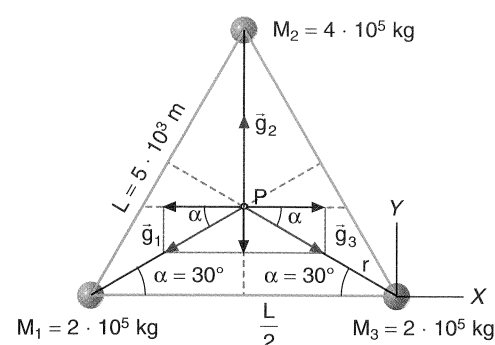


SOLUCIÓN DE EJERCICIOS E PROBLEMAS

Tres masas de $2 \cdot 10^5 \text{ kg}$, $4 \cdot 10^5 \text{ kg}$ e $2 \cdot 10^5 \text{ kg}$ están situadas nos vértices dun triángulo equilátero de $5 \cdot 10^3 \text{ m}$ de lado. Calcula:

- O campo gravitacional no ortocentro do triángulo.
- A forza que actuaría sobre unha masa de $3 \cdot 10^3 \text{ kg}$ ao situarse neste punto.
- O potencial gravitacional neste punto.
- A enerxía potencial gravitacional que adquiriría unha masa de $3 \cdot 10^3 \text{ kg}$ ao situarse nese punto.

— Datos:



O ortocentro é o punto P onde se cortan as alturas do triángulo. Calculamos a distancia deste punto a cada unha das masas:

$$\cos \alpha = \frac{L}{2r} ; r = \frac{L}{2 \cos \alpha} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \text{ m}}{\cos 30^\circ} = 2,9 \cdot 10^3 \text{ m}$$

- Calculamos o módulo do campo gravitacional debido a cada unha das tres masas:

$$g_1 = G \frac{M_1}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{2 \cdot 10^5 \text{ kg}}{(2,9 \cdot 10^3 \text{ m})^2}$$

$$g_1 = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ N/kg}$$

$$g_2 = G \frac{M_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{4 \cdot 10^5 \text{ kg}}{(2,9 \cdot 10^3 \text{ m})^2}$$

- Calcula, para o sistema de masas da figura: a) a intensidade do campo gravitacional no punto P ; b) o módulo da forza que actuaría sobre unha masa de 100 kg ao situarse neste punto; c) o potencial gravitacional no punto P ; d) a enerxía potencial gravitacional que adquiriría unha masa de 100 kg ao situarse neste punto.

Sol.: a) $3,8 \cdot 10^{-11} \text{ N/kg}$; b) $3,8 \cdot 10^{-9} \text{ N}$; c) $-8,1 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$; d) $-8,1 \cdot 10^{-7} \text{ J}$

$$g_2 = 3,2 \cdot 10^{-12} \text{ N/kg}$$

$$g_3 = g_1 = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ N/kg}$$

O campo gravitacional resultante é a suma vectorial de $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ e $\vec{g}_3$.

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

$$\vec{g} = -g_1 \cos \alpha \vec{i} - g_1 \sin \alpha \vec{j} + g_2 \vec{j} + g_3 \cos \alpha \vec{i} - g_3 \sin \alpha \vec{j}$$

Tendo en conta que $g_3 = g_1$, resulta:

$$\vec{g} = (-g_1 \cos \alpha + g_3 \cos \alpha) \vec{i} + (-g_1 \sin \alpha + g_2 - g_3 \sin \alpha) \vec{j}$$

$$\vec{g} = 0 \vec{i} + (-2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \sin 30^\circ + 3,2 \cdot 10^{-12}) \vec{j} \text{ N/kg}$$

$$\vec{g} = 1,6 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ N/kg}$$

- Calculamos a forza que actuaría sobre a masa m :

$$\vec{F} = m \vec{g} = 3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 4,8 \cdot 10^{-9} \vec{j} \text{ N}$$

