioshkas? Pues es algo así, cada nuevo conjunto irá albergando en su interior a los anteriores. Estudiarás más conjuntos durante los próximos años.

Representación de números negativos en la recta numérica:

Los números enteros se representan en la recta numérica:



Los números enteros están ordenados de menor a mayor, conforme nos desplazamos de izquierda a derecha en la recta de modo que **un número que está más a la izquierda siempre es menor que uno que está más a la derecha**.

$$\ldots. -5 < -3 < 0 < 5 < 12\ldots.$$

Aquí parece que hay una incoherencia que a veces puede costar asimilar y es que cuanto más alto es el número negativo, más pequeño es. Por ejemplo: -5 es más pequeño que -1 (aunque 5 en valor absoluto sea más alto que 1). Si piensas por ejemplo en un termómetro te costará menos entenderlo, ¿qué temperatura es más alta: -5 ó -1? La más alta es -1, ¿verdad?, y, por tanto -1 es mayor que -5 ó -5 es menor que -1.

$-5 < -1$ $\quad\quad\quad$ $-1 > -5$

Practicamos:

1. **Expresa con números las siguientes situaciones:**
    - **a)** La cueva está a cincuenta y cinco metros de profundidad.
    - **b)** El avión vuela a mil quinientos metros sobre el nivel del mar.
    - **c)** La sección de juguetes está en el tercer sótano.
    - **d)** La temperatura es de un grado bajo cero.
    - **e)** Estamos a treinta y dos grados sobre cero.
    - **f)** El monte tiene una altura de ochocientos metros.
    - **g)** La cometa vuela a ochenta metros de altitud.

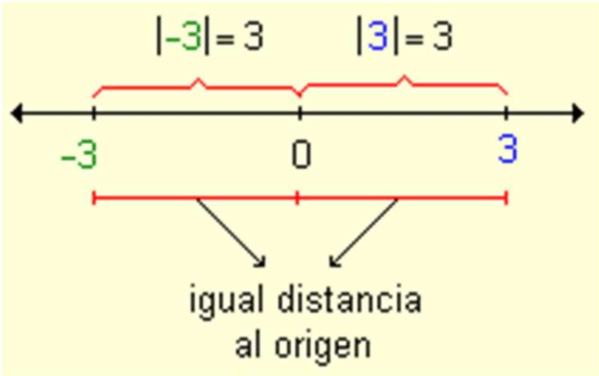
2. Ordena, de mayor a menor, estos números: -8, -16, +5, -2, +13, +3, -4, -9, 0, +18, -10.

3. Representa en primer lugar y luego ordena, de menor a mayor, los siguientes números: -5, +3, -8, +4, -2, +7, -1.

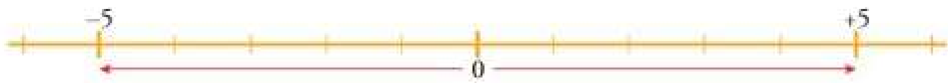
Valor absoluto y opuesto de un número entero:

Tres amigos se encuentran en el piso bajo de un edificio (piso 0). Ana sube al tercer piso (+3), Raúl baja al tercer sótano (- 3) y Sara permanece en la planta 0. ¿Quién está más lejos de Sara? Te darás cuenta de que en realidad ambos están a la misma distancia.

Cuando hablamos del **valor absoluto de un número entero** nos referimos a la distancia que lo separa del cero en la recta numérica. Se expresa escribiéndolo entre barras, |z|. Por ejemplo, los valores absolutos de |+3| y |-3| son iguales y su valor es 3.



El **opuesto de un número entero** es otro entero del mismo valor absoluto, pero de signo contrario. Es su **simétrico** respecto del cero en la recta numérica.



Op (+ 5) = - 5 Op (- 5) = + 5

Matemáticamente el opuesto de un número resulta de cambiarle el signo a su expresión, es decir, ponerle un signo menos delante. De esta manera obtenemos su simétrico en la recta numérica.

Op (+5) = - (+ 5) = - 5 **Op (- 5) = - (- 5) = +5**

OPUESTO E INVERSO: DOS CONCEPTOS DISTINTOS:

a) El **opuesto** de un número es el mismo número con el signo contrario. Un número sumado con su opuesto siempre es igual a 0.

- El opuesto de 72 es -72.
- El opuesto de -5 es 5.
- El opuesto de 0 es 0.

b) El **inverso** de un número se obtiene invirtiendo el número (sin cambiarle el signo).

- El inverso de 5 es $\frac{1}{5}$
- El inverso de $\frac{1}{4}$ de es 4.
- El inverso de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$
- El inverso de 0 es 0.

Practicamos: Indica el valor de las siguientes expresiones:

a) |− 4|

b) Op |- 6 |

c) |- 6 − 4|

d) |+15 − 21| + | - 6|

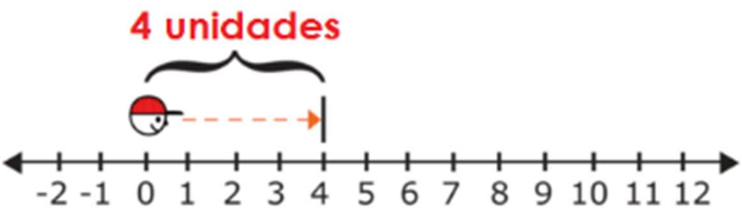
e) - |+2| - Op (2)

f) Op | - 6 + 4 | + Op (Op (- 6)

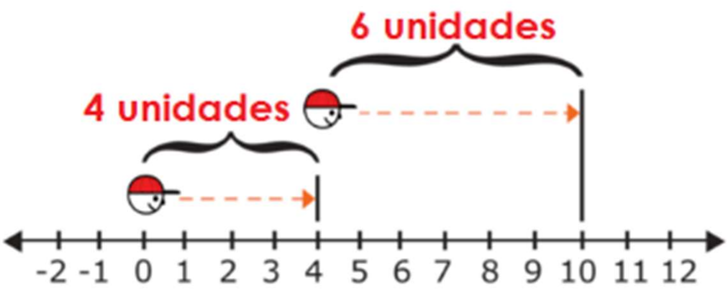
OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS:

- **Sumas y restas de números enteros:**

Ya sabemos cómo se representan enteros en la recta numérica. Imagina una persona de pie en el cero, mirando hacia los números positivos. Si esa persona se desplazara 4 unidades hacia adelante (hacia los positivos), terminaría en el punto que representa el +4.



SUMAR ENTEROS implica **avanzar hacia la derecha** en la recta numérica. Por ejemplo, para representar + 4 + 6 podemos imaginarnos a una persona que parte del 0 y se desplaza 4 unidades hacia adelante y luego otras 6 unidades más.



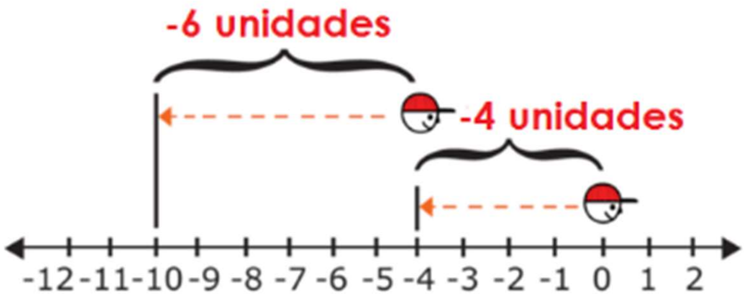
En total, la persona se movió 10 unidades a la derecha del cero y terminó en la marca del número 10. Por lo tanto: + 4 + 6 = +10.

RESTAR ENTEROS implica **ir hacia la izquierda** en la recta numérica. Utilizaremos la recta numérica para encontrar el resultado de la siguiente resta:

- 4 – 6.

