

VIBRACIÓNS E ONDAS

♦ INTRODUCCIÓN

● MÉTODO

1. En xeral:

Debúxanse as forzas que actúan sobre o sistema.

Calcúlase a resultante polo principio de superposición.

Aplicase a 2ª lei de Newton (Lei Fundamental da Dinámica). Como a aceleración ten a mesma dirección e sentido que a forza resultante, pódese escribir para os módulos

$$|\vec{F}| = m |\vec{a}|$$

2. Nos problemas de resortes:

A relación entre a constante elástica k e a frecuencia angular ω obtense tendo en conta que a forza elástica dada pola lei de Hooke

$$F = -k \cdot x$$

é a resultante, e, pola 2ª lei de Newton

$$-k \cdot x = m \cdot a$$

Como nun M.H.S. a aceleración é proporcional ao alongamento:

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

queda

$$-k \cdot x = m \cdot a = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Se o resorte se move nun eixo vertical, o tratamento é o mesmo que se o fixera nunha liña horizontal, tendo en conta que a orixe é a posición de equilibrio, o punto no que a forza elástica equilibra a forza peso.

● RECOMENDACIÓNS

1. Farase unha lista con datos, pasándoos ao Sistema Internacional se non o estivesen.
2. Farase outra lista coas incógnitas.
3. Farase unha lista de ecuacións que conteñan as incógnitas e algún dos datos, mencionando á lei ou principio ao que se refiren.
4. Debuxarase un esbozo coas distancias coherentes coa situación.
5. No caso de ter algunha referencia, ao rematar os cálculos farase unha análise do resultado para ver si é o esperado.
6. En moitos problemas as cifras significativas dos datos son incoherentes. Resolverase o problema supoñendo que os datos que aparecen con unha ou dúas cifras significativas teñen a mesma precisión que o resto dos datos (polo xeral tres cifras significativas), e ao final farase un comentario sobre o as cifras significativas do resultado.

● ACLARACIÓNS

1. Os datos dos enunciados dos problemas non adoitan ter un número adecuado de cifras significativas, ben porque o redactor pensa que a Física é unha rama das Matemáticas e os números enteiros son números «exactos» (p.ej a velocidade da luz: 3×10^8 m/s cre que é 300 000 000,0000000000000000... m/s) ou porque aínda non se decatou de que se pode usar calculadora no exame e parécelle máis sinxelo usar 3×10^8 que 299 792 458 m/s). Por iso supuxen que os datos teñen un número de cifras significativas razoables, case sempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en certos casos, con ampla marxe de erro. Así que cando tomo un dato como $c = 3 \times 10^8$ m/s e reescribo como:
Cifras significativas: 3
 $c = 3,00 \times 10^8$ m/s
o que quero indicar é que supoño que o dato orixinal ten tres cifras significativas (non que as teña en realidade) para poder realizar os cálculos cunha marxe de erro máis pequeno que o que tería si tomáseo tal como dano. (3×10^8 m/s ten unha soa cifra significativa, e un erro relativo do 30%. Como os erros adóitanse acumular ao longo do cálculo, o erro final sería inadmisibile. Entón, para que realizar os cálculos? Cunha estimación sería suficiente).

◆ PROBLEMAS

● M.H.S..

1. Dun resorte elástico de constante $k = 500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ colga unha masa puntual de 5 kg. Estando o conxunto en equilibrio, desprázase a masa 10 cm, deixándoa oscilar a continuación libremente, Calcula:

- a) A ecuación do movemento harmónico que describe a masa puntual.
b) Os puntos nos que a aceleración desta masa é nula.

(P.A.U. Xuño 96)

Rta.: a) $y = 0,1 \cos(10 t) \text{ [m]}$, b) $y = 0$.

