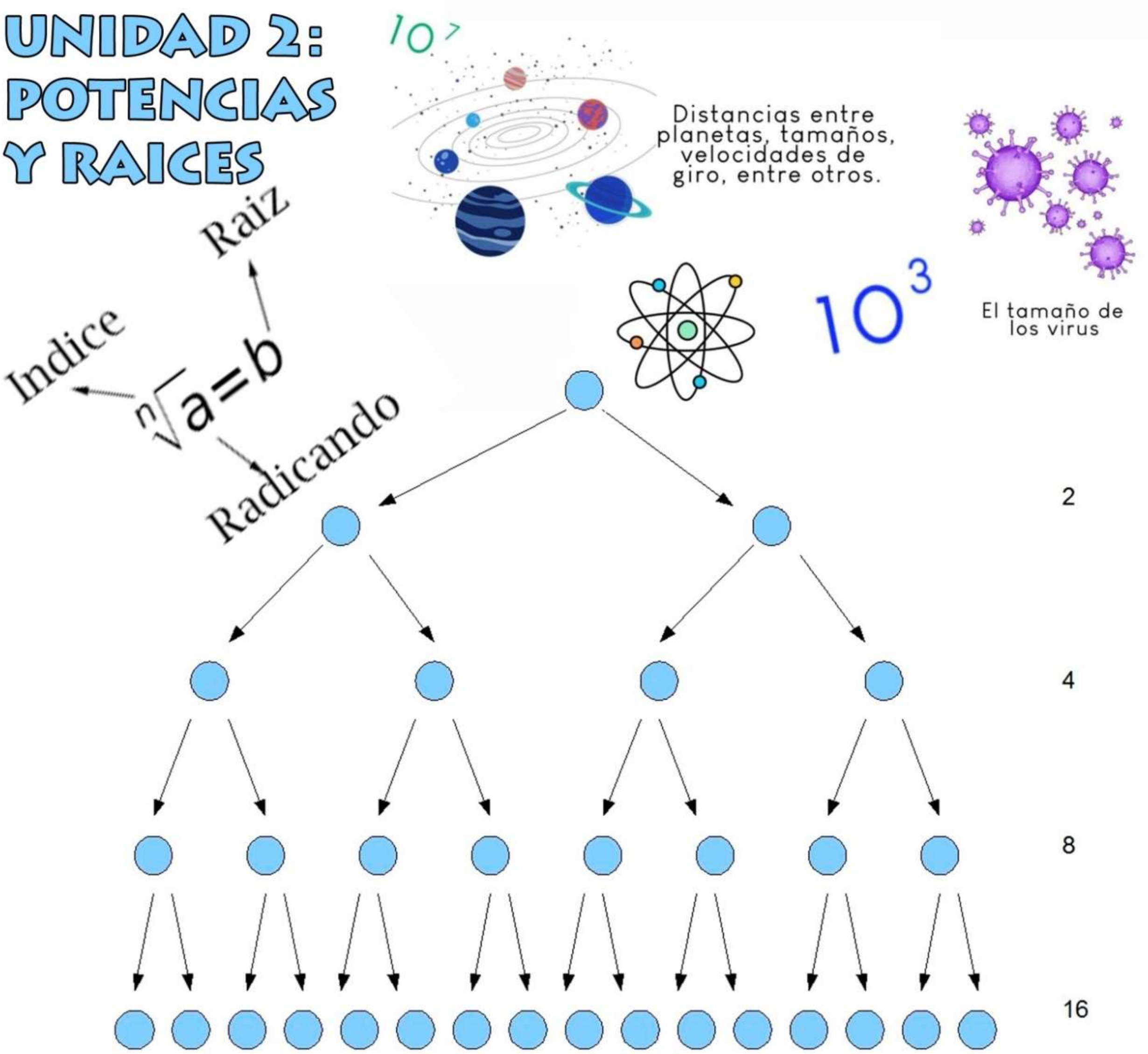
UNIDAD 2: POTENCIAS Y RAICES

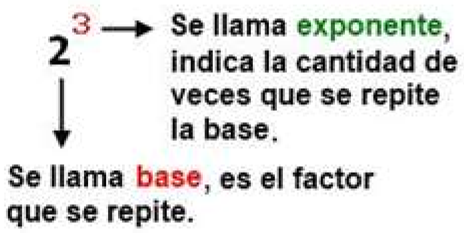


CONTENIDOS:

1. **Potencias de exponente natural y entero.**
2. **Propiedades de las potencias.**
3. **Operaciones con potencias.**
4. **Notación científica para representación de números grandes y pequeños. Uso de la calculadora.**

LAS POTENCIAS:

Una potencia no es que más una manera sencilla de simbolizar un producto de factores iguales, es decir, una multiplicación de un número por sí mismo. El número que se repite se llama **base** y el número de veces que se multiplica la base se llama **exponente**.