Imagina a una persona de pie sobre el cero en la recta numérica. Imagina que la persona se desplaza 4 unidades hacia la izquierda (hacia los números negativos) y luego 6 unidades más hacia la izquierda de nuevo.

En total, la persona se movió 10 unidades a la izquierda del cero y terminó en el número -10. Por lo tanto, - 4 – 6 = -10.



También podemos aprender estas **“reglas”:**

a) Si los números **tienen el mismo signo**, se suman los valores absolutos y al resultado se le coloca el signo común.

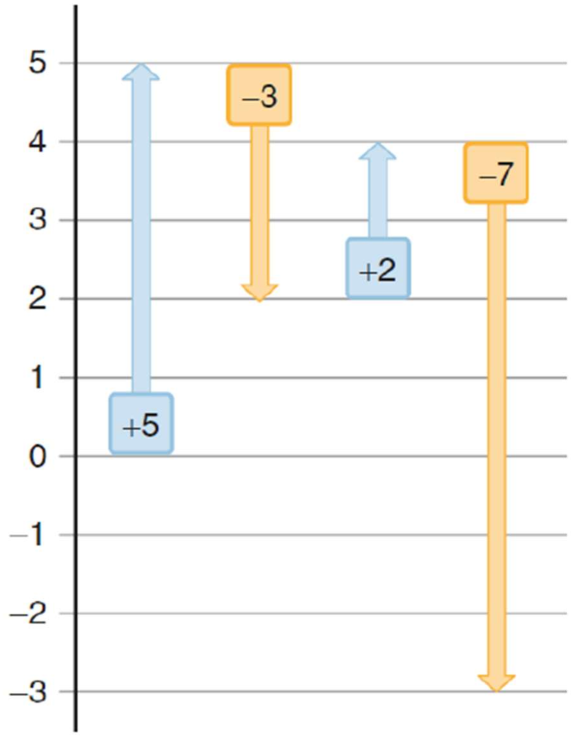
$+3 + 5 = +8$ $\qquad$ $-3 - 5 = -8$

b) Si números **son de distinto signo,** se restan los valores absolutos (al mayor le restamos el menor) y al resultado se le coloca el signo del número con mayor valor absoluto.

$-3 + 5 = +2$ $\qquad$ $+3 - 7 = -4$

Una manera muy sencilla de sumar y restar números enteros consiste en interpretar cada número entero como un aumento o una disminución. Un número positivo significa subir mientras que uno negativo significa bajar.

Fíjate en el ejemplo: $5 – 3 + 2 - 7 = -3$



Cuando tenemos un paréntesis y aparece lo que llamamos un **“choque de signos”** se aplica la **“regla de los signos”.** Profundizaremos en ella en el siguiente punto.

$$5 - (-2) = 5 + 2 = +7$$

- **<u>Multiplicación y división de enteros:</u>** Se realiza multiplicando (o dividiendo) normalmente los valores absolutos, y luego aplicando la **regla de los signos:**

(+) x (+) = +
(-) x (-) = +
(-) x (+) = -
(+) x (-) = -

(+) : (+) = +
(-) : (-) = +
(-) : (+) = -
(+) : (-) = -

Más por (o entre) más igual a más. Por ejemplo: (+2) · (+2) = (+4)
(+8) : (+2) = (+4)

Más por (o entre) menos igual a menos. Por ejemplo: (+2) · (-2) = (-4)
(+8) : (-2) = (-4)

Menos por (o entre) más igual a menos. Por ejemplo: (-2) · (+2) = (-4)
(-12) : (+2) = (-6)

Menos por (o entre) menos igual a más. Por ejemplo: (-2) · (-2) = (+4)
(-2) : (-2) = (+1)

A la hora de multiplicar números enteros, tendremos en cuenta las **propiedades de la multiplicación:**

- **Conmutativa:** Cambiar el orden de los factores no influye en el resultado.

$$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$$

- **Asociativa**: La forma en que se agrupen los factores no cambia el resultado.

$$\overline{(-3)\cdot(+5)}\cdot(-2) \;=\; (-3)\cdot\overline{(+5)\cdot(-2)} \;=\; \overline{(-2)\cdot(-3)}\cdot(+5)$$

$$(-15)\cdot(-2) \qquad\qquad (-3)\cdot(-10) \qquad\qquad (+6)\cdot(+5)$$

$$+30 \qquad\qquad\qquad +30 \qquad\qquad\qquad +30$$

Realmente ambas propiedades se pueden resumir en que "podemos hacer las multiplicaciones en el orden que queramos". Esto no es aplicable a las divisiones.

Practicamos (problemas con números enteros):

1. Un día de invierno amaneció a 3 grados bajo cero. A las doce del mediodía la temperatura había subido 8 grados, y hasta las cuatro de la tarde subió 2 grados más. Desde las cuatro hasta las doce de la noche bajó 4 grados, y desde las doce a las 6 de la mañana bajó 5 grados más. ¿Qué temperatura hacía a esa hora?

2. Si estoy en el piso dos y bajo tres pisos ¿en qué piso me encuentro? ¿Y si a continuación subo cinco pisos?

3. Una casa de campo tiene un depósito de 884 litros de agua que está lleno. Se abren al mismo tiempo un grifo que vierte en el depósito 28 litros de agua por minuto y un desagüe que vacía 45 litros por minuto. ¿En cuánto tiempo quedará vacío el depósito?

4. Al encender la calefacción en un sótano, la temperatura sube 3 grados cada 2 horas. Si inicialmente el termómetro marcaba -5º C, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar los 10º C?

5. En una estación de esquí el termómetro marcaba 14º bajo cero a las 8 de la mañana; al mediodía la temperatura había subido 10ºC y a las 19.00 había bajado 5ºC respecto al mediodía. ¿Cuál era la temperatura a esa hora?

6. Cristian vive en el 4º piso, se sube en el ascensor y baja al sótano 2, ¿Cuántos pisos ha bajado?

7. Julio César, famoso político y militar romano, nació en el año 100 a.C (antes de cristo). En el año 34 a.C, *Pijus Magnificus,* un famosísimo fanfarrón de La Galia afirmó que 10 años antes le había ganado una partida de *Fortnititum* al mismísimo César y que este, del disgusto, se murió en el acto. ¿En qué año y a qué edad murió Julio César?

8. Una persona nació en el año 324 a.e.c y murió en el 275 a.e.c. ¿Cuántos años vivió? Una persona que hubiese muerto ese mismo día, pero con 65 años, ¿en qué año habría nacido?

9. Hipatia de Alejandría fue una científica, filósofa y maestra que murió asesinada en el año 415 a la edad de 45 años. Arquímedes fue un matemático griego que murió a la edad de 75 años durante el asedio a la ciudad de Siracusa por los romanos en el año 212 a.C. ¿En qué año nació cada uno?

10. La temperatura del aire disminuye según se asciende en la atmósfera a razón de 9ºC cada 300 metros. ¿A qué altura vuela un avión que ha despegado desde un aeropuerto situado a 500 m sobre el nivel del mar si la temperatura del aire ha disminuido 81ºC?

11. Octavio Augusto nació en el año 63 a.C (antes de Cristo) y es considerado el primer emperador de Roma. A los 36 años se proclamó emperador. Si sabemos que gobernó el Imperio hasta su muerte en el año 14 d.C. a) ¿En qué año se proclamó emperador? b) ¿Cuántos años vivió? c) ¿Durante cuántos años gobernó el Imperio?

12. Un topo se encuentra en su madriguera a 240 cm bajo tierra. Si excava 60 cm hacia abajo y desde allí asciende otros 80 cm para comer unas lombrices, ¿a qué altura estaban las lombrices?