Datos

Constante elástica do resorte

Masa pendurada

Amplitude

Incógnitas

Ecuación do movemento harmónico: ω : pulsación (frecuencia angular),

φ_0 : fase inicial

Puntos nos que a aceleración é nula

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Relación entre a aceleración a e a elongación y

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

Cifras significativas: 3

$k = 500 \text{ N/m}$

$m = 5,00 \text{ kg}$

$A = 10,0 \text{ cm} = 0,100 \text{ m}$

ω, φ_0

y

$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$a = -\omega^2 \cdot y$

$F = -k \cdot y$

$\sum \vec{F} = m \vec{a}$

Solución:

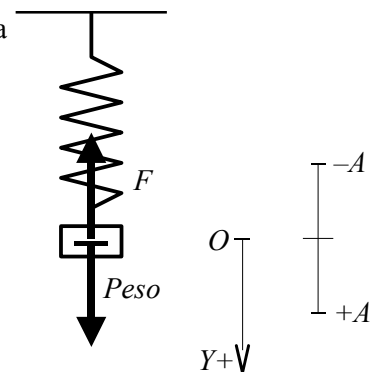
Non movemento vertical, a forza resultante entre a forza recuperadora elástica e o peso é unha forza recuperadora do tipo $F = -k \cdot y$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$-k \cdot y = m \cdot a = m (-\omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500 [\text{N m}^{-1}]}{5,00 [\text{kg}]}} = 10,0 \text{ rad/s}$$



S.R. Orixe O: posición de equilibrio. Eixo Y+ vertical no sentido do alongamento (cara abaixo)

$$y = 0,100 \sin(10 t + \varphi_0) \text{ [m]}$$

Posición inicial: para $t = 0$, $y_0 = 0,100 \text{ m}$

$$0,100 = 0,100 \sin(10,0 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1 = \pi/2 \text{ rad}$$

$$y = 0,100 \sin(10,0 t + \pi/2) \text{ [m]}$$

Polas equivalencias trigonométricas, pódese empregar a ecuación equivalente:

$$y = 0,100 \cos(10,0 t) \text{ [m]}$$

(Tomando como número de cifras significativas as do dato que menos ten “5 kg”, o resultado non tería sentido xa que: 10 rad/s é $\omega = 10 \pm 10 \text{ rad/s}$ e ten un erro do 100%)

b) Impoñendo a condición $a = 0$, na ecuación $a = -\omega^2 y$, queda $y = 0$ (na orixe).

Análise: A ecuación de movemento cumpre a condición da posición inicial (para $t = 0$, $y_0 = 0,100$ m). Na posición de equilibrio (orixe O) a forza resultante é nula. Polo tanto non hai aceleración.

2. Unha butaca está montada sobre un resorte. Cando se senta unha persoa de 75 kg, oscila cunha frecuencia de 1 Hz. Se sobre ela se senta agora outra persoa de 50 kg.

a) Cal será a nova frecuencia de vibración?

b) Canto descenderá a butaca cando alcance o equilibrio?

DATOS: $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

(P.A.U. Set. 97)

Rta.: a) $f = 0,8 \text{ Hz}$; b) $\Delta y = 0,2 \text{ m}$

Datos

Frecuencia inicial de oscilación

Masa inicial

Masa extra

Incógnitas

Ecuación do movemento harmónico: ω : pulsación (frecuencia angular);

φ_0 : fase inicial

Puntos nos que a aceleración é nula

Outros símbolos

Constante elástica do resorte

Pulsación (frecuencia angular)

Elongación

Ecuacións

Relación entre a aceleración a e a elongación y

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

Cifras significativas: 3

$$f_0 = 1,00 \text{ Hz}$$

$$m_0 = 75,0 \text{ kg}$$

$$\Delta m = 50,0 \text{ kg}$$

$$\omega, \varphi_0$$

$$k$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$y$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

$$F = -k \cdot y$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

Solución:

Non movemento vertical, a forza resultante entre a forza recuperadora elástica e o peso é unha forza recuperadora do tipo $F = -ky$

$$-ky = m a = m (-\omega^2 y)$$

$$k = m\omega^2$$

Pulsación inicial: $\omega_0 = 2 \pi f_0 = 2 \pi [\text{rad}] \cdot 1,00 [\text{s}^{-1}] = 6,28 \text{ rad/s}$.