- Calculamos o potencial gravitacional debido a cada unha das tres masas:

$$V_1 = G \frac{M_1}{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{2 \cdot 10^5 \text{ kg}}{2,9 \cdot 10^3 \text{ m}}$$

$$V_1 = -4,6 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$$

$$V_2 = G \frac{M_2}{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{4 \cdot 10^5 \text{ kg}}{2,9 \cdot 10^3 \text{ m}}$$

$$V_2 = -9,2 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$$

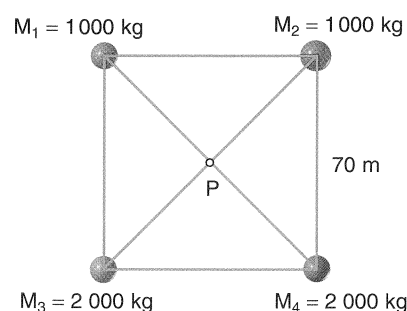
$$V_3 = V_1 = -4,6 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$$

O potencial gravitacional resultante é a suma de V_1 , V_2 e V_3 .

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = -1,8 \cdot 10^{-8} \text{ J/kg}$$

- Calculamos a enerxía potencial gravitacional que adquiriría a masa m :

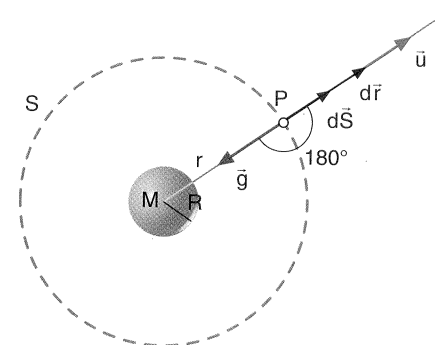
$$E_p = m V = 3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot (-1,8 \cdot 10^{-8} \text{ J/kg}) = -5,4 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$



B Aplica o teorema de Gauss para determinar o campo e o potencial gravitacionais creados por unha codia esférica de raio R e masa M nun punto exterior e nun punto interior.

— Punto exterior ($r > R$)

O campo nun punto exterior determínase da mesma maneira que o dunha esfera maciza. Para iso eliximos como superficie gaussiana, S , unha esfera concéntrica coa distribución de masa e que pase polo punto P onde calculamos o campo.



Por simetría, o campo gravitacional $\vec{g}$ é perpendicular á superficie S en cada un dos seus puntos e o seu módulo é constante sobre S :

$$\vec{g} \cdot d\vec{S} = g dS \cos 180^\circ = -g dS$$

Calculamos o fluxo gravitacional a través de S :

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S -g dS = -g \int_S dS = -gS = -g 4\pi r^2$$

Aplicamos o teorema de Gauss para calcular o campo gravitacional:

$$\Phi = -4\pi GM$$

$$-g 4\pi r^2 = -4\pi GM$$

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

Polo tanto, o vector campo gravitacional é:

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}$$

- Calcula o campo e o potencial gravitacionais creados por unha codia esférica de $0,5 \text{ m}$ de raio e 1000 kg de masa nun punto situado a unha distancia do seu centro igual a: a) $1,5 \text{ m}$; b) $0,25 \text{ m}$.

Sol.: a) $3 \cdot 10^{-8} \text{ N/kg}$, $-4,4 \cdot 10^{-8} \text{ J/kg}$; b) 0 N/kg , $-1,3 \cdot 10^{-7} \text{ J/kg}$

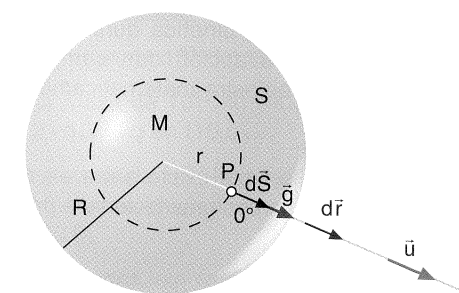
Calculamos o potencial gravitacional a partir do campo:

$$V = \int_r^\infty \vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty -G \frac{M}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty -G \frac{M}{r^2} dr = -G \frac{M}{r}$$

O campo e o potencial gravitacionais creados por unha codia esférica nun punto exterior son os que crearía unha masa puntual do mesmo valor que a codia esférica situada no centro desta.

— Punto interior ($r < R$)

Elizimos como superficie gaussiana, S , unha esfera concéntrica coa distribución de masa e que pase polo punto P onde calculamos o campo.