13. Realiza las siguientes operaciones, **deshaciendo previamente los paréntesis.** Aprovecha para **practicar con la calculadora** y comprobar si el resultado es correcto. En caso contrario, busca el error.

- **a)** + 5 + (- 3)
- **b)** + 4 – (- 2)
- **c)** - 5 + (- 4) - 6
- **d)** -3 + (+ 4)
- **e)** -(-4) + (-8)
- **f)** 5 + (-3) + (- 5)
- **g)** + (+ 2) + (- 5)
- **h)** -(-2) - (-5)
- **i)** 5 - (- 6) - (-1) + 4
- **j)** -5 – (- 8) – (-2)
- **k)** -(-41) + 23 – (-14) – 3
- **l)** 14 + (-9) – 2
- **m)** 30 – (+12) – (-22) + (+ 18)
- **n)** 3 – (– 4) + 3 + (-6) – (-1)

o) - 45 – (– 4) + 31 – (+ 22)

p) -18 + (+ 20) + (-17) – 3

q) 5 – (-6) –15 +(-21) +3 -(-8)

14. Calcula estos productos:

a) 3 · (–2)

b) –5 · (+3)

c) – 4 · (– 6)

d) (– 4) · (+7)

e) (+2) · (+6)

f) (–5) · (–7)

g) (+3) · (–8)

h) (–9) · (–3)

i) (– 6) · (+4)

15. Opera sin olvidar el papel de los paréntesis.

a) [(+80) : (–8)] : (–5)

b) [(–70) : (–2)] : (–7)

c) (+50) : [(–30) : (+6)]

d) (– 40) : [(+24) : (+3)]

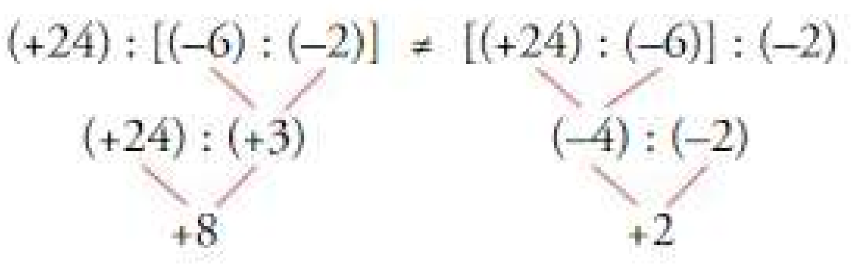
e) [(–12) · (+5)] : (+10)

f) [(+6) · (– 4)] : (–3)

g) [(–15) · (–2)] : (+6)

h) (–5) · [(+12) : (–3)]

¿Recuerdas que la multiplicación tiene las propiedades conmutativa y asociativa? Pues bien, la división NO las tiene así que debes tener cuidado con los paréntesis que te indicarán el orden para realizar las operaciones:

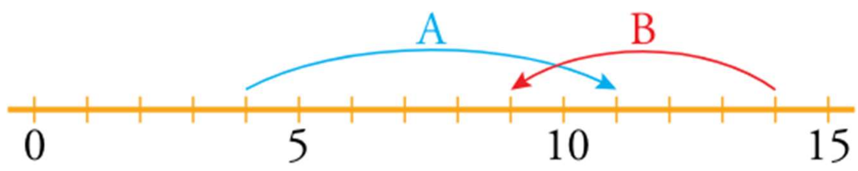


16. Copia en tu cuaderno y completa.

a) $(-6) \cdot \square = -18$ b) $(+8) \cdot \square = -24$

c) $(-7) \cdot \square = +35$ d) $(+15) \cdot \square = +60$

17. Escribe un número para cada movimiento en la recta:



JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES:

En matemáticas, la jerarquía de operaciones se refiere al orden en que se deben realizar las operaciones matemáticas. Las operaciones se realizan de la siguiente forma:

1) Si hay paréntesis u otros signos de agrupación, se realizan primero esas operaciones.
2) Resolvemos las potencias y las raíces.
3) Multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
4) Finalmente las sumas y restas.

Practicamos: Realiza las siguientes operaciones combinadas. Observa con detenimiento los cinco primeros apartados para comprobar la importancia de la colocación de los paréntesis y de respetar la correcta jerarquía de las operaciones. Aprovecha para **practicar con la calculadora** y comprobar si el resultado es correcto. En caso contrario, busca el error.

a) 4 – 2 • 5 + 8 • 2

b) 4 - (2 • 5 + 8 • 2)

c) (4 – 2 • 5 + 8) • 2

d) (4 – 2) • 5 + 8 • 2

e) 4 – (2 • 5 + 8) • 2

f) 4 – 12 : 4 + 3 • (2 + 5)

g) 5 – [7 – (2 + 5 · 3)]

h) 3 + [8 - 14: (4 + 3)]

i) 2 • [6 + (13 - 7)]

j) 7 – [2 • (2 + 5)]

k) 20 – [15 – (11 - 9)] – 7

l) 15 – [17 – (8+4)]

m) 9 : 3 • 4 – (4 + 2 - 3) : 3

n) 3 • 7 : (1 - 4) + (10 – 14 : 7)

o) 60 : (3 + 2) • (6 - 2 : 2) - 64 : 8

p) 24 : 6 + 5 – 2 • (3 • 2 - 5)

q) (9 + 2 • 5 + 1) : 4 + 4 • (6 – 8 : 2)

r) (10 + 24 : 6) : 7 + 3 • (2 • 2 - 4)

s) [(7 • 2 - 6) : 2] : (5 • 2 - 6)

t) 16 : (8 – 2 • 3 + 12 : 6)

u) 3 · [(10+ 2 • 4) – (2 – 3)] – 9

v) (20 : 4 + 12) • 2 – (6 • 3 -2) : 4

w) 30 : (9 – (3 · 3 – 12 : 3) + 2)

x) - 36 · (- 8 : (- 5 + 3) + 12 : (- 2 + 2 · 4))

POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS:

Una potencia es una manera de representar un producto de factores iguales, es decir, una multiplicación de un número por sí mismo.

Por tanto, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Signo de una potencia:

Una potencia es una sucesión de productos iguales. De esta forma, si la base de la potencia tiene signo positivo y exponente es par, como es el caso del ejemplo, el resultado tiene signo positivo:

$$(+4)^4 = \underbrace{\underbrace{(+4) \times (+4)}_{+} \times \underbrace{(+4) \times (+4)}_{+}}_{+} = +256$$

En el caso de exponente par y base negativa, el resultado también tendría signo positivo:

$$(-4)^4 = \underbrace{\underbrace{(-4) \times (-4)}_{+} \times \underbrace{(-4) \times (-4)}_{+}}_{+} = +256$$

También puede ocurrir que el exponente sea impar y la base positiva. En este caso volveríamos a obtener un resultado con signo positivo.

$$(+4)^3 = \underbrace{\underbrace{(+4) \times (+4)}_{+} \times \underbrace{(+4)}_{+}}_{+} = +64$$

Un último caso serían las potencias con exponente impar y base negativa que da como resultado el signo negativo:

$$(-4)^3 = \underbrace{\underbrace{(-4) \times (-4)}_{+} \times \underbrace{(-4)}_{-}}_{-} = -\ 64$$

¡¡¡CUIDADO CON LOS SIGNOS!!!