$$k = 75,0 [\text{kg}] \cdot (6,28 \text{ rad/s})^2 = 2,96 \times 10^3 \text{ N/m}$$

masa final: $m = m_0 + \Delta m = 125 \text{ kg}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2,96 \times 10^3 [\text{N m}^{-1}]}{125 [\text{kg}]}} = 4,87 \text{ rad/s}$$

$$f = 4,87 [\text{rad/s}] / 2 \pi [\text{rad}] = 0,775 \text{ Hz}$$

(Tomando só unha cifra significativa como nos datos “1 Hz”, o resultado sería: $f = 0,8 \text{ Hz}$)

b) Tómake como posición de equilibrio a da primeira persoa. Cando ponse enriba dela a segunda, ao acadar o equilibrio a forza resultante será nula:

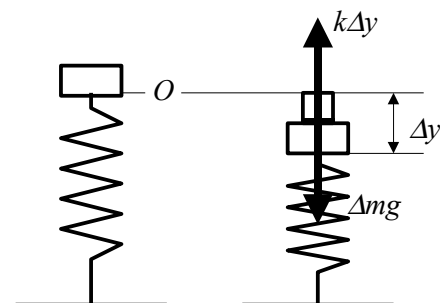
$$\vec{P}_{\text{eso}} + \vec{F}_{\text{elástica}} = \vec{0}$$

$$\Delta mg = k \Delta y$$

$$50,0 [\text{kg}] \cdot 9,81 [\text{m/s}^2] = 2,96 \times 10^3 [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}] \Delta y$$

$$\Delta y = 0,166 \text{ m}$$

(Tomando só unha cifra significativa como nos datos “1 Hz”, o resultado sería: $\Delta y = 0,2 \text{ m}$)



3. Un obxecto de 100 g, unido a un resorte de $k = 500 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, realiza un movemento harmónico simple. A enerxía total é de 5 J. Calcula:
- A amplitude.
 - A velocidade máxima e a frecuencia da oscilación.
 - Indica cualitativamente nunha gráfica como varían a enerxía total, cinética e potencial coa elongación x .

(P.A.U. Set. 10)

Rta.: a) $A = 0,14 \text{ m}$; b) $v_{\text{máx}} = 9,9 \text{ m/s}$; $f = 11 \text{ Hz}$ **Datos**

Masa que realiza o M.H.S.
 Constante elástica do resorte
 Enerxía mecánica

Incógnitas

Amplitude (elongación máxima)
 Velocidade máxima
 Frecuencia de oscilación

Outros símbolos

Valor da velocidade
 Pulsación (frecuencia angular)
 Fase inicial
 Elongación
 Forza recuperadora elástica

Ecuacións

De movemento no M.H.S.
 Relación entre a aceleración a e a elongación x
 Lei de Hooke: forza recuperadora elástica
 2ª lei de Newton
 Enerxía potencial elástica
 Enerxía cinética
 Enerxía mecánica

Cifras significativas: 3

$m = 0,100 \text{ kg}$
 $k = 500 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$
 $E = 5,00 \text{ J}$

 A $v_{\text{máx}}$ f v $\omega = 2 \pi f$ φ_0 x F $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ $a = -\omega^2 x$ $F = -k \cdot x$ $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ $E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2$ **Solución:**

a) A enerxía dun movemento harmónico simple é a suma das enerxías cinética e potencial, e consérvase.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = 5,00 \text{ J}$$

$$500 [\text{N}\cdot\text{m}^{-1}] / 2 \cdot A^2 = 5,00 [\text{J}]$$

$$A = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,00 [\text{J}]}{500 [\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]}} = 0,141 \text{ m}$$

b) A ecuación de movemento é:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

na que ω é a frecuencia angular, relacionada coa frecuencia f de oscilación por:

$$\omega = 2 \pi f$$

Como só actúa a forza elástica:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m (-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500 [\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]}{0,100 [\text{kg}]}} = 70,7 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{70,7 [\text{rad/s}]}{2\pi} = 11,3 \text{ s}^{-1}$$