Por tanto, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Signo de una potencia:

Una potencia es una sucesión de productos iguales. De esta forma, si la base de la potencia tiene signo positivo y exponente es par, como es el caso del ejemplo, el resultado tiene signo positivo:

$$(+4)^4 = \underbrace{\underbrace{(+4) \times (+4)}_{+} \times \underbrace{(+4) \times (+4)}_{+}}_{+} = +256$$

En el caso de exponente par y base negativa, el resultado también tendría signo positivo:

$$(-4)^4 = \underbrace{\underbrace{(-4) \times (-4)}_{+} \times \underbrace{(-4) \times (-4)}_{+}}_{+} = +256$$

También puede ocurrir que el exponente sea impar y la base positiva. En este caso volveríamos a obtener un resultado con signo positivo.

$$(+4)^3 = \underbrace{\underbrace{(+4) \times (+4)}_{+} \times \underbrace{(+4)}_{+}}_{+} = +64$$

Un último caso serían las potencias con exponente impar y base negativa que da como resultado el signo negativo:

$$(-4)^3 = \underbrace{\underbrace{(-4) \times (-4)}_{+} \times \underbrace{(-4)}_{-}}_{-} = -\,64$$

Practicamos: **Señala el signo que tendrán las siguientes potencias y después calcula mentalmente su valor.**

a) $(+2)^3$
b) $(-2)^3$
c) $(-5)^3$
d) $(+3)^2$
e) $(-3)^2$
f) $(+6)^2$
g) $(+10)^3$
h) $(-10)^4$
i) $(-4)^3$
j) $(-1)^1$
k) $(-1)^2$
l) $(-1)^3$
m) $(-1)^4$
n) $(-1)^0$

¡¡¡CUIDADO CON LOS SIGNOS!!! Nos tenemos que fijar en los paréntesis ya que serán ellos lo que nos indicarán si el signo de la base está afectado por la potencia o no. En el tercer ejemplo el signo menos

no está afectado por la potencia. Cuando usemos la calculadora es muy importante que coloquemos correctamente los paréntesis o tendremos cálculos incorrectos.

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$$

$$-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$$

Es importante que entendamos el concepto de potencia como una multiplicación de factores iguales. Estos factores no tienen por qué ser números enteros, sino que pueden ser fracciones, letras o, en general, cualquier expresión. Fíjate en los ejemplos:

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$$

$$\left(\frac{-8}{5}\right)^3 = \left(\frac{-8}{5}\right) \cdot \left(\frac{-8}{5}\right) \cdot \left(\frac{-8}{5}\right)$$

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

$$(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y)$$

$$(2a - 5b)^4 = (2a - 5b) \cdot (2a - 5b) \cdot (2a - 5b) \cdot (2a - 5b)$$

Practicamos

1. Calcula mentalmente.

- **a)** $(-1)^{28}$
- **b)** $(-1)^{29}$
- **c)** $(-1)^{30}$
- **d)** $(-1)^{31}$

2. Escribe con todas sus cifras.

- **a)** $(-10)^{3}$
- **b)** $(+10)^{0}$
- **c)** $(-10)^{2}$
- **d)** $(-10)^{4}$
- **e)** $(+10)^{6}$
- **f)** $(-10)^{6}$

3. Calcula como en los ejemplos y observa las diferencias.

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$ $\qquad$ $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

- **a)** $(-2)^{4}$
- **b)** -2^{4}
- **c)** $(+2)^{4}$
- **d)** $(-2)^{3}$
- **e)** -2^{3}
- **f)** $(+2)^{3}$
- **g)** $(-5)^{2}$
- **h)** -5^{2}
- **i)** $(+5)^{2}$
- **j)** $(-3)^{3}$
- **k)** -3^{3}
- **l)** $(+3)^{3}$

4. Calcula como en el ejemplo y observa la diferencia.

$(3-4)^3 = (-1)^3 = -1$ $\qquad$ $3^3 - 4^3 = 27 - 64 = -37$

- **a)** $(5+3)^{2}$
- **b)** $(2-4)^{3}$
- **c)** $(2-3)^{4}$
- **d)** $5^{2} + 3^{2}$
- **e)** $2^{3} - 4^{3}$
- **f)** $2^{4} - 3^{4}$