Por simetría, o vector $\vec{g}$ debe ser perpendicular á superficie S en todos os seus puntos e o seu módulo debe ser constante sobre S :

$$\vec{g} \cdot d\vec{S} = g dS \cos 0^\circ = g dS$$

Calculamos o fluxo gravitacional a través de S :

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S g dS = g \int_S dS = gS = g 4\pi r^2$$

Aplicamos o teorema de Gauss tendo en conta que a masa interior á esfera gaussiana é cero:

$$\Phi = -4\pi GM = 0 ; -g 4\pi r^2 = 0 ; g = 0$$

O campo gravitacional no interior dunha codia esférica é nulo. Isto significa que o potencial gravitacional é constante nesta rexión:

$$V = \int_r^\infty \vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_r^R \vec{g} \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{g} \cdot d\vec{r} =$$

$$= 0 + \int_r^\infty -G \frac{M}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_R^\infty -G \frac{M}{r^2} dr = -G \frac{M}{R}$$

- Determina o campo e o potencial gravitacionais creados por unha lámina plana delgada e indefinida de densidade superficial igual a σ . Para iso, aplica o teorema de Gauss sobre unha superficie cilíndrica de caras paralelas á lámina e cortada por esta.

Sol.: $g = 2\pi G\sigma$; $V = 2\pi G\sigma z$

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Pensa e resolve

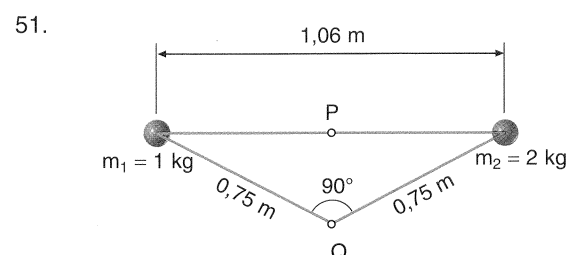
36. Describ os modelos do Universo propostos por Ptolomeo (xeocéntrico) e por Copérnico (heliocéntrico).
37. Enuncia as leis de Kepler.
38. Enuncia a lei da gravitación universal e explica as características principais das forzas gravitacionais.
39. Explica que é un campo de forzas e pon exemplos.
40. Explica que relación existe entre a enerxía potencial e a enerxía cinética dunha partícula que se move baixo a acción dun campo de forzas conservativo. Demostra matematicamente esta relación.
41. Explica que diferenza existe entre as magnitudes intensidade do campo gravitacional e potencial gravitacional.
42. Que relación existe entre o traballo do campo gravitacional e a diferenza de potencial gravitacional?
43. Ao separar dúas masas, aumenta ou diminúe a súa enerxía potencial gravitacional? Cal é o signo do traballo realizado polo campo gravitacional?
44. Explica que elementos se utilizan para representar graficamente un campo de forzas como o gravitacional.
45. Cal é o significado físico da magnitude fluxo gravitacional?

Practica o aprendido

46. Calcula a forza con que se atraen un caderno de 150 g e un libro de 200 g, supostos puntuais, se están separados por unha distancia de 10 cm.
Sol.: $2 \cdot 10^{-10}$ N
47. Determina a distancia á que se encontran dúas masas puntuais de 10 kg cada unha se se atraen cunha forza de 10^{-5} N.
Sol.: $2,6 \cdot 10^{-2}$ m
48. Calcula a masa de dúas partículas iguais que se atraen cunha forza de 10^{-4} N cando están separadas por unha distancia de 3 mm.
Sol.: 3,7 kg

49. Calcula o campo e o potencial gravitacionais que crea unha masa puntual de 2 kg a 50 cm de distancia.
Sol.: $5,3 \cdot 10^{-10}$ N/kg; $-2,7 \cdot 10^{-10}$ J/kg

50. Determina o campo gravitacional creado polo sistema da figura nos puntos P e Q.
Sol.: $2,3 \cdot 10^{-10}$ N/kg; $2,8 \cdot 10^{-10}$ N/kg



- Calcula a enerxía potencial dun sistema de dúas masas puntuais de 0,5 kg e 0,75 kg separadas por unha distancia de 2 m.

Sol.: $-1,2 \cdot 10^{-11}$ J

52. Calcula o potencial gravitacional que crea unha masa puntual de 450 g situada a unha distancia de 50 cm.

— Que enerxía potencial gravitacional adquire unha masa de 3 g ao situarse neste punto?