A velocidade do oscilador nun instante t é a derivada da posición con respecto ao tempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (A \sin(\omega t + \phi_0)) = A \omega \cos(\omega t + \phi_0)$$

que ten o valor máximo cando $\cos(\omega t + \phi_0) = 1$

$$v_{\text{máx}} = A \omega = 0,141 [\text{m}] \cdot 70,7 [\text{rad/s}] = 10,0 \text{ m/s}$$

(Tomando só unha cifra significativa como nos datos “7 J”, os resultado serían: $A = 0,1 \text{ m}$; $f = 1 \times 10^1 \text{ Hz}$ e $v = 1 \times 10^1 \text{ m/s}$)

c) A enerxía potencial en cada punto de elongación x é:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Ao ser unha forza conservativa, a enerxía mecánica valerá o mesmo para calquera elongación: é constante.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Para a elongación máxima ou amplitude:

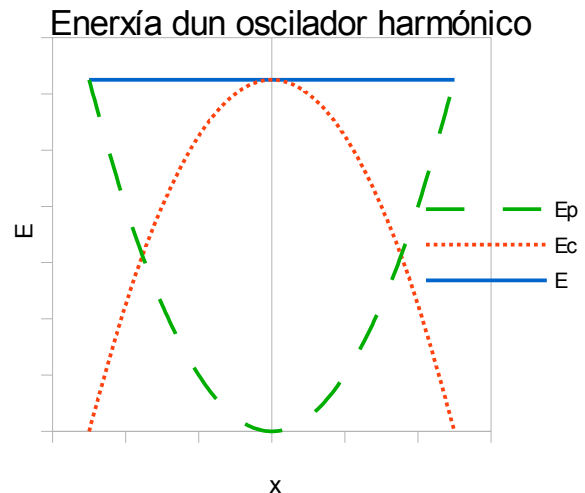
$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m 0^2 + \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

A enerxía cinética é a diferenza entre a enerxía mecánica e a potencial

$$E_c = E - E_p = \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

Como se ve, as representacións gráficas das enerxías cinética e potencial son parábolas (a potencial co vértice na orixe) e a da enerxía mecánica é una recta paralela ao eixe das X .



4. Unha masa de 0,05 kg realiza un M.H.S. segundo a ecuación $x = A \cos(\omega t + \phi_0)$. As súas velocidades son 1 m/s e 2 m/s cando as súas elongacións son, respectivamente, 0,04 e 0,02 m. Calcula:

a) O período e a amplitude do movemento.

b) A enerxía do movemento oscilatorio e a enerxía cinética e potencial cando $x = 0,03 \text{ m}$.

(P.A.U. Xuño 99)

Rta.: a) $T = 0,13 \text{ s}$; $A = 0,045 \text{ m}$; b) $E = 0,125 \text{ J}$; $E_p = 0,056 \text{ J}$; $E_c = 0,069 \text{ J}$

Datos

Masa que realiza o M.H.S.

Valor da velocidade cando se atopa no punto de elongación $x_1 = 0,0400 \text{ m}$

Valor da velocidade cando se atopa no punto de elongación $x_2 = 0,0200 \text{ m}$

Incógnitas

Período

Amplitude

Enerxía mecánica

Enerxía potencial para $x = 0,03 \text{ m}$

Enerxía cinética para $x = 0,03 \text{ m}$

Outros símbolos

Constante elástica do resorte

Pulsación (frecuencia angular)

Frecuencia de oscilación

Ecuacións

Relación entre a aceleración a e a elongación x

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

Cifras significativas: 3

$m = 0,0500 \text{ kg}$

$v_1 = 1,00 \text{ m/s}$

$v_2 = 2,00 \text{ m/s}$

T

A

E

E_p

E_c

k

$\omega = 2\pi / T = 2\pi f$

f

$a = -\omega^2 x$

$F = -kx$

Ecuacións

2ª lei de Newton

Enerxía potencial elástica

Enerxía cinética

Enerxía mecánica

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2$$

Solución:

Só actúa a forza elástica:

$$-k x = m a = m (-\omega^2 x)$$

$$k = m \omega^2$$

Tendo en conta que a única forza (elástica) é conservativa,

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

$$\frac{1}{2} m (1,00 \text{ [m/s]})^2 + \frac{1}{2} k (0,0400 \text{ [m]})^2 = \frac{1}{2} m (2,00 \text{ [m/s]})^2 + \frac{1}{2} k (0,0200 \text{ [m]})^2$$

Dividindo todo entre a metade da masa $\frac{1}{2} m$, e substituíndo $k = m \omega^2$

$$(16,0 \times 10^{-4} - 4,00 \times 10^{-4}) \text{ [m}^2\text{]} \omega^2 = (4,00 - 1,00) \text{ [m}^2\text{/s}^2\text{]}$$

$$\omega = 50,0 \text{ rad/s}$$

$$T = 2 \pi / \omega = 0,126 \text{ s}$$

(Tomando só unha cifra significativa como nos datos “1 m/s”, o resultado sería: $T = 0,1 \text{ s}$)

Aplicando o principio de conservación da enerxía mecánica entre o primeiro punto e o da máxima elongación,

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_A$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

Facendo o mesmo que antes, queda,

$$A = \sqrt{\frac{m}{k} v_1^2 + x_1^2} = \sqrt{\frac{v_1^2}{\omega^2} + x_1^2} = \sqrt{\left(\frac{1,00 \text{ [m/s]}}{50,0 \text{ [rad/s]}}\right)^2 + (0,0400 \text{ [m]})^2} = 0,0447 \text{ m}$$

(Tomando só unha cifra significativa como nos datos “1 m/s”, o resultado sería: $A = 0,05 \text{ m}$)

Análise: A amplitude 0,05 m é do orde de magnitude das posicións (0,02 e 0,04 m) e maior que estas.

b)

$$k = m \omega^2 = 0,0500 \text{ [kg]} \cdot (50,0 \text{ [rad/s]})^2 = 125 \text{ N/m}$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 125 \text{ [N/m]} \cdot (0,0447 \text{ [m]})^2 = 0,125 \text{ J}$$

Para $x = 0,03 \text{ m}$

$$\text{Enerxía potencial: } E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 125 \text{ [N/m]} \cdot (0,03 \text{ [m]})^2 = 0,0563 \text{ J}$$

$$\text{Enerxía cinética: } E_c = E - E_p = 0,125 \text{ [J]} - 0,0563 \text{ [J]} = 0,0688 \text{ J}$$

(Tomando só unha cifra significativa como nos datos “1 m/s”, o resultado da enerxía sería: $E = 0,1 \text{ J}$; o da enerxía potencial $E_p = 0,06 \text{ J}$ pero o da enerxía cinética non se podería calcular porque a diferenza 0,1 – 0,06 non se pode facer por falta de cifras significativas. Poñeríase un resultado indeterminado, da orde de $E_c \approx 0,1 \text{ J}$)

5. Un corpo de masa 100 gramos está unido a un resorte que oscila nun plano horizontal. Cando se estira 10 cm e se solta, oscila cun período de 2 s. Calcula:

- A velocidade cando se atopa a 5 cm da súa posición de equilibrio.
- A aceleración nese momento.
- A enerxía mecánica.

(P.A.U. Set. 08)

Rta.: a) $v_s = 0,27 \text{ m/s}$, b) $a = -0,49 \text{ m/s}^2$; c) $E = 4,93 \times 10^{-3} \text{ J}$ **Datos**

Masa pendurada

Amplitude

Período

Posición para calcular a velocidade e aceleración

Incógnitas

Velocidade cando se atopa a 5 cm da súa posición de equilibrio

Aceleración nese momento

Enerxía mecánica

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Relación entre a frecuencia angular e o período