5. Señala (sin desarrollar) el signo de las potencias (+ ó –):

a) $(+2)^{300}$

b) $(-2)^{301}$

c) $-(5)^{30}$

d) $(-3)^{200}$

e) $(-3)^{201}$

f) $(+61)^{25}$

g) $(-10)^{2000}$

h) $(-10)^{433}$

i) $-(-4)^{120}$

j) $(-1)^{100}$

k) $(-1)^{201}$

l) $-(1)^{301}$

m) $(-1)^{402}$

n) $(-1000)^{0}$

6. Efectúa las siguientes operaciones combinadas respetando SIEMPRE la jerarquía de las operaciones.

1) $2^3 - 5^2 + 4 \cdot 3$

2) $2^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot (3 - 5)$

3) $3 \cdot 2^3 - 5 + (4 - 2)^2$

4) $6^2 : 4 + 3 \cdot (9 - 5)$

5) $3^3 : 3 - 2 \cdot (3^2 - 4)$

6) $12^2 - 4 \cdot (3 - 15 : 3)$

7) $3 \cdot 2^3 - 5 + (-2)^2$

8) $3^3 : 3 : (-3) - 7^2$

9) $(9^2 : 3 + 5) \cdot 2 - 3^3$

10) $2^3 : 4 - 5^3 : (7 - 2)$

11) $2^4 : 2^2 + 8^2 \cdot 3$

12) $5 + 3^4 \cdot 2 + 6^2 : 3$

13) $12 : 2^2 + 6 \cdot (-2)$

14) $4^3 : 8 + 2^3 \cdot (4 \cdot 6 - 5 \cdot 3)$

15) $2^3 - 5^2 : (2 - 7)$

16) $2^3 : 1^2 + (8 - 6)^2 \cdot 3$

17) $2^4 : (-8) + 2 \cdot 4^2 - 1$

18) $2^3 - (5 - 3)^2 + 4 \cdot 3$

19) $12 : (2^2 + 8) + 6$

20) $[(8 - 6)^2 \cdot (9 - 7)^3] \cdot 3$

21) $[(7 - 4)^3 - (9 - 4)^2] : (-2)$

22) $3^3 : 3 : (-3) - (3^2 - 4) \cdot 2$

23) $3^4 \cdot 2 + 6^2 : 3$

24) $12 : 2^2 + 6 \cdot (28 - 3 \cdot 9)$

25) $48 + 2^3 \cdot (4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 6)$

26) $(2 - 4)^3 + 4 - 5^2 : (2 - 7)$

27) $2^3 : 1^2 + (8 - 6)^2 \cdot 3$

28) $2^4 : (-8) + 2 \cdot 6^2 - 1$

29) $2^3 - (5 - 3)^2 + 4 \cdot 3 : (-2)$

30) $12 : (2^2 + 8) + 6 \cdot (27 - 3 \cdot 9)$

OPERACIONES CON POTENCIAS Y SUS PROPIEDADES:

1) Potencia de un producto (producto de potencias con el mismo exponente): Dejamos el exponente y multiplicamos las bases.

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ Ej: $3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$

2) Potencia de un cociente (cociente de potencias con el mismo exponente): Dejamos el exponente y dividimos las bases.

$a^n : b^n = (a : b)^n$ Ej: $8^2 : 4^2 = (8 : 4)^2 = 2^2 = 4$

Algo con lo que ya deberíamos estar familiarizarnos es que los cocientes (divisiones) también se expresan con una fracción.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \text{Ej: } \frac{8^3}{5^3} = \left(\frac{8}{5}\right)^3$$

3) **Producto de potencias de la misma base:** Dejamos la base y sumamos los exponentes.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ Ej: $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$

4) **Cociente de potencias de la misma base:** Dejamos la base y restamos los exponentes.

$a^m : a^n = a^{m-n}$ Ej: $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2 = 9$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{Ej: } \frac{8^6}{8^3} = 8^{6-3} = 8^3$$

5) **Potencia de una potencia:** Dejamos la base y multiplicamos los exponentes.

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ Ej: $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6 = 15.625$

6) **Potencia de exponente cero**: la potencia de exponente 0 y base distinta de 0 vale siempre 1.

$a^0 = 1$ Ej: $4^0 = 1$ $(-4)^0 = 1$ $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

¿Sabes cuánto vale 0^0? Prueba a calcularlo en tu calculadora. ¿Qué apareceré en la pantalla? Durante el curso iremos aprendiendo a interpretar los distintos mensajes que aparecen en la calculadora (*Math Error, Syntax Error*, etc). En cuanto a 0^0 de momento diremos que aún no lo puedes calcular pero que no es ni 0 ni 1.

7) Potencias de exponente negativo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad Ej: 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \qquad Ej: \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$$

<u>Ampliación:</u> Potencias de exponente fraccionario:

Son una manera de expresar radicales.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad Ej: 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} =$$

Practicamos:

1. **Reduce a una única potencia utilizando las propiedades de las potencias y luego calcula el resultado:**

a) $5^3 \cdot 2^3$	d) $20^3 \cdot 5^3$	g) $21^4 : 7^4$
b) $4^2 \cdot 5^2$	e) $16^5 : 8^5$	h) $35^2 : 5^2$
c) $25^2 \cdot 4^2$	f) $18^3 : 6^3$	i) $100^3 : 50^3$

2. **Reduce utilizando las propiedades de las potencias.**

a) $5^2 \cdot 5^4$	g) $m^5 : m$
b) $3 \cdot 3^2$	h) $x^8 : x^4$
c) $2^6 : 2^2$	i) $a^5 \cdot a^5$
d) $3^8 : 3^5$	j) $m^7 \cdot m^2$
e) $10^7 : 10^6$	k) $x^2 \cdot x^6 \cdot x^3$
f) $a^{10} : a^6$	l) $10^5 \cdot 10^2 \cdot 10^3$

3. **Expresa en forma de producto de potencias las siguientes expresiones:**

a) $(2 \cdot 5)^6$	**c)** $(2 \cdot 8)^3$
b) $(3 \cdot 4)^2$	**d)** $(4 \cdot 6)^4$