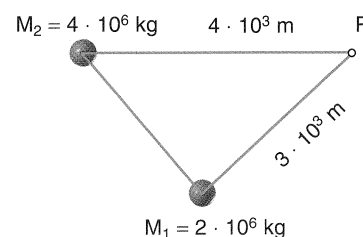
Sol.: $-6,0 \cdot 10^{-11}$ J/kg; $-1,8 \cdot 10^{-13}$ J

53. Determina o valor da masa que crea un potencial gravitacional de $-5 \cdot 10^{-9}$ J/kg a unha distancia de 2 m.

Sol.: 149, 9 kg

54. Calcula o potencial gravitacional creado polo sistema da figura no punto P.

— Que enerxía potencial gravitacional adquire unha masa de 500 kg ao situarse neste punto?



Sol.: $-1,1 \cdot 10^{-7}$ J/kg; $-5,5 \cdot 10^{-5}$ J

55. Calcula: a) o potencial gravitacional creado por unha masa puntual $M = 2$ kg a unha distancia de 1 m e a unha distancia de 40 cm; b) o traballo que realiza o campo gravitacional para trasladar unha segunda masa $m = 500$ g desde o primeiro punto ata o segundo.
Sol.: a) $-1,3 \cdot 10^{-10}$ J/kg, $-3,3 \cdot 10^{-10}$ J/kg; b) $1,0 \cdot 10^{-10}$ J

56. Calcula o campo e o potencial gravitacionais que unha esfera de 500 m de raio e 6000 kg de masa crea nun punto situado a 300 m da súa superficie.
Sol.: $6,3 \cdot 10^{-13}$ N/kg; $-5,0 \cdot 10^{-10}$ J/kg

57. Catro partículas iguais de 1 kg de masa están situadas nos vértices dun cadrado de 2 m de lado. Determina:

- a) O campo gravitacional no centro do cadrado.
- b) O módulo da forza gravitacional que experimenta cada partícula debido á presenza das outras tres.
- c) A enerxía potencial gravitacional dunha partícula debida á presenza das outras tres.

Sol.: a) 0 N/kg; b) $3,2 \cdot 10^{-11}$ N; c) $-8,9 \cdot 10^{-11}$ J

AVALIACIÓN

1. Que significa que un campo de forzas é conservativo? É conservativo o campo gravitacional?
2. Por que o potencial gravitacional e a enerxía potencial gravitacional son sempre negativos? Que significado físico ten este signo?
3. Que relación existe entre o campo e o potencial gravitacionais?
4. É posible que dous observadores dean para o mesmo corpo enerxías potenciais diferentes e ambos os dous teñan razón?
5. Unha masa puntual de 50 kg está situada na orixe de coordenadas. Calcula:
 - a) O campo gravitacional no punto (3, 4) m.
 - b) A forza que actuaría sobre unha masa de 20 kg ao situarse neste punto.
 - c) O potencial gravitacional nese punto.
 - d) A enerxía potencial gravitacional que adquire unha masa de 20 kg ao situarse nese punto.

Sol.: a) $1,3 \cdot 10^{-10}$ N/kg; b) $2,6 \cdot 10^{-9}$ N; c) $-6,7 \cdot 10^{-10}$ J/kg; d) $-1,3 \cdot 10^{-8}$ J

58. Demostra que a forza elástica dun resorte é conservativa e deduce a expresión da enerxía potencial elástica.



59. Busca en Internet representacións gráficas de liñas de forza e superficies equipotenciais no caso de dúas ou tres masas diferentes. Cos debuxos encontrados prepara unha presentación mediante un programa informático adecuado.
60. Mediante algún programa adecuado para realizar gráficas representa graficamente a variación do potencial gravitacional ao longo do eixe de abscisas nos seguintes casos:
 - a) Unha masa de 10^{11} kg situada en (0,0).
 - b) Unha masa de 10^{11} kg situada en (0,0) e outra de $2 \cdot 10^{11}$ kg en (10,0).
 - c) Unha masa de 10^{11} kg situada en (0,0), unha de $2 \cdot 10^{11}$ kg en (10,0) e unha terceira de $3 \cdot 10^{11}$ kg en (50,0).