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

$-\ 3^4 = -\ (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -\ 81$

Cuadro Resumen: Signo de una potencia:

$$(+)^{PAR} = +$$

$$(-)^{PAR} = +$$

$$(+)^{IMPAR} = +$$

$$(-)^{IMPAR} = -$$

<u>**Practicamos**</u>: **Señala el signo que tendrán las siguientes potencias y después calcula mentalmente su valor.**

a) $(+2)^3$
b) $(-2)^3$
c) $(-5)^3$
d) $(+3)^2$
e) $(-3)^2$
f) $(+6)^2$
g) $(+10)^3$
h) $(-10)^4$
i) $(-4)^3$
j) $(-1)^1$
k) $(-1)^2$
l) $(-1)^3$
m) $(-1)^4$
n) $(-1)^0$

Una potencia es una **multiplicación de factores iguales**. Estos factores no tienen por qué ser números enteros, sino que pueden ser fracciones, letras o, en general, cualquier expresión. Fíjate en los ejemplos:

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$$

$$\left(\frac{-8}{5}\right)^3 = \left(\frac{-8}{5}\right) \cdot \left(\frac{-8}{5}\right) \cdot \left(\frac{-8}{5}\right)$$

$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

$(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y)$

$(2a - 5b)^4 = (2a - 5b) \cdot (2a - 5b) \cdot (2a - 5b) \cdot (2a - 5b)$

Practicamos

1. Calcula mentalmente.

a) $(-1)^{28}$ **c)** $(-1)^{30}$

b) $(-1)^{29}$ **d)** $(-1)^{31}$

2. Escribe con todas sus cifras.

a) $(-10)^3$ **c)** $(-10)^2$ **e)** $(+10)^6$

b) $(+10)^0$ **d)** $(-10)^4$ **f)** $(-10)^6$

3. Calcula como en los ejemplos y observa las diferencias.

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$ $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

a) $(-2)^4$ **e)** -2^3 **i)** $(+5)^2$

b) -2^4 **f)** $(+2)^3$ **j)** $(-3)^3$

c) $(+2)^4$ **g)** $(-5)^2$ **k)** -3^3

d) $(-2)^3$ **h)** -5^2 **l)** $(+3)^3$

4. Calcula como en el ejemplo y observa la diferencia.

$(3 - 4)^3 = (-1)^3 = -1$ $\qquad$ $3^3 - 4^3 = 27 - 64 = -37$

a) $(5 + 3)^2$
b) $(2 - 4)^3$
c) $(2 - 3)^4$
d) $5^2 + 3^2$
e) $2^3 - 4^3$
f) $2^4 - 3^4$

5. Señala (sin desarrollar) el signo de las potencias (+ ó –):

a) $(+2)^{300}$
b) $(-2)^{301}$
c) $-(5)^{30}$
d) $(-3)^{200}$
e) $(-3)^{201}$
f) $(+61)^{25}$
g) $(-10)^{2000}$
h) $(-10)^{433}$
i) $-(-4)^{120}$
j) $(-1)^{100}$
k) $(-1)^{201}$
l) $-(1)^{301}$
m) $(-1)^{402}$
n) $(-1000)^0$

6. Efectúa las siguientes operaciones combinadas respetando LA JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES.

1) $2^3 - 5^2 + 4 \cdot 3$
2) $2^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot (3 - 5)$
3) $3 \cdot 2^3 - 5 + (4 - 2)^2$
4) $6^2 : 4 + 3 \cdot (9 - 5)$
5) $3^3 : 3 - 2 \cdot (3^2 - 4)$
6) $12^2 - 4 \cdot (3 - 15 : 3)$
7) $3 \cdot 2^3 - 5 + (-2)^2$
8) $3^3 : 3 : (-3) - 3^2$
9) $9^2 : 3 + 5 \cdot 9 - 3$
10) $2^3 : 4 - 5^3 : (7 - 2)$
11) $2^4 : 2^2 + 8^2 \cdot 3$
12) $3^4 \cdot 2 + 6^2 : 3$
13) $12 : 2^2 + 6 \cdot (-3)$
14) $48 + 2^3 \cdot (4 \cdot 3^2)$

15) $4^3 : 8 + 2^3 \cdot (4\cdot6 - 5\cdot3)$

16) $2^3 - 5^2 : (2 - 7)$

17) $2^3 : 1^2 + (8 - 6)^2 \cdot 3$

18) $2^4 : (- 8) + 2 \cdot 6^2 - 1$

19) $2^3 - (5 - 3)^2 + 4\cdot3$

20) $12 : (2^2 + 8) + 6$

21) $[(8 - 6)^2 \cdot (9 - 7)^3] \cdot 3$

22) $[(7 - 4)^3 - (9 - 4)^2] : 2 + 5\cdot(2+1)^3$

23) $440 - [30 + 6 \bullet (19 - 12)]$

24) $(3 - 8)+ [5 - (-2)]$

25) $5 - [6 - 2 - (1 - 8) - 3 + 6] + 5$

26) $(5 + 3 \cdot 2 : 6 - 4) \cdot (7 - 8 : 2)^2$

27) $[(17- 15)^3 + (7-12)^2] : (12 - 13)]$

28) $[6 + 2 \cdot (24 : 4) - 7 \cdot 2] + 9 : 3$

<u>OPERACIONES CON POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS:</u>

1) Potencia de un producto (producto de potencias con el mismo exponente): Dejamos el exponente y multiplicamos las bases.

$$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n$$

Ej: $3^2 \bullet 4^2 = (3 \bullet 4)^2 = 12^2 = 144$

Ej: $(-3)^2 \bullet (-5)^2 = [(-3) \bullet (-5)]^2 = 15^2 = 225$

2) Potencia de un cociente (cociente de potencias con el mismo exponente): Dejamos el exponente y dividimos las bases.

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Ej: $8^2 : 4^2 = (8 : 4)^2 = 2^2 = 4$

Ej: $(-9)^2 : (+3)^2 = [(-9) : (+3)]^2 = (-3)^2 = 9$

Debemos familiarizarnos con que los cocientes (divisiones) también se expresan con una fracción.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ej: $\frac{8^2}{4^2} = \left(\frac{8}{4}\right)^2 = 2^2 = 4$

Ej: $\frac{(-8)^2}{(-2)^2} = \left(\frac{-8}{-2}\right)^2 = 4^2 = 16$

3) **Producto de potencias de la misma base:** Dejamos la base y sumamos los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ej: $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$

Ej: $(-4)^2 \cdot (-4)^3 = (-4)^{2+3} = (-4)^5 = -4^5 \;\; -1024$

4) **Cociente de potencias de la misma base:** Dejamos la base y restamos los exponentes.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Ej: $8^6 : 8^3 = 8^{6-3} = 8^3 = 512$

Ej: $(-8)^6 : (-8)^3 = (-8)^{6-3} = (-8)^3 = -8^3 = -512$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ej: $\frac{8^6}{8^3} = 8^{6-3} = 8^3$

Ej: $\frac{(-3)^6}{(-3)^4} = (-3)^{6-4} = (-3)^2 = 9$

5) **Potencia de una potencia:** Dejamos la base y multiplicamos los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ej: $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6 = 15.625$

Ej: $[(-2)^3]^2 = (-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6 = 32$

6) **Potencia de exponente cero**: la potencia de exponente 0 y base distinta de 0 vale siempre 1.

$a^0 = 1$

Ej: $4^0 = 1$ $(-4)^0 = 1$ $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

¿Sabes cuánto vale 0^0? Usa tu calculadora. ¿Qué apareceré en la pantalla? Durante el curso iremos aprendiendo a interpretar los distintos mensajes que aparecen en la calculadora (*Math Error, Syntax Error*, etc). En cuanto a 0^0 de momento diremos que aún no lo puedes calcular pero que no es ni 0 ni 1.