4. **Expresa en forma de cociente de potencias las siguientes expresiones:**

a) $\left(\frac{18}{9}\right)^3$

b) $(8 : 4)^2$

c) $(10 : 5)^3$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$

e) $\left(\frac{-8}{3}\right)^3$

5. **Reduce a una única potencia.**

a) $(2^3)^7$

b) $(3^5)^3$

c) $(5^5)^3$

d) $(2^0)^2$

e) $(3^3)^4$

f) $(5^2)^{13}$

g) $(5^2)^3$

h) $(2^5)^2$

i) $(k^3)^3$

j) $(x^2)^0$

6. **Reduce a una única potencia:**

a) $(2^5 \cdot 3^5) : 6^5$

b) $(6^4 \cdot 3^4) : 9^4$

c) $(80^3 : 8^3) : 5^3$

d) $(48^2 : 2^2) : 6^2$

e) $(7^{12} : 7^{10}) \cdot 5^2$

f) $(8^2 : 2^2) \cdot 4^5$

g) $(5^2 \cdot 2^2) \cdot (10^4 : 10^2)$

h) $(8^2 \cdot 12^2) : (6^2 \cdot 8^2)$

i) $(9^3) : (18^6 : 2^3)$

j) $(3^3 \cdot 4^3) : (20^3 : 5^3)$

8. **Sustituye cada casilla por el signo "=" o "≠":**

a) $(4 + 1)^3 \square\ 4^3 + 1^3$

b) $(4 + 1)^3 \square\ 5^3$

c) $(6 - 2)^4 \square\ 6^4 - 2^4$

d) $7^3 \square\ (10 - 3)^3$

e) $10^2 \square\ 5^2 \cdot 2^2$

f) $10^4 \square\ 5^2 \cdot 2^2$

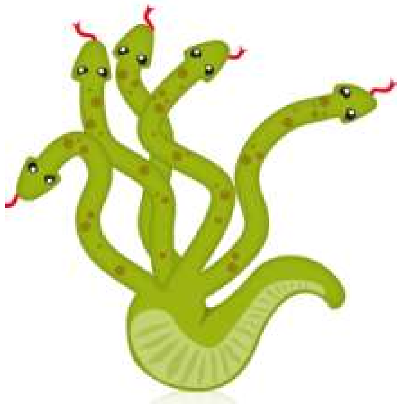
g) $(12 : 3)^2 \square\ 12^2 : 3^2$

h) $12^7 : 3^2 \square\ 4^5$

PROBLEMAS CON POTENCIAS:

1. Escribe en forma de potencia el número de bisabuelos de una persona. Escribe también el número de tatarabuelos.
2. En una papelería hay 4 estanterías con 8 baldas en cada una de ellas y sobre cada balda, 16 libros. Expresa en forma de potencia el total de libros que hay en la papelería.
3. Si un folio lo doblamos por la mitad, obtenemos 2 partes iguales. Si lo volvemos a doblar, obtenemos 4 partes iguales, y así sucesivamente. ¿Cuántas partes obtendremos si lo doblamos 10 veces?
4. Los alumnos de 2º ESO van a sembrar azucenas y tulipanes en el patio. Quieren colocarlos formando cuadrados y tienen 8 bulbos de azucenas y 20 de tulipanes. ¿Cuál es el máximo cuadrado que pueden formar con cada tipo de planta? ¿Cuántas les sobran? ¿Cuál es el mínimo número de bulbos que deben plantar para conseguir los cuadrados sin que sobre ninguno?

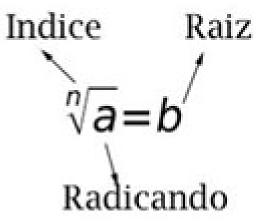
5. La Hidra de Lerna es un personaje mitológico que aparece en historias como la de las 12 pruebas de Hércules. Era un monstruo con 1 cabeza, pero si se le cortaba, le nacían 2 cabezas en su lugar. Si un héroe intentaba vencerla cortándole todas sus cabezas cada día, ¿cuántas cabezas tendría la Hidra el tercer día? ¿Y al cabo de 10 días?



LOS RADICALES (RAÍCES):

Las raíces son operaciones inversas de las potencias (por ejemplo, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado). Conociendo la **definición de radical** podremos calcular sencillamente raíces exactas y también podremos deducir cuando una raíz existe o no o cuando una raíz tiene soluciones múltiples.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$



Ejemplos:

$\sqrt{9}$ = 3 ⇔ 3^2 = 9

$\sqrt{25}$ = 5 ⇔ 5^2 = 25

$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

Seguro que te habrás dado cuenta de que el resultado de $(-3)^2$ también es 9. Efectivamente las raíces de índice par tienen dos soluciones (una positiva y otra negativa) ya que al elevar a una potencia a un número par siempre dará un número positivo.

$\sqrt{9}$ = - 3 ⇔ 3^2 = 9

$\sqrt{-9}$ = No existe (en realidad el resultado no pertenece al conjunto de los números reales).