As coordenadas exprésanse en metros.

6. Determina o valor do módulo do campo gravitacional da Lúa na súa superficie. ($M_L = 7,47 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1740$ km)

Sol.: 1,6 N/kg

7. Calcula o valor do potencial gravitacional no punto medio do segmento que une dúas partículas de masas 12 g e 18 g separadas por 1 cm.

Sol.: $-4,0 \cdot 10^{-10}$ J/kg

8. En tres dos vértices dun cadrado de 5 m de lado dispóñense outras tantas masas de 12 kg. Calcula: a) o campo gravitacional no cuarto vértice; b) o traballo realizado polo campo para levar un corpo de 12 kg desde ese vértice ata o centro do cadrado.

Sol.: a) $6,1 \cdot 10^{-11}$ N/kg; b) $3,1 \cdot 10^{-9}$ J

9. Unha masa desprázase nun campo gravitacional desde un lugar no que a súa enerxía potencial vale -80 J ata outro onde vale -160 J. Cal destes resultados é o traballo realizado polo campo?

a) -80 J b) 80 J c) -240 J

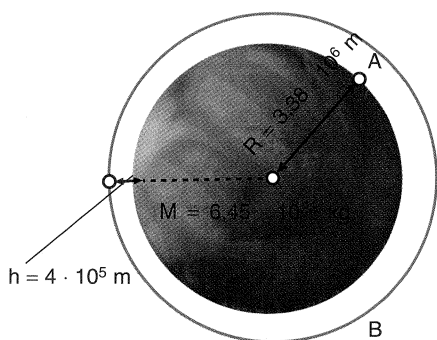
RESOLUCIÓN DE EXERCICIOS E PROBLEMAS

A O punto A está situado na superficie de Marte e o punto B, a 400 km sobre a superficie. Calcula:

- A intensidade do campo gravitacional nos puntos A e B.
- O módulo da aceleración da gravidade nestes puntos.
- O módulo da forza con que o planeta atrae unha masa de 500 kg situada nos devanditos puntos.
- O valor do potencial gravitacional nos puntos A e B.
- A enerxía potencial gravitacional dunha masa de 500 kg situada neses puntos.

(Masa de Marte: $M_M = 6,45 \cdot 10^{23}$ kg; raio de Marte: $R_M = 3380$ km)

— Datos:



- Calculamos a intensidade do campo gravitacional.

No punto A:

$$g_A = G \frac{M_M}{R_M^2}$$

$$g_A = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6,45 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(3,38 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 3,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

No punto B:

$$g_B = G \frac{M_M}{r^2} = G \frac{M_M}{(R_M + h)^2}$$

- O punto P está situado a 500 km sobre a superficie da Lúa. Calcula: a) a intensidade do campo gravitacional en P; b) a aceleración da gravidade en P; c) a forza con que a Lúa atrae un obxecto de 200 kg situado en P. ($M_L = 7,47 \cdot 10^{22}$ kg ; $R_L = 1,74 \cdot 10^6$ m)

Sol.: a) 1,0 N/kg; b) 1,0 m/s²; c) 200 N

$$g_B = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6,45 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{[(3,38 + 0,4) \cdot 10^6]^2 \text{ m}^2} = 3,0 \text{ N/kg}$$

- O valor da aceleración da gravidade coincide co da intensidade do campo.

No punto A: $g_A = 3,8 \text{ N/kg} = 3,8 \text{ m/s}^2$

No punto B: $g_B = 3,0 \text{ N/kg} = 3,0 \text{ m/s}^2$

- Calculamos o módulo da forza con que o planeta atrae a masa m.

No punto A: $F_A = mg_A = 500 \text{ kg} \cdot 3,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1900 \text{ N}$

No punto B: $F_B = mg_B = 500 \text{ kg} \cdot 3,0 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1500 \text{ N}$

- Calculamos o valor do potencial gravitacional.

No punto A:

$$V_A = -G \frac{M_M}{R_M}$$

$$V_A = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6,45 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{3,38 \cdot 10^6 \text{ m}} = -1,27 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$$

No punto B:

$$V_B = -G \frac{M_M}{r} = -G \frac{M_M}{(R_M + h)}$$

$$V_B = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6,45 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(3,38 \cdot 10^6 + 0,4 \cdot 10^6) \text{ m}} = -1,14 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$$

- Calculamos a enerxía potencial gravitacional da masa m.