7) Potencias de exponente negativo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \textit{Ej}: 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \qquad Ej: \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$$

CUADRO RESUMEN: PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS:

Producto	*Misma* ***BASE*** *sumamos los exponentes*	$8^7 \cdot 8^6 = 8^{7+6} = 8^{13}$
	Mismos ***EXPONENTES*** *multiplicamos las bases*	$7^2 \cdot 4^2 = (7 \cdot 4)^2 = 28^2$
Cociente	*Misma* ***BASE*** *restamos los exponentes*	$8^{13} : 8^6 = 8^{13-6} = 8^7$
	Mismos ***EXPONENTES*** *dividimos las bases*	$28^2 : 4^2 = (28 : 4)^2 = 7^2$
Potencia **de potencia:**	*multiplicamos los exponentes*	$(8^2)^5 = 8^{2 \cdot 5} = 8^{10}$

Exponente 1: igual que no poner exponente	$8^1 = 8$
Exponente 0: el resultado es 1 *(excepto 0^0, que no existe)*	$8^0 = \mathbf{1}$
Suma/resta: NO HAY propiedades.	$\begin{matrix} 3^2+4^2 \\ 9+16 \\ 25 \end{matrix} \neq 7^2=49$

Practicamos:

1. **Desarrolla y calcula el valor de las siguientes potencias:**

a) 4^2
b) 3^5
c) 10^{-3}
d) 3^1
e) $(-1)^7$
f) $(-1)^8$
g) -5^2
h) $(-10)^3$
i) 3^0
j) 1^6
k) $(-1)^{43}$
l) -2^5
m) 2^4
n) $(-5)^3$
o) $(-2)^2$
p) $(-5)^2$
q) -2^2

2. **Reduce a una única potencia utilizando las propiedades de las potencias:**

a) $5^3 \cdot 2^3$
b) $(-4)^2 \cdot 5^2$
c) $(-25)^2 \cdot (-4)^2$
d) $20^3 \cdot (-5)^3$
e) $(+16)^5 : (-8)^5$
f) $18^3 : 6^3$
g) $(+21)^4 : (+7)^4$
h) $(-35)^2 : (-5)^2$
i) $(-100)^3 : 50^3$

3. Reduce a una única potencia:

a) $(-5)^2 \cdot (-5)^4$

b) $4 \cdot 4^2$

c) $2^6 : 2^2$

d) $(-3)^8 : (-3)^5 \cdot (-3)^2$

e) $10^7 : 10^6$

f) $7^5 \cdot 7^2 : 7^3$

g) $a^{10} : a^6$

h) $m^5 : m$

i) $x^8 : x^4$

j) $a^5 \cdot a^5$

k) $m^7 \cdot m^2$

l) $x^2 \cdot x^6 \cdot x^3$

4. Expresa en forma de cociente de potencias:

a) $\left(\frac{18}{9}\right)^3$

b) $(8 : 4)^2$

c) $(10 : 5)^3$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$

e) $\left(\frac{-8}{3}\right)^3$

5. Reduce a una única potencia.

a) $(2^3)^7$

b) $(-3^5)^3$

c) $((-5)^5)^3$

d) $(-2^3)^2$

e) $(3^3)^4$

f) $(5^2)^{13}$

g) $(5^2)^3$

h) $((-2)^5)^2$

i) $(k^3)^3$

j) (x^2)

6. Reduce a una única potencia:

a) $14^8 \cdot 14^7 \cdot 14 =$

b) $(-4)^9 \cdot 2^9 =$

c) $(-16)^9 : (-4)^9 =$

d) $12^6 : 12^3 =$

e) $8^{12} : 8^5 =$

f) $((-4)^3)^3 =$

g) $\dfrac{(-7)^6}{(-7)^4} =$

h) $\dfrac{12^{13}}{12^{15}} =$

i) $(-5)^{16} : (-5)^8 : (-5)^4 =$

7. **Reduce a una única potencia:**

a) $(-7)^{12} \div (-7)^4 =$

b) $12^3 : 12^3 =$

c) $8^{12} \div 8^5 \cdot 8^4 =$

d) $\left((-4)^3\right)^3 =$

e) $(-4)^3 \cdot 2^3 =$

f) $4^2 \cdot 2^3 =$

g) $\dfrac{14^8}{14^3 \cdot 14^3} =$

h) $\dfrac{a^7}{a^2 \cdot a^4} =$

i) $2^{12} : 2^{12}$

j) $\left((-2)^1\right)^3 =$

8. **Reduce a una única potencia:**

a) $15^4 : 5^4$

b) $(-12)^3 : 6^3$

c) $(-20)^5 : (-2)^5$

d) $8^6 : (-2)^6$

e) $(6^3 \cdot 4^3) : (-8)^3$

f) $[8^4 \cdot (-5)^4] : (-20)^4$

9. **Reduce a una única potencia:**

a) $(5^8 \cdot 5^4) : (5^2)^5$

b) $10^6 : (5^4 \cdot 2^4)$

c) $[(-2)^6 \cdot (+2)^3] : [(+2)^3]^2$

d) $(-12)^7 : [(-3)^5 \cdot 4^5]$

e) $[(-3)^3]^3 : [(-3)^2 \cdot (-3)^3]$

f) $[(-9)^5 \cdot (-2)^5] : 18^4$

g) $[(-7)^8 \cdot 7^5] : (7^4)^3$

h) $[5^7 \cdot 4^7] : 20^4$

10. **Reduce a una única potencia:**

a) $(x^5 \cdot x^2) : x^4$

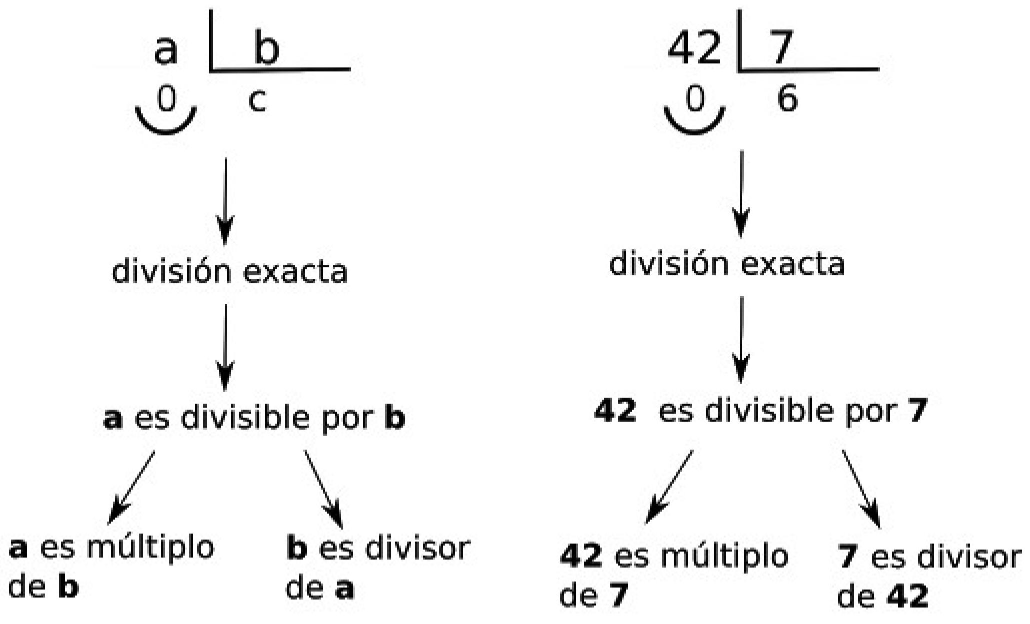
b) $m^7 : (m^2 \cdot m^3)$

c) $(a \cdot a^6) : (a^2 \cdot a^4)$

d) $(z^5 \cdot z^3) : (z^4 \cdot z^2)$

LA RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD:

Dos números están emparentados por la relación de divisibilidad cuando uno contiene al otro una cantidad exacta de veces; es decir, cuando al dividir el mayor entre el menor la división es exacta.