⚠ **Las raíces negativas de índice impar no existen (en los conjuntos que conocemos hasta ahora porque ya verás en futuros cursos que sí que existen). La razón es muy sencilla: si elevas un número negativo a un exponente par siempre dará un número positivo.**

$$\sqrt[3]{27} = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \Leftrightarrow (-3)^3 = -27$$

⚠ **Las raíces de índice impar existen siempre y su solución es única.**

Practicamos:

1. Calcula, siempre que sea posible, las siguientes raíces.

a) $\sqrt{-8^2}$

b) $\sqrt{-9}$

c) $\sqrt{64}$

d) $\sqrt{-85}$

e) $\sqrt{(-36)^2}$

f) $\sqrt[3]{8}$

g) $\sqrt[3]{-125}$

h) $\sqrt[4]{-16}$

i) $\sqrt[4]{10000}$

j) $\sqrt[3]{-8^2}$

k) $\sqrt[3]{1}$

2. **Operaciones combinadas con potencias y raíces (seguiremos la jerarquía de operaciones que ya conocemos).**

a) $2 \cdot \sqrt[3]{125} + 2 \cdot 3$

b) $2 - 4 \cdot \sqrt{4} - 8 \cdot (3)^2$

c) $4 \cdot \sqrt{100} - 3 \cdot (- 2)^2$

d) $3 \cdot \sqrt{81} - (8 - 2)^2 : \sqrt{4}$

e) $4 - 2 \cdot [\sqrt{9} - (8 - 3)^2]$

f) $(6 - 4)^4 : (9 - \sqrt{25})^2$

g) $4 - [\sqrt{100} + (1 - 3)^2]$

h) $2 - [2 \cdot \sqrt{25}) - 6 \cdot (8 : 2)^3]$

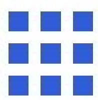
i) $2 \cdot [\sqrt{16}) - (6 - 2)^2] + 7$

j) $[(-16) : 8 - (4 - 5)^2] : (5 - 6 : 3)$

CUADRADOS PERFECTOS Y RAÍCES CUADRADAS:

Un cuadrado perfecto es un número entero que es el cuadrado de algún otro. Dicho de otro modo, **es un número cuya raíz cuadrada es un número natural**.

¿Te preguntarás por qué se llama cuadrado perfecto? Un número es un cuadrado perfecto si se puede ordenar en una figura cuadrada. Por ejemplo, 9 es un cuadrado perfecto ya que puede ser escrito como 3 × 3, y se puede ordenar del siguiente modo:

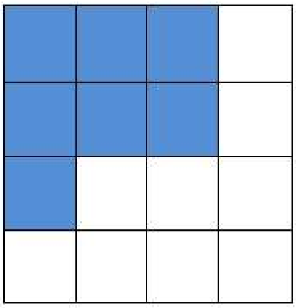


$3^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3$

Esta es la lista de los primeros cuadrados perfectos. No hay que memorizarlos, pero si saber cómo obtenerlos.

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$

¿Se puede construir un cuadrado con 7 cuadraditos pequeños? La respuesta es NO ya que el número 7 no es un cuadrado perfecto y, por tanto, no tendrá raíz cuadrada exacta.



¿Serías capaz de calcular todos los cuadrados perfectos comprendidos entre 1 y 100?

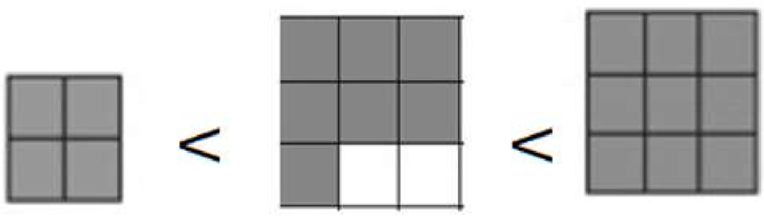
Ahora que ya entiendes qué es un cuadrado perfecto… ¿Qué crees que es un cubo perfecto?

ESTIMACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS:

Como ya sabemos existe un algoritmo para calcular una raíz cuadrada (y también disponemos de la calculadora, por supuesto). Imaginemos que necesitamos calcular el resultado de una raíz cuadrada que no es un cuadrado perfecto sin usar este algoritmo (que además es complicadillo) y sólo necesitamos un resultado aproximado. Haremos lo que se llama una ***estimación***.

Ejemplo: Calcularemos la raíz cuadrada de 7.

- 7 no es un cuadrado perfecto por lo que no podremos construir un cuadrado con 7 cuadraditos. La raíz de 7, por tanto, no es exacta.
- Sí que podemos construir un cuadrado con 4 cuadraditos y uno con 9 (fíjate en el dibujo) y por tanto podemos estimar que la raíz de 7 está comprendida entre las raíces de 4 ($\sqrt{4} = 2$) y de 9 ($\sqrt{9} = 3$).
- Hemos estimado, por tanto, que la raíz de 7 está comprendida entre 2 y 3. La raíz de 7 vale 2 con algo… (compruébalo con la calculadora).



$$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$$

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

Ejercicio Resuelto:

Con 195 árboles se quiere formar un cuadrado de filas y columnas.

a) ¿Cuántos árboles tiene que haber en cada lado? ¿Cuántos sobran?

b) ¿Cuántos más serían necesarios para formar un cuadrado con un árbol más en cada lado?

SOLUCIÓN: Como la raíz de 195 no es exacta, estimamos su parte entera y calculamos entre qué cuadrados perfectos se encuentra:

$$13^2 = 169$$
$$14^2 = 196$$

$$169 < 195 < 196$$

$$\sqrt{169} < \sqrt{195} < \sqrt{196}$$

$$13 < \sqrt{195} < 14$$

a) $\sqrt{195}$ tiene un valor comprendido entre 13 y 14 y, por tanto, cada lado solo podrá tener 13 árboles ya que con 14 árboles de lado no habría suficientes ya que $14^2 = 196$. Ya que $13^2 = 169$ sobran 26 árboles (195 – 169 = 26).

b) Sería necesario un árbol más para formar un cuadrado de un árbol más de lado (196 – 195 = 1).