No punto A:

$$Ep_A = mV_A = 500 \text{ kg} \cdot \left(-1,27 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) = -6,35 \cdot 10^9 \text{ J}$$

No punto B:

$$Ep_B = mV_B = 500 \text{ kg} \cdot \left(-1,14 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) = -5,70 \cdot 10^9 \text{ J}$$

- Unha nave espacial de 4800 kg encóntrase nun punto P a 3400 km da superficie terrestre. Calcula: a) o potencial gravitacional en P; b) a enerxía potencial gravitacional da nave. (Masa da Terra: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; raio da Terra: $R_T = 6370$ km)

Sol.: a) $-4,1 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$; b) $-1,97 \cdot 10^{11} \text{ J}$

B Deséxase lanzar un foguete desde a Terra para levar un satélite de 700 kg de masa a unha altura de 1500 km sobre a superficie. Calcula:

- A intensidade do campo gravitacional terrestre a esta altura.
- A velocidade final que debe alcanzar o satélite para que describa unha órbita circular.
- O período de revolución do satélite.
- A súa enerxía mecánica de translación.

(Masa e raio da Terra: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m)

— Datos: $m = 700$ kg ; $h = 1500$ km

$M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m

$r = R_T + h = (6,37 + 1,50) \cdot 10^6 \text{ m} = 7,87 \cdot 10^6 \text{ m}$

- Calculamos a intensidade do campo gravitacional:

$$g = G \frac{M_T}{r^2}$$

- Un satélite describe unha órbita circular de raio $r = 1,5 R_T$ arredor da Terra. a) Representa as forzas que actúan sobre o satélite; b) calcula a súa velocidade orbital; c) calcula o seu peso na órbita se pesa 8330 N na superficie terrestre.

Sol.: b) $6,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$; c) 3702,2 N

C Déixase unha partícula con velocidade inicial nula nun punto situado a 570 km sobre a superficie da Terra. Calcula: a) a aceleración da gravidade nese punto; b) a velocidade con que a partícula chegará á superficie da Terra.

— Datos: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m

$r_A = R_T + h_A = (6,37 + 0,57) \cdot 10^6 \text{ m} = 6,94 \cdot 10^6 \text{ m}$

$r_B = R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

- A aceleración da gravidade é igual á intensidade do campo gravitacional terrestre:

$$g_A = G \frac{M_T}{r_A^2}$$

- Un corpo que na Terra pesa 735 N cae desde unha altura de 50 km sobre a superficie lunar. Determina: a) a masa do corpo e o seu peso na Lúa; b) a velocidade do corpo cando chega á superficie. (Masa e raio da Lúa: $M_L = 0,01 M_T$; $R_L = 0,25 R_T$)

Sol.: a) 75 kg, 117,6 N; b) 390,5 m/s

$$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,94 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 8,28 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- A velocidade final do satélite debe ser igual á velocidade orbital:

$$v = \sqrt{G \frac{M_T}{r}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{7,87 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7,1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

- Calculamos o período de revolución do satélite:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 7,87 \cdot 10^6 \text{ m}}{7,1 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 7,0 \cdot 10^3 \text{ s}$$

- Calculamos a enerxía mecánica de translación:

$$E = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 700 \text{ kg}}{7,87 \cdot 10^6 \text{ m}} = -1,77 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

- A velocidade de xiro dun satélite terrestre con raio orbital igual ao raio terrestre, $r = R_T$, denomínase primeira velocidade cósmica. Determina o valor desta velocidade e o período de revolución correspondente.