Para saber si un número es divisible entre otro no tenemos más que realizar la división. Ahora bien, hay una serie de reglas que nos indican si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división. Son los denominados **criterios de divisibilidad.**

Hay muchos, pero nosotros sólo vamos a emplear estos y para cualquier otro caso simplemente tendrás que hacer la división.

- **DIVISIBILIDAD ENTRE 2:** Un número es divisible por 2 si termina en 0 o cifra par.
  - 24 es divisible por 2 porque termina en cifra par.
  - 31 no es divisible por 2 porque no termina en cifra par ni en cero.

- **DIVISIBILIDAD ENTRE 3**: Un número es divisible por 3, si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
  - 42 es divisible por 3 porque 4 + 2 = 6 es múltiplo de tres.
  - 43 no es divisible por 3 porque 4 + 3 = 7 que no es múltiplo de tres.

- **DIVISIBILIDAD ENTRE 5**: Un número es divisible por 5 si acaba en 0 ó 5.
  - 35 es divisible por 5 porque acaba en cinco.
  - 540 es múltiplo de 5 porque acaba en cero.

- **DIVISIBILIDAD ENTRE 9:** Es similar al del 3. Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
  - 45 es divisible por 9 porque la suma de todas sus cifras es un múltiplo de 9 (4 + 5 = 9).
  - 738 es múltiplo de 9 porque 7 + 3 + 8 = 18, que es múltiplo de 9.
  - 15 no es múltiplo de 9 ya que 1 + 5 = 6, que no es múltiplo de 9.

- **DIVISIBILIDAD ENTRE 10, 100, 1000, etc**: Un número es divisible por 10 si termina en cero. De manera similar, si termina en 00 es divisible por 100; si termina en 000 es divisible por 1000, etc.
  - El número 70 es divisible por 10 porque termina en cero
  - El número 700 es divisible por 10 porque termina en 0 y por 100 porque termina en 00.

- **DIVISIBILIDAD POR 11**: Este es el criterio más complicado así que lo explicaremos con un ejemplo más detallado. Supongamos que queremos saber si 3927 es múltiplo de 11. Debemos hacer lo siguiente:
  1) Agrupamos las cifras de modo que cogeremos una sí y una no alternativamente, es decir, las cifras en posición PAR por un lado y las cifras en posición IMPAR por otro lado.

  3 9 2 7

  1º 2º 3º 4º

  2) Sumamos entre sí esas cifras agrupadas:

  3 + 2 = 5

  9 + 7 = 16

  3) Restamos ambos resultados (el mayor menos el menor).

  16 – 5 = 11

  4) Si el resultado obtenido es **cero (0) o múltiplo de 11** (11, 22, 33, 44, 55…) entonces el número inicial será múltiplo de 11. Por tanto 3927 es múltiplo de 11 puesto que el resultado de las operaciones es 11 (que es un múltiplo de 11).

MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO:

Múltiplos: ¿Recuerdas las tablas de multiplicar? Escribe en tu cuaderno la del 5 y la del 7. Sin darte cuenta has escrito los múltiplos de 5 y de 7. ¿Todos? No, solo los primeros, pues un número tiene siempre **infinitos múltiplos**. Se definen los múltiplos de un número natural como los números que resultan de multiplicar ese número por todos los números naturales. Por ejemplo, la tabla de los múltiplos de 5:

Múlt (5) = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65...

Como ya dijimos antes, a veces se considera el cero como número natural y, en ese caso también deberíamos incluir el cero entre los múltiplos de un número puesto que al multiplicar cualquier número por 0 se obtiene 0. Vaya lio, ¿no? Nos os preocupéis, no nos romperemos la cabeza con esto.

Divisores: Los divisores de un número son aquellos números entre los que se puede dividir (la división debe dar exacta, recuerda). Veámoslo con algunos ejemplos:

Div (7) = 1, 7

Div (15) = 1, 3, 5, 15.

Div (13) = 1, 13.

Div (20) = 1, 2, 4, 5, 10, 20.

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS:

Fíjate en los ejemplos anteriores. ¿Observas que el 7 y el 13 sólo tienen dos divisores?

- ✓ Diremos que un número es **primo** cuando tiene únicamente **dos divisores distintos**: el 1 y él mismo. Por ejemplo, el 7 y el 13 son números primos.

- ✓ Diremos que un número natural es **compuesto** si tiene otros divisores además del 1 y de él mismo (tiene más de dos divisores, por tanto). El 15 y el 20 son números compuestos.

¿Serías capaz de escribir la lista de los números primos comprendidos entre 1 y 100? No te preocupes si no los encuentras todos, en clase veremos un sencillo método que Eratóstenes (un filósofo y matemático griego) diseñó hace más de 2000 años para resolver este problema.

¿Qué pasa con el 1? ¿Es un número primo? ¿Es compuesto? ¿No es ninguna de las dos cosas?

Practicamos:

1. Calcula TODOS los divisores de 12, 25, 125, 240 y 368.

2. Escribe los 7 primeros múltiplos de 2, 4, 7 y 10.

3. Escribe los tres primeros múltiplos comunes a 4 y 5.

4. De los primeros 100 números naturales, señala cuáles son primos.

5. Señala todos los números primos que existen entre 200 y 250.

6. Escribe todos los múltiplos comunes a 2 y 7 comprendidos entre 50 y 100.

7. Indica si es verdadero (V) o falso (F) y razónalo.

a) Los números primos no tienen divisores.

b) Un número siempre es divisor de sí mismo.

c) El 1 es divisor de cualquier número.

d) Un número siempre es múltiplo de sí mismo.

e) Los números primos tienen más de dos divisores.

8. Señala un número de 3 cifras que sea múltiplo de 11. Haz lo mismo con uno de 4 y 5 cifras. ¿Serías capaces de escribir un número de que sea al mismo tiempo múltiplo de 11 y de 5? ¿Y que sea al mismo tiempo múltiplo de 11, de 5 y de 2?

9. Indica, para cada caso, todos los valores que pueda tomar la letra para que sean ciertas las afirmaciones siguientes. Cada letra representa una cifra.

a) 2C sea múltiplo de 3
b) 58P sea múltiplo de 2 y de 5
c) 25A sea múltiplo de 2
d) 72M sea múltiplo de 3 y de 5
e) 98X sea múltiplo de 2 y de 3.
f) 7R3 sea múltiplo de 3.
g) 1B1B sea múltiplo de 11.

10. Hassan tiene 54 canicas que quiere repartir entre sus 3 mejores amigos.

a) ¿Puede repartirlas sin que sobren ni falten?..................................
b) ¿Cuántas deberá recibir cada uno de sus tres amigos?................

c) ¿Cuántas la sobran después del reparto equitativo?....................

11. Ana quiere leer un libro de 125 páginas en 5 días.

a) ¿Puede leer todos los días el mismo número de páginas?.................................

b) ¿Cuántas deberá leer cada día?...............

12. ¿De cuántas formas puedo envasar en cajas iguales 12 envases de leche sin que sobre ninguno?

13. ¿De cuántas formas distintas se pueden agrupar 50 monedas de 2€ de modo que todos los grupos tengan el mismo número de monedas?

14. Rodea con un círculo los números primos y tacha los compuestos:

2	7	15	21	23	45	101	154	201
300	317	351	397	403	1111	1257	2156	7272

15. Aplica los criterios de divisibilidad para rellenar la siguiente tabla:

Divisible por	**2**	**3**	**5**	**9**	**10**	**11**
125						
1452						
3916						
26335						
333						
202020						

16. Un pirata nos propone investigar cuántos lingotes de oro hay en el baúl del tesoro. Para ello nos da un par de pistas. Por un lado, nos dice que los lingotes de pueden agrupar en grupos de 18, 24 y 30 lingotes sin que sobre ni falte ninguno y, por otro lado, nos dice que hay menos de 400 lingotes. ¿Cuántos lingotes hay en el baúl del pirata?