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

Relación entre a aceleración a e a elongación x

Enerxía potencial elástica

Enerxía cinética

Enerxía mecánica

Cifras significativas: 3 $m = 100 \text{ g} = 0,100 \text{ kg}$ $A = 10,0 \text{ cm} = 0,100 \text{ m}$ $T = 2,00 \text{ s}$ $x = 5,00 \text{ cm} = 0,0500 \text{ m}$ v a E $x = A \sin(\omega t + \phi_0)$ $\omega = 2\pi / T$ $F = -k \cdot x$ $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ $a = -\omega^2 x$ $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ $E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2$ **Solución:**

Como só actúa a forza elástica:

$$-k x = m a = m (-\omega^2 x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Calcularse a frecuencia angular a partir do período

$$\omega = 2\pi / T = 2 \cdot \pi [\text{rad}] / 2,00 [\text{s}] = 3,14 \text{ rad/s}$$

$$k = m \cdot \omega^2 = 0,100 [\text{kg}] \cdot (3,14 [\text{rad/s}])^2 = 0,987 \text{ N/m}$$

Tendo en conta que a única forza (elástica) é conservativa,

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

$$\frac{1}{2} 0,100 [\text{kg}] \cdot 0^2 + \frac{1}{2} 0,987 [\text{N/m}] (0,100 [\text{m}])^2 = \frac{1}{2} 0,100 [\text{kg}] \cdot v^2 + \frac{1}{2} 0,987 [\text{N/m}] (0,0500 [\text{m}])^2$$

$$v = 0,27 \text{ m/s}$$

b) Da relación entre a aceleración e a elongación:

$$a = -\omega^2 x = -(3,14 [\text{rad/s}])^2 \cdot 0,0500 [\text{m}] = -0,49 \text{ m/s}^2$$

c) A enerxía mecánica é constante e vale o mesmo que no punto de máxima elongación:

$$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 0,987 [\text{N/m}] \cdot (0,100 [\text{m}])^2 = 4,93 \times 10^{-3} \text{ J}$$

6. Unha masa de 10 g está unida a un resorte e oscila nun plano horizontal cun movemento harmónico simple. A amplitude do movemento é $A = 20 \text{ cm}$, e a elongación no instante inicial é $x = -20 \text{ cm}$. Se a enerxía total é 0,5 J, calcula:

a) A constante elástica do resorte.

b) A ecuación do movemento.

c) A enerxía cinética na posición $x = 15 \text{ cm}$.

(P.A.U. Set. 12)

Rta.: a) $k = 25 \text{ N/m}$; b) $x = 0,200 \cdot \sin(50 \cdot t + 3 \pi / 2) \text{ [m]}$; c) $E_c = 0,219 \text{ J}$

Datos

Masa que oscila

Amplitude

Posición inicial

Energía mecánica

Posición para calcular a enerxía cinética

Incógnitas

Constante elástica do resorte

Ecuación do movemento (frecuencia angular e fase inicial)

Energía cinética na posición $x = 15 \text{ cm}$

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Relación entre a frecuencia angular e o período

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

Relación entre a aceleración a e a elongación x

Energía potencial elástica

Energía cinética

Energía mecánica

Cifras significativas: 3

$m = 10,00 \text{ g} = 0,0100 \text{ kg}$

$A = 20,0 \text{ cm} = 0,200 \text{ m}$

$x_0 = -20,0 \text{ cm} = -0,200 \text{ m}$

$E = 0,500 \text{ J}$

$x = 15,0 \text{ cm} = 0,150 \text{ m}$

k

ω, φ_0

E_c

$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$

$\omega = 2 \pi / T$

$F = -k \cdot x$

$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$a = -\omega^2 \cdot x$

$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k \cdot A^2$

Solución:

a) Da ecuación da enerxía mecánica:

$$E = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

$$k = \frac{2 \cdot E}{A^2} = \frac{2 \cdot 0,500 [\text{J}]}{(0,200 [\text{m}])^2} = 25 \text{ N/m}$$

b) Como só actúa a forza elástica:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m (-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25 [\text{N/m}]}{0,01 [\text{kg}]}} = 50 \text{ rad/s}$$