Sol.: $7,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$; $5,1 \cdot 10^3 \text{ s}$

$$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,94 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 8,28 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- Aplicamos o principio de conservación da enerxía mecánica para determinar a velocidade da partícula ao chegar á superficie da Terra:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

$$0 - \frac{GM_T m}{r_A} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{GM_T m}{r_B}$$

$$v_B = \sqrt{2 GM_T \left(-\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} \right)} = \sqrt{\frac{2 GM_T (r_A - r_B)}{r_A r_B}}$$

Substituíndo os datos do enunciado, obtemos:

$$v_B = 3,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

- Lánzase un proxectil verticalmente cara a arriba desde a superficie dun astro cunha velocidade de 750 km/h. Determina: a) a relación entre o peso do corpo no astro e na Terra; b) a altura máxima alcanzada polo proxectil. (Masa do astro: $M_A = 324440 M_T$; raio do astro: $R_A = 108 R_T$)

Sol.: a) $p_A = 27,8 p_T$; b) 79 m

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Pensa e resolve

31. Contesta razoadamente as preguntas:

- a) Varía a aceleración da gravidade coa altura sobre a superficie da Terra?
b) Ten o mesmo valor o peso dun corpo na Terra que na Lúa?

32. Explica por que o valor da aceleración da gravidade e o da intensidade do campo gravitacional terrestre coinciden en cada punto.

33. Explica a diferenza entre peso e masa.

34. Repasa na páxina 65 como representar un campo gravitacional. Despois, representa o campo gravitacional terrestre.

35. Un corpo elévase certa altura sobre a superficie da Terra. Di se neste proceso o corpo gaña ou perde enerxía potencial gravitacional.

— Que significa a ganancia ou a perda de enerxía potencial gravitacional?

36. Explica por que un satélite xeoestacionario ten unha posición fixa respecto da Terra.

37. Explica que tipos de órbitas pode ter un satélite en función do signo da súa enerxía mecánica.

— Que condición debe cumprir un corpo para abandonar o campo gravitacional terrestre?

38. Razoa por que a traxectoria dos planetas arredor do Sol debe ser plana.

Practica o aprendido

39. Determina o valor da gravidade a unha altura de 450 km sobre a superficie terrestre. (Masa e raio da Terra: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $R_T = 6370$ km; gravidade ao nivel do mar: $g_0 = 9,8$ m/s²)

Sol.: 8,57 m/s²

40. Calcula o peso dun obxecto de 25 kg de masa situado: a) sobre a superficie da Terra; b) a unha altura de 3000 km sobre a superficie.

Sol.: a) 245 N; b) 113,2 N

41. Un obxecto pesa 19,6 N sobre a superficie terrestre. Calcula: a) a súa masa na superficie da Terra; b) a súa masa e o seu peso na superficie da Lúa. (Masa da Lúa: $M_L = 7,47 \cdot 10^{22}$ kg; raio da Lúa: $R_L = 1,74 \cdot 10^6$ m)

Sol.: a) 2 kg; b) 2 kg, 3,3 N

42. Determina a que distancia da superficie da Terra a aceleración da gravidade é igual ás dúas terceiras partes da gravidade na superficie.

Sol.: $1,43 \cdot 10^6$ m

43. Calcula a enerxía potencial gravitacional dun satélite artificial de 600 kg de masa que está situado nunha órbita de 10 000 km de raio arredor da Terra.

Sol.: $-2,39 \cdot 10^{10}$ J

44. Determina a que distancia da superficie da Terra o potencial gravitacional vale $-2 \cdot 10^7$ J/kg.

Sol.: $1,35 \cdot 10^7$ m

45. Calcula o traballo necesario para trasladar un satélite terrestre artificial de 2500 kg desde unha órbita circular de 8000 km de raio ata outra de 10 000 km de raio.

Sol.: $2,5 \cdot 10^{10}$ J

46. Calcula que velocidade debe adquirir un satélite para describir órbitas circulares de 7000 km de raio concéntricas coa Terra.

Sol.: $7,5 \cdot 10^3$ m/s

47. Un satélite de 1250 kg está en órbita arredor da Terra a 1400 km da superficie. Calcula: a) a súa enerxía potencial; b) a súa enerxía cinética; c) o seu período de revolución.

Sol.: a) $-6,42 \cdot 10^{10}$ J; b) $3,24 \cdot 10^{10}$ J; c) $6,8 \cdot 10^3$ s

48. Determina con que velocidade ten que lanzarse un satélite artificial desde a superficie terrestre para que alcance unha altura de 5000 km con velocidade nula. Supón que o rozamento coa atmosfera é nulo.

Sol.: $7,4 \cdot 10^3$ m/s

49. Calcula a velocidade que debería comunicárselle a un obxecto situado sobre a superficie da Lúa para que escapase do seu campo de atracción.