Practicamos:

1. Un cine de verano dispone de 625 sillas distribuidas en igual número de filas y de columnas. ¿Cuántas sillas hay en cada fila?

2. Una finca cuadrada tiene 900 m^2 de superficie. ¿Cuántos metros lineales de alambrada habría que comprar para cercarla?

3. Estima las raíces cuadradas de: 12, 28, 97, 125 y 384.

4. Obtén las siguientes raíces, cuando sea posible:

a) $\sqrt{81}$	b) $\sqrt{-81}$	c) $\sqrt{-1}$
d) $\sqrt{0}$	e) $\sqrt{36}$	f) $\sqrt{100}$
g) $\sqrt{169}$	h) $\sqrt{144}$	i) $\sqrt{-81}$
j) $\sqrt{10000}$	k) $\sqrt{-10000}$	l) $\sqrt{324}$
m) $\sqrt{49}$	n) $\sqrt{7^2}$	o) $\sqrt{27^2}$
p) $\sqrt{2734^2}$	q) $\sqrt{A^2}$	r) $\sqrt{(3^2)^3}$

5. Calcula el valor de la base "x" en cada caso:

a. $x^2 = 25$	c. $x^{25} = 1$	e. $x^3 = 125$
b. $x^3 = 64$	d. $x^3 = 1\ 000$	f. $x^4 = 16$

6. Calcula y observa las diferencias:

a) $\sqrt{16+9}$ y $\sqrt{16}+\sqrt{9}$

b) $\sqrt{100-36}$ y $\sqrt{100}-\sqrt{36}$

c) $\sqrt{16-25}$ y $\sqrt{16}-\sqrt{25}$

NOTACIÓN CIENTÍFICA:

Hay ocasiones en las que trabajaremos con números muy grandes, como en astronomía, o muy pequeños, como en microbiología. La **notación científica** es una manera de representar un número utilizando potencias de base diez. Esta notación es muy útil a la hora de expresar fácilmente números muy grandes o muy pequeños.

En notación científica, los números se escriben como un producto:

- “a” es un número real mayor o igual que 1 y menor que 10. Recibe el nombre de **coeficiente.**
- “n” es un número entero y recibe el nombre de **exponente u orden de magnitud.**

⚠ Recordemos, en primer lugar, las potencias de base 10:

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$
$$10^3 = 1.000$$
$$10^4 = 10.000$$
$$10^5 = 100.000$$
$$10^6 = 1.000.000$$

⚠ **Recordemos el significado de las potencias de exponente negativo:**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \to 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Ej: $10^{-9} = \frac{1}{10^9}$ (es una división)

Por tanto:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

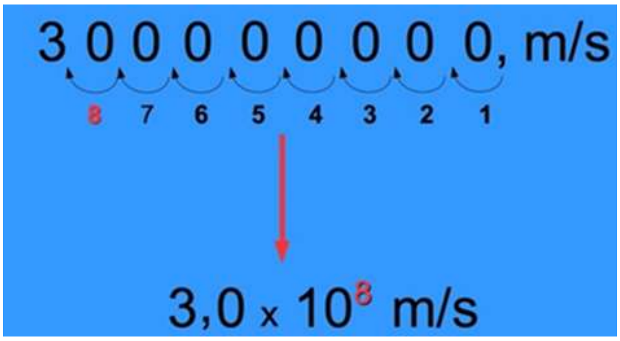
$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}\underbrace{01}_{2}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}\underbrace{001}_{3}$$

$$10^{-6} = 0{,}\underbrace{000001}_{6}$$

PROBLEMA RESUELTO 1: Expresa la velocidad de la luz, 300.000.000 m/s, en notación científica.

***Solución*:** 300.000.000 es un número entero, de manera que la coma decimal se encuentra al final del número (no es necesario indicarla). Para encontrar un número comprendido entre 1 y 10, se debe “mover” dicha coma 8 espacios (para obtener el número 3).

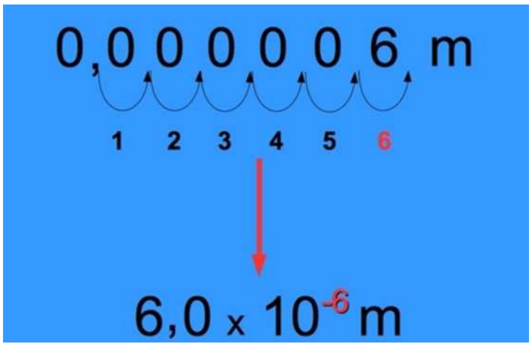


300.000.000 = $3'0 \times 10^8$ m/s = 3×10^8 m/s.

PROBLEMA RESUELTO 2: Expresa el diámetro de un glóbulo rojo (0,000006m) en notación científica.