Usamos o dato da posición inicial ($x_0 = -0,200 \text{ m}$ cando $t = 0$) para calcular a fase inicial:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$-0,200 [\text{m}] = 0,200 [\text{m}] \sin(50 [\text{rad/s}] \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$-1 = \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin -1 = 3 \pi / 2$$

$$x = 0,200 \cdot \sin(50 \cdot t + 3 \pi / 2) [\text{m}]$$

c) Tendo en conta que a única forza (elástica) é conservativa,

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = 25 [\text{N/m}] \cdot (0,150 [\text{m}])^2 / 2 = 0,281 \text{ J}$$

$$E = E_c + E_p$$

$$E_c = 0,500 [\text{J}] - 0,281 [\text{J}] = 0,219 \text{ J}$$

7. A forza máxima que actúa sobre unha partícula que realiza un movemento harmónico simple é 2×10^{-3} N e a enerxía total é de 5×10^{-4} J.

- a) Escribe a ecuación do movemento desa partícula se o período é de 4 s e a fase inicial é de 30° .
b) Canto vale a velocidade ao cabo de 1 s de comezar o movemento?

(P.A.U. Xuño 00)

Rta.: a) $x = 0,50 \cos(\pi t / 2 + \pi / 6)$ [m]; b) $v_1 = -0,68$ m/s.

Datos

Forza recuperadora elástica máxima

Enerxía mecánica

Período de oscilación

Fase inicial

Incógnitas

Ecuación do movemento harmónico: ω : pulsación (frecuencia angular)

A : amplitude

A velocidade a $t = 1$ s

Outros símbolos

Constante elástica do resorte

Pulsación (frecuencia angular)

Masa da partícula

Elongación

Amplitude (elongación máxima)

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Enerxía potencial elástica

Enerxía cinética

Enerxía mecánica

Cifras significativas: 3

$$F_{\text{máx}} = 2,00 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$E = 5,00 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$T = 4,00 \text{ s}$$

$$\varphi_0 = 30^\circ = \pi/6 \text{ rad}$$

$$\omega, A$$

$$v$$

$$k$$

$$\omega = 2 \pi / T$$

$$m$$

$$x$$

$$A$$

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2$$

Solución:

a)

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} k A^2 \\ F_{\text{máx}} &= k A \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} k A^2 &= 5,00 \times 10^{-4} \text{ J} \\ k A &= 4,00 \times 10^{-3} \text{ N} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= 0,500 \text{ m} \\ k &= 4,00 \times 10^{-3} \text{ N/m} \end{aligned}$$

$$\omega = 2 \pi / T = 2 \pi [\text{rad}] / 4,00 [\text{s}] = \pi / 2 [\text{rad/s}] = 1,57 \text{ rad/s}$$

A ecuación do M.H.S. é indistintamente $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ou $x = A \sin(\omega t + \varphi'_0)$ pero o valor da fase inicial depende da expresión. Tomamos arbitrariamente

$$x = 0,500 \cos(\pi/2 t + \pi/6) [\text{m}]$$

(Tomando só unha cifra significativa como nos datos " 2×10^{-3} N", non se podería dar un resultado que tivese unha precisión aplicable)

b) Derivando a ecuación anterior e substituíndo:

$$v = dx / dt = -0,500 \cdot \pi/2 \sin(\pi/2 t + \pi/6) = -0,785 \sin(\pi/2 t + \pi/6) [\text{m/s}]$$

Para $t = 1,00$ s,

$$v_1 = -0,680 \text{ m/s.}$$

(Tomando só unha cifra significativa como nos datos " 2×10^{-3} N", non se podería dar un resultado por falta de precisión)

8. Unha masa de 0,1 kg xunguida a un resorte de masa desprezable realiza oscilacións arredor da súa posición de equilibrio cunha frecuencia de 4 Hz sendo a enerxía total do sistema oscilante 1 Xulio. Calcula:

- a) A constante elástica do resorte e a amplitude das oscilacións (A)
b) A enerxía cinética e potencial da masa oscilante nun punto situado a distancia $A/4$ da posición de equilibrio.

Rta.: a) $k = 63 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $A = 0,18 \text{ m}$; b) $E_p = 6,3 \times 10^{-2} \text{ J}$; $E_c \approx 0,9 \text{ J}$

Datos

Masa que realiza o M.H.S.