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES. DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS:

Descomponer en factores un número es descomponerlo en una multiplicación de números cuyo resultado es el número en cuestión.

Por ejemplo, 24 se puede descomponer de diversas maneras:

- 2×12
- 6×4
- 1×24
- 8×3
- $6 \times 2 \times 2$
- $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1$

¿Cuántas descomposiciones factoriales distintas podrías encontrar para 28? ¿Y para 40?

Todas las descomposiciones anteriores son descomposiciones en factores, pero sólo una ($3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1$) es una **descomposición en factores primos**.

Un modo de obtener esta descomposición en factores primos sería dividir sucesivamente el número entre los números primos hasta que ya no podamos hacerlo más.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$50 = 2 \cdot 5^2 \qquad\qquad 165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D) Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M):

El mínimo común múltiplo de varios números (M.C.M.) es el menor de los múltiplos comunes de dichos números. Lo podemos calcular mediante dos procedimientos:

- **Método "artesanal":** Dados dos o más números podemos calcular los múltiplos de cada uno y observamos los que sean múltiplos a la vez de todos ellos. De estos múltiplos comunes el menor es el m.c.m. Ejemplo: Calculamos el m.c.m (12, 30). En negrita van los múltiplos comunes, el menor es 60 y, por tanto el m.c.m (12, 30) es 60.

M (12) = 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, 108, **120**, 132…

M (30) = 30, **60**, 90, **120**, 150….

- **<u>Método “óptimo”:</u>** Se descompone cada número en producto de factores primos y el m.c.m. se forma con el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente. <u>Ejemplo:</u> Calculamos el m.c.m (30, 45).

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$45 = 3^2 \times 5$$

$$\text{m.c.m. } (30, 45) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$$

El máximo común divisor de varios números (M.C.D.) es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

- **<u>Método “artesanal”:</u>** Dados dos o más números podemos calcular los divisores de cada uno y observar los que sean divisores a la vez de todos ellos. De estos divisores comunes el mayor es el m.c.d. <u>Ejemplo:</u> Calculamos el m.c.d (12, 30). En negrita van los divisores comunes, el mayor es 6 y, por tanto el m.c.d (12, 30) es 6.

D (12) = **1, 2, 3**, 4, **6,** 12.

D (30) = **1, 2, 3**, 5, **6**, 10, 15, 30

- **<u>Método “óptimo”:</u>** Se obtiene descomponiendo los números en productos de factores primos. A continuación, se multiplican los factores comunes que tengan el menor exponente. <u>Ejemplo:</u> Calculamos el m.c.d (12, 18).

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12 = 2^2 \times 3 \\ 18 = 2 \times 3^2 \end{array}$$

$$\text{m.c.d. } (12, 18) = 2 \times 3 = 6$$

TIP! Cuando calculemos MCM y MCD de dos números y uno es divisible entre otro, el MCM de los números es el mayor y el MCD es el menor. Por ejemplo, para los números 25 y 50, su MCM es 50 y su MCD es 25.

Practicamos:

1. **Descompón en producto de factores primos los siguientes números:**

   200, 13, 120, 48, 724, 1111, 999, 127, 128, 17, 21, 210.

2. **Calcula por el método artesanal y por el método óptimo el mcm y el mcd de los siguientes números. ¿De qué manera te parece más sencillo?**

   a) 4 y 14.
   b) 12 y 24.
   c) 20 y 50.
   d) 42 y 105.
   e) 6, 12 y 24.
   f) 21, 40 y 100.

PROBLEMAS DE MCM Y MCD:

Ejercicio Resuelto:

A Ana y a Pedro les gusta comer en "*Pizzería Capriccio*". Ana lo hace cada 20 días y Pedro cada 38. Si hoy han coincido comiendo ¿Cuándo volverán a encontrarse?

Solución: Si mañana empezamos a contar los días, entonces:

5) Ana come el día 20, el día 40, el 60, 80, 100... ¡¡¡Estos días son los múltiplos de 20!!!

6) Pedro asiste el día 38, el día 76, el 114... Son los múltiplos de 38.

Ambos coinciden cuando asisten el mismo día, es decir, cuando asisten un día que es múltiplo de 20 y de 38. Además, el primer día que coinciden es el menor de los múltiplos comunes. Por tanto, debemos calcular el **MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.**

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$
$$38 = 2 \cdot 19$$

$$m.c.m(20,38) = 2^2 \cdot 5 \cdot 19 = 4 \cdot 5 \cdot 19 = 380$$

Por tanto, volverán a encontrarse dentro de 380 días.

También podemos hacerlo de forma "artesanal". Comprueba que el resultado es el mismo.

Ejercicio Resuelto:

María tiene dos cuerdas de 8 y 12 m cada una. Quiere cortar ambas en trozos de la misma longitud y que sean lo más grande posible. ¿Cuánto medirá cada trozo? ¿Cuántos trozos podrá hacer con cada cuerda?

Solución: Como queremos que los trozos sean iguales la longitud de los trozos debe ser un divisor de los números. Si además queremos que se puedan cortar ambas cuerdas debe ser un divisor común de 8 y 12*. Además, como debe ser lo más grande posible, debemos calcular el **máximo común divisor**.

Observa que **debe ser un divisor de ambos números** ya que si los corta en trozos de 3 m por ejemplo, SI que podría cortar las cuerda de 12 m pero NO la de 8 m ya que 3 no es divisor de 8.

D (8) = **1, 2, 4**, 8.

D (12) = **1, 2**, 3, **4**, 6, 12. MCD (8 y 12) = 4.

Por tanto, los podrá cortar en trozos de 4m. De la cuerda de 8m podrá obtener 2 trozos (8 : 4 = 2) y de la de 12m podrá obtener 3 trozos (12 : 4 = 3).

Hemos resuelto el problema usando el “método artesanal”. Intenta hacerlo tú usando el “método óptimo” y comprobarás que los resultados son los mismos.

1. Uxía y Raúl se apuntaron a bailes de salón. Uxía asiste a clase cada 4 días y Raúl sólo va cada 7 días. ¿Cada cuántos días coinciden en clase?

2. Tres trenes salen de la estación cada 3 días, cada 12 días y cada 18 días. ¿Cada cuántos días saldrán los tres a la vez?

3. Dos cometas se aproximan al Sol, uno cada 25 años y el otro cada 60 años. Se aproximaron juntos al Sol en el año 1950, ¿Cuáles son las dos próximas fechas en la que volverán a hacerlo juntos?

4. Tres piezas de tela de 12, 24 y 40m respectivamente se quieren dividir en trozos iguales. ¿Cuál será la longitud de cada trozo, para que el número de trozos sea el menor posible?

5. ¿Cómo podemos envasar 40 litros de zumo de piña y 24 litros de naranja en recipientes iguales de la mayor capacidad posible? ¿Cuántos envases necesitaremos para ello?

6. En una bodega hay 3 toneles de vino, cuyas capacidades son: 250 L, 360 L, y 540 L. El contenido de cada tonel se quiere envasar en garrafas iguales (que tengan la misma capacidad). Calcula la capacidad máxima de estas garrafas y el número de garrafas que se necesitan.

7. Eva tiene una cuerda roja de 15 m y una azul de 20 m. Las quiere cortar en trozos de la misma longitud, de forma que no sobre nada. ¿Cuál es la longitud máxima de cada trozo de cuerda que puede cortar?