Solución: La coma decimal se encuentra después del primer cero, de modo que se debe “desplazar” seis espacios hacia la derecha (para obtener el número 6).

$$0,000006 = \frac{6}{1.000.000} = 6 \cdot 10^{-6}$$



CUADRO RESUMEN

Número pequeños 0, … ⟶ Exponente negativo

Número grandes ⟶ Exponente positivo

$$0{,}004 = 0\,0\,0\,4, \times 10^{-3} = \mathbf{4 \times 10^{-3}}$$

$$0{,}25 = 0\,2,5 \times 10^{-1} = \mathbf{2,5 \times 10^{-1}}$$

$$0{,}000079 = 0\,0\,0\,0\,0\,7,9 = \mathbf{7,9 \times 10^{-5}}$$

$$59{,}4 = 5\,9\,4 \times 10^{1} = \mathbf{5,94 \times 10^{1}}$$

$$987{,}25 = 9\,8\,7\,2\,5 \times 10^{2} = \mathbf{9,8725 \times 10^{2}}$$

$$7500 = 7\,5\,0\,0, \times 10^{3} = \mathbf{7,500 \times 10^{3}}$$

Practicamos:

1. Escribe los siguientes números con todas sus cifras y, posteriormente, en notación científica:
   - **a)** Tres millones.
   - **b)** Doscientos millones.
   - **c)** Cuarenta mil.
   - **d)** Setecientos mil.
   - **e)** Treinta y cinco mil

2. Escribe los siguientes números en **notación científica** (redondeando los resultados con una sola cifra decimal). Comprueba con la calculadora que es correcto tu resultado.
   - a) 910.000.000
   - b) 6.300.000.000.000
   - c) 123,4
   - d) 0,000134
   - e) 0,000071
   - f) – 25.000
   - g) 3.700.000
   - h) 0,000000005
   - i) 0,023

3. El número 69´27·10^{-5} no está correctamente escrito en notación científica. Escríbelo correctamente y exprésalo en forma decimal.

4. Escribe correctamente los siguientes números en notación científica. Exprésalos a continuación en notación decimal.

a) $25 \cdot 10^{4}$

b) $943´2 \cdot 10^{8}$

c) $14 \cdot 10^{-4}$

d) $19´2 \cdot 10^{-2}$

5. ¿Qué planeta tiene mayor masa?

a) Júpiter ($1´9 \times 10^{27}$ kg).

b) Urano ($8´69 \times 10^{28}$ g).

c) La Tierra ($597´2 \times 10^{22}$kg)

6. Calcula tu edad en segundos utilizando la notación científica.

INVESTIGA:

Busca en internet los siguientes datos y exprésalos en notación científica (haz el redondeo que consideres oportuno):

a) La población mundial.

b) El radio de un átomo de oxígeno en metros.

c) Superficie aproximada de la tierra en metros cuadrados.

d) Altura del Burj Khalifa, en mm.

e) La edad de la persona que ostenta el record guiness en longevidad, expresada en minutos.

OPERACIONES CON NÚMEROS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA:

RECUERDA

Recordemos como multiplicar y dividir un número decimal por una potencia de 10:

- Para multiplicar se corre la coma del número decimal hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga el número por el que se está multiplicando.

  $9´34 \cdot 10 = 93´4$

  $9´34 \cdot 10^2 = 9´34 \cdot 100 = 934$

- En el caso de dividir se corre la coma hacia la izquierda.

  $9´34 : 10 = 0´934$

  $9´34 : 10^2 = 9´34 :100 = 0´0934$

✓ **Cociente y producto en notación científica:** Para multiplicar o dividir dos números expresados en notación científica, por un lado multiplicamos o dividimos la parte decimal y por el otro las potencias de base 10.

EXAMPLE

Por ejemplo:

$(4´25 \cdot 10^9) \cdot (5´6 \cdot 10^7) = (4´25 \cdot 5´6) \cdot (10^9 \cdot 10^7) = 23´8 \cdot 10^{16} = 2´38 \cdot 10^{17}$

$(4´25 \cdot 10^9) : (5´6 \cdot 10^7) = (4´25 : 5´6) \cdot (10^9 : 10^7) = 0´759 \cdot 10^2 = 75´9 \cdot 10^0$
$= 75´9$

- **<u>Potenciación en notación científica</u>:**

Ejemplo: $(3 \cdot 10^6)^2 = 3^2 \cdot (10^6)^2 = 9 \cdot 10^{12}$

- **<u>Suma y resta</u>**: Para sumar y restar dos números expresados en notación científica, debemos preparar los sumandos para que tengan la misma potencia de base 10 y así sacar factor común.

Por ejemplo:

$$1{,}43 \cdot 10^8 + 5{,}2 \cdot 10^7 = 14{,}3 \cdot 10^7 + 5{,}2 \cdot 10^7 = (14{,}3 + 5{,}2) \cdot 10^7 = 19{,}5 \cdot 10^7 = 1{,}95 \cdot 10^8$$

- **<u>Comparación:</u>** Dados dos números escritos en notación científica, es mayor el que tenga mayor orden de magnitud. Si tienen el mismo orden de magnitud será mayor el que tenga mayor coeficiente.