Sol.: $2,4 \cdot 10^3$ m/s

50. O raio medio da órbita de Europa, un dos satélites de Xúpiter, é de $6,7 \cdot 10^5$ km. Determina o período de revolución do satélite. (Masa de Xúpiter: $M_J = 318,4 M_T$)

Sol.: $3,0 \cdot 10^5$ s

51. Un satélite artificial describe unha órbita circular arredor da Terra cun período dun día. Calcula o raio da órbita.

Sol.: $4,22 \cdot 10^7$ m

52. Na superficie dun planeta de raio $R = 1,25 R_T$ a aceleración da gravidade é $14,7$ m/s². Calcula:

- a) A relación entre as masas do planeta e da Terra.
b) A altura desde a que debe caer un obxecto nese planeta para que chegue á súa superficie coa mesma velocidade con que chegaría á superficie terrestre cando cae desde 275 m.

Sol.: a) 2,34; b) 183,3 m

53. Un satélite de telecomunicacións de 1500 kg de masa describe unha órbita circular arredor da Terra a unha altura de 500 km sobre a súa superficie. Calcula:

- a) A velocidade orbital.
b) O período de revolución.
c) A enerxía mecánica de translación.
d) A aceleración centrípeta.

Sol.: a) $7,6 \cdot 10^3$ m/s; b) $5,7 \cdot 10^3$ s; c) $-4,35 \cdot 10^{10}$ J; d) $8,4$ m/s²

54. Umbriel, satélite de Urano, describe unha órbita circular de $2,67 \cdot 10^8$ m de raio arredor do planeta cun período de revolución de $3,58 \cdot 10^5$ s. Calcula: a) a masa de Urano; b) o período de revolución doutro dos seus satélites, Oberón, que ten un raio orbital de $5,86 \cdot 10^8$ m.

Sol.: $8,79 \cdot 10^{25}$ kg; $1,16 \cdot 10^6$ s



55. Coa axuda dun programa para realizar gráficas constrúe as que representan a variación da gravidade coa altura partindo de g_0 (gravidade na superficie dun planeta) nos casos seguintes:

- a) A Terra ($g_0 = 9,8$; $R_T = 6370000$ m)
b) Marte ($g_0 = 3,8$; $R_M = 3380000$ m)

56. Cun programa de simulación de movementos (do tipo *Interactive Physics 2000*) xera o movemento dun satélite ao redor da Terra. (Toma os datos dalgun problema desta unidade).

AVALIACIÓN

1. Explica que é o peso dun corpo e de que factores depende.

2. Calcula a expresión da velocidade de escape para un corpo situado na superficie da Terra.

3. Enuncia as leis de Kepler do movemento planetario.
— Demostra a terceira lei de Kepler para unha órbita circular a partir da lei da gravitación universal.

4. Calcula a intensidade do campo gravitacional terrestre a unha altura de 275 km sobre a superficie da Terra.

— Determina ata que altura debemos ascender para que g se reduza nun 15%.

Sol.: $9,03$ N/kg; $5,4 \cdot 10^5$ m

5. Calcula a distancia que percorre unha partícula en 3 s de caída libre cando se abandona nun punto próximo á superficie da Lúa.

Sol.: 7,4 m

6. Cando na superficie terrestre se coloca un obxecto no prato dunha balanza, conséguese o equilibrio ao colocar no outro prato pesas dun valor total de 5 kg. Determina que pesas se necesitan para equilibrar a balanza co mesmo obxecto na superficie da Lúa.

Sol.: 5 kg

7. Un satélite de 1000 kg de masa describe un movemento circular arredor da Terra. Sabendo que tarda dous días en darlle unha volta á Terra, calcula: a) o raio da órbita do satélite; b) a súa aceleración normal; c) a súa enerxía potencial gravitacional.

Sol.: a) $6,71 \cdot 10^7$ m; b) $0,09$ m/s²; c) $-5,94 \cdot 10^9$ J

8. Determina a masa do planeta Marte sabendo que ten un satélite situado nunha órbita circular de $9,4 \cdot 10^6$ m de raio arredor do planeta e que o período de revolución dese satélite é de 460 min.

Sol.: $6,45 \cdot 10^{23}$ kg