8. Una gacela joven realiza saltos de 6 metros, mientras que una adulta da saltos de 8 metros. Si una gacela joven comienza a dar saltos y desde la primera huella ponemos a una adulta para que la siga…

- **a)** ¿Cuántos metros recorrerá la gacela adulta hasta que vuelva a pisar una huella de la joven?
- **b)** ¿Cuántos saltos dio la gacela adulta hasta la segunda coincidencia?
- **c)** ¿Cuántos saltos dio la gacela joven hasta la segunda coincidencia?

9. Tres barcos realizan sus recorridos entre las islas Canarias cada 6, 9 y 12 días respectivamente. El día 1 de Julio coincidieron la primera vez, ¿Cuándo volverán a coincidir?

10. Sara tiene cubos azules de 55 mm de lado y cubos rojos de 45 mm de lado. Apilando los cubos en dos columnas, una de cubos azules y otra de rojos, quiere conseguir que las dos columnas sean iguales. ¿Cuántos cubos, como mínimo, necesita de cada color?

11. Ana y Breo necesitan preparar cintas para una de las pruebas del campamento. Para ello cortarán en trozos más pequeños dos cordeles de 94 cm y 64 cm, ¿Cuál es el mayor tamaño en que pueden cortar las cintas de ambos cordeles, para que sean todas iguales?

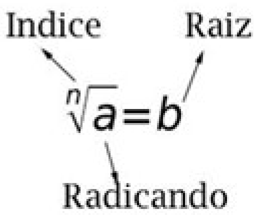
12. Diego ha iniciado un tratamiento médico para su alergia. Debe tomar tres medicamentos distintos: unas pastillas, un jarabe y una crema. Las pastillas las debe tomar cada tres horas, el jarabe cada cuatro y la crema aplicarla cada dos horas. Si Diego tomó todos los medicamentos a las 8:00 de la mañana, ¿a qué hora los volverá a aplicar todos juntos?

13. En un aeropuerto existen dos líneas aéreas que realizan vuelos a Barcelona durante todo el día. Los aviones de la primera línea despegan cada 10 min y los de la otra cada 45 min. Si el primer vuelo de ambas líneas aéreas se realiza a las 7:00 a.m., ¿a qué hora vuelven a despegar juntos los aviones?

LOS RADICALES (RAÍCES):

Las raíces son operaciones inversas de las potencias (por ejemplo, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado). Conociendo la **definición de radical** podremos calcular sencillamente raíces exactas y también podremos deducir cuando una raíz existe o no o cuando una raíz tiene soluciones múltiples.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$



Ejemplos:

$\sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 3^2 = 9$

$\sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 25$

$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

⚠ **Te habrás dado cuenta de que el resultado de $(-3)^2$ también es 9. Efectivamente las raíces de índice par tienen dos soluciones (una**

positiva y otra negativa) ya que al elevar a una potencia a un número par siempre dará un número positivo.

$\sqrt{9}$ = - 3 $\Leftrightarrow$ 3^2 = 9

$\sqrt{-9}$ $\notin$ R (el resultado no pertenece al conjunto de los números reales).

Las raíces negativas de índice impar no existen (en los conjuntos que conocemos hasta ahora porque ya verás en futuros cursos que sí que existen). La razón es muy sencilla: si elevas un número negativo a un exponente par siempre dará un número positivo.

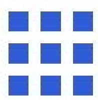
$$\sqrt[3]{27} = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \Leftrightarrow (-3)^3 = -27$$

Las raíces de índice impar existen siempre y su solución es única.

CUADRADOS PERFECTOS Y RAÍCES CUADRADAS:

Un cuadrado perfecto es un número entero que es el cuadrado de otro. **Es un número cuya raíz cuadrada es un número natural**. Se llama cuadrado perfecto porque se puede ordenar en una figura cuadrada. Por ejemplo, 9 es un cuadrado perfecto ya que puede ser escrito como 3 × 3, y se puede ordenar del siguiente modo:

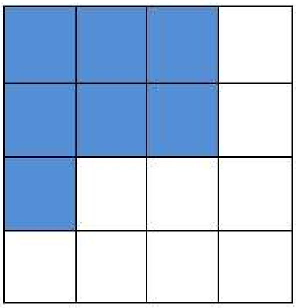


3^2 = 9 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{9} = 3$

Esta es la lista de los primeros cuadrados perfectos. No hay que memorizarlos, pero si saber cómo obtenerlos.

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$

Pero, ¿se puede construir un cuadrado con 7 cuadrados pequeños? La respuesta es NO ya que el número 7 no es un cuadrado perfecto y, por tanto, no tendrá raíz cuadrada exacta.



¿Serías capaz de calcular todos los cuadrados perfectos comprendidos entre 1 y 100?

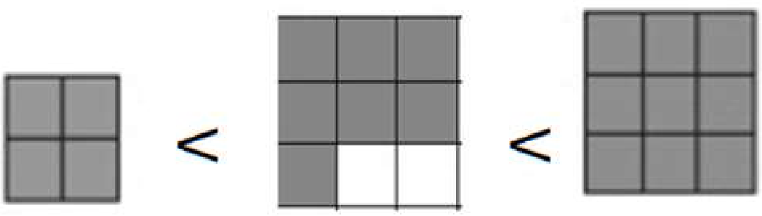
Ahora que ya entiendes qué es un cuadrado perfecto… ¿Qué crees que es un cubo perfecto?

ESTIMACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS:

Como ya sabemos existe un algoritmo para calcular una raíz cuadrada (y también disponemos de la calculadora, por supuesto). Imaginemos que necesitamos calcular el resultado de una raíz cuadrada que no es un cuadrado perfecto sin usar este algoritmo (que además es complicadillo) y sólo necesitamos un resultado aproximado. Haremos lo que se llama una ***estimación***.

Ejemplo: Calcularemos la raíz cuadrada de 7.

- 7 No es un cuadrado perfecto por lo que no podremos construir un cuadrado con 7 cuadraditos. La raíz de 7, por tanto, no es exacta.
- Sí que podemos construir un cuadrado con 4 cuadraditos y uno con 9 (fíjate en el dibujo) y por tanto podemos estimar que la raíz de 7 está comprendida entre las raíces de 4 ($\sqrt{4} = 2$) y de 9 ($\sqrt{9} = 3$).
- Hemos estimado, por tanto, que la raíz de 7 está comprendida entre 2 y 3. La raíz de 7 vale 2 con algo… (compruébalo con la calculadora).



$$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$$

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

Ejercicio Resuelto:

Con 195 árboles se quiere formar un cuadrado de filas y columnas.

a) ¿Cuántos árboles tiene que haber en cada lado? ¿Cuántos sobran?

b) ¿Cuántos más serían necesarios para formar un cuadrado de un árbol más de lado?

SOLUCIÓN: Como la raíz de 195 no es exacta, estimamos su parte entera y calculamos entre qué cuadrados perfectos se encuentra:

$$13^2 = 169$$
$$14^2 = 196$$

$$169 < 195 < 196$$

$$\sqrt{169} < \sqrt{195} < \sqrt{196}$$

$$13 < \sqrt{195} < 14$$

a) $\sqrt{195}$ tiene un valor comprendido entre 13 y 14 y, por tanto, cada lado solo podrá tener 13 árboles ya que con 14 árboles de lado no habría suficientes ya que $14^2 = 196$. Ya que $13^2 = 169$ sobran 26 árboles (195 – 169 = 26).

b) Sería necesario un árbol más para formar un cuadrado de un árbol más de lado (196 – 195 = 1).

Practicamos:

1. **Un cine de verano dispone de 625 sillas distribuidas en igual número de filas y de columnas. ¿Cuántas sillas hay en cada fila?**
2. **Una finca cuadrada tiene 900 m^2 de superficie. ¿Cuántos metros lineales de alambrada habría que comprar para cercarla?**
3. **Estima las raíces cuadradas de: 12, 28, 97, 125 y 384.**