$1{,}43 \cdot 10^8 > 5{,}2 \cdot 10^7$ $\qquad$ $14{,}3 \cdot 10^7 > 5{,}2 \cdot 10^7$

Prefijos métricos:

El Sistema Internacional de Unidades (S.I) emplea prefijos para nombrar los múltiplos y submúltiplos de sus unidades. Estos prefijos preceden al nombre de la unidad al igual que sus símbolos. Por ejemplo, el prefijo “micro” representa 0.000001 en el en el S.I que en notación científica sería 10^{-6} y se expresa con el símbolo µ. En notación científica, los prefijos pueden sustituir al término $x10^{e}$ de manera que si quisiera expresar $5,6x10^{-6}$ m con su prefijo, se escribiría 5,6 µm (se lee micrómetro).

Prefijos del sistema internacional

	Factor	Nombre	Símbolo
MÚLTIPLOS	10^{24}	yotta	Y
	10^{21}	zetta	Z
	10^{18}	exa	E
	10^{15}	peta	P
	10^{12}	tera	T
	10^{9}	giga	G
	10^{6}	mega	M
	10^{3}	kilo	k
	10^{2}	hecto	h
	10^{1}	deca	da
SUBMÚLTIPLOS	10^{-1}	deci	d
	10^{-2}	centi	c
	10^{-3}	mili	m
	10^{-6}	micro	µ
	10^{-9}	nano	n
	10^{-12}	pico	p
	10^{-15}	femto	f
	10^{-18}	atto	a
	10^{-21}	zepto	z
	10^{-24}	yocto	y

Practicamos: Operaciones en notación científica.

Escribe en notación científica:

a) 12 000 000 000 =

b) 0.000 000 092 =

c) 31 940 000 =

d) 6 000 000 000 =

Escribe en notación normal:

a) 5.2×10^6 =

b) 1.24×10^8 =

c) 9.6×10^4 =

d) 8.092×10^7 =

Escribe en notación científica:

a) 4 598 000 000 =

b) 0.0967254 =

c) 329 000 000 =

d) 111 000 =

e) 0.000234 =

Desarrolla estos números escritos en notación científica:

a) $4.8 \cdot 10^8$ =

b) $8.32 \cdot 10^{-11}$ =

c) $5.659 \cdot 10^{-6}$ =

d) $7.925 \cdot 10^9$ =

Escribe en notación científica:

7 milmillonésimas =

la centésima parte
de una diezmilésima =

15 billones =

314 miles de millones =

Escribe en notación científica:

3 millonésimas =

la décima parte
de una milésima =

3 billonésimas =

5718 millones =

Calcula en notación científica:

a) $(3\cdot10^{8})\cdot(9\cdot10^{5}) =$

b) $(4.3\cdot10^{-6})\cdot(7\cdot10^{-4}) =$

c) $(1.8\cdot10^{8}) : (6\cdot10^{-4}) =$

d) $(1.6\cdot10^{16}) : (2\cdot10^{7}) =$

Calcula en notación científica:

a) $(5.2\cdot10^{6}) + (2\cdot10^{5}) =$

b) $(7.3\cdot10^{5})+(1.1\cdot10^{4}) =$

c) $(1.6\cdot10^{9}) - (3\cdot10^{7}) =$

d) $(3.62\cdot10^{-8}) + (4.8\cdot10^{-9}) =$

Practicamos:

1. Realiza las siguientes operaciones en **NOTACIÓN CIENTÍFICA** y redondeando los números a **dos cifras decimales**.

Usa la calculadora para comprobar el resultado final.

a) $(3{,}72\cdot10^{11})\cdot(14{,}3\cdot10^{-7})$

b) $(10´36\cdot10^{9}) : (1{,}2\cdot10^{-7})$

c) $(1{,}46\cdot10^{5}) + (9{,}2\cdot10^{4})$

d) $(2{,}96\cdot10^{6}) - (743{,}5\cdot10^{5})$

e) $(2{,}56\cdot10^{4}) + (43{,}5\cdot10^{2})\cdot(4{,}3\cdot10^{-5})$

f) $(0´36\cdot10^{9}) : (1{,}2\cdot10^{-7}) - (3{,}7\cdot10^{-10})\cdot(14{,}3\cdot10^{2})$

g) $3{,}45\cdot10^{12}+6{,}3\cdot10^{11}$

h) $4{,}56\cdot10^{-11}-1{,}6\cdot10^{-10}$

i) $\dfrac{2{,}35\cdot10^{-23}}{2{,}5\cdot10^{-18}}$

2. El tamaño de un virus es de $2'5 \cdot 10^{-4}$ mm

a) ¿Cuántos virus puestos en fila son necesarios para rodear el ecuador de la Tierra si sabemos que mide 40.075 Km.

b) ¿Cuántos metros mide un virus?

c) ¿Cuántos virus cabrían alineados al borde de tu pupitre?

3. El tamaño de una determinada bacteria es de aproximadamente $2'5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántas bacterias puestas en fila son necesarias para rodear totalmente un pupitre que mide 76 cm de largo y 60 cm de ancho?

4. La velocidad de crecimiento del cabello humano es $1'6 \cdot 10^{-8}$ km/h. ¿Cuántos centímetros crece el pelo en un mes? ¿Y en un año?

5. La masa de la Luna es de $7'34 \cdot 10^{23}$ kg y la de la Tierra es de $5'98 \cdot 10^{24}$ kg. ¿A cuántas lunas equivale la masa de la Tierra?