Frecuencia de oscilación

Enerxía mecánica

Incógnitas

Constante elástica do resorte

Amplitude (elongación máxima)

Enerxía cinética para $x = \pm A/4$

Enerxía potencial para $x = \pm A/4$

Outros símbolos

Valor da velocidade

Pulsación (frecuencia angular)

Fase inicial

Elongación

Forza recuperadora elástica

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Relación entre a aceleración a e a elongación x

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

Enerxía potencial elástica

Enerxía cinética

Enerxía mecánica

Cifras significativas: 3

$m = 0,100 \text{ kg}$

$f = 4,00 \text{ Hz}$

$E = 1,00 \text{ J}$

k

A

E_c

E_p

v

$\omega = 2 \pi f$

φ_0

x

F

$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$a = -\omega^2 x$

$F = -kx$

$\sum \vec{F} = m \vec{a}$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2$

Solución:

a) Só actúa a forza elástica:

$$-k x = m a = m (-\omega^2 x)$$

$$k = m \omega^2$$

$$\omega = 2 \pi f = 2 \pi [\text{rad}] 4,0 [\text{s}^{-1}] = 8 \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 25,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k = m \omega^2 = 0,10 [\text{kg}] \cdot (25 [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}])^2 = 63,2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = 1,00 \text{ J}$$

$$63,2 [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}] / 2 \cdot A^2 = 1,00 [\text{J}]$$

$$A = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,00 [\text{J}]}{63,2 [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]}} = 0,178 \text{ m}$$

(Tomando só unha cifra significativa como nos datos “4 Hz”, o resultado sería: $A = 0,2 \text{ m}$)

b) No punto na que a $x = A / 4$, a enerxía potencial valerá:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (A / 4)^2 = \frac{1}{2} k A^2 / 16 = 1,00 [\text{J}] / 16 = 6,32 \times 10^{-2} \text{ J}$$

e a enerxía cinética calcúlase por diferenza o ser unha forza conservativa e ser a enerxía mecánica constante

$$E_c = E - E_p = 1,00 [\text{J}] - 6,32 \times 10^{-2} [\text{J}] = 0,94 \text{ J}$$

(Tomando só unha cifra significativa como nos datos “4 Hz”, o resultado da enerxía potencial $E_p = 0,06 \text{ J}$ pero o da enerxía cinética non se podería calcular porque a diferenza $1 - 0,06$ non se pode facer por falta de cifras significativas. Poñeríase un resultado indeterminado, da orde de $E_c \approx 1 \text{ J}$)

9. Un resorte de masa desprezable estírase 10 cm cando se lle colga unha masa de 200 g. A continuación o sistema formado polo resorte e a masa estírase coa man outros 5 cm e se solta no instante $t = 0$ s. Calcula:

a) A ecuación do movemento que describe o sistema.

b) A enerxía cinética e potencial cando a elongación $y = 3$ cm.

Dato $g = 9,80 \text{ m/s}^2$

(P.A.U. Xuño 03)

Rta.: a) $y = 0,05 \cos(9,9t)$ [m]; b) $E_c = 15,7 \times 10^{-3} \text{ J}$; $E_p = 8,8 \times 10^{-3} \text{ J}$.

Datos

Masa que realiza o M.H.S.

Alongamento

Posición inicial

Amplitude (elongación máxima)

Incógnitas

Ecuación do movemento harmónico: ω : pulsación (frecuencia angular);

ϕ_0 : fase inicial

Energía cinética para $y = 3,00 \text{ cm} = 0,0300 \text{ m}$

Energía potencial para $y = 3,00 \text{ cm} = 0,0300 \text{ m}$

Outros símbolos

Constante elástica do resorte

Pulsación (frecuencia angular)

Fase inicial

Forza recuperadora elástica

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Relación entre a aceleración a e a elongación x

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

Energía potencial elástica

Energía cinética

Energía mecánica

Cifras significativas: 3

$m = 200 \text{ g} = 0,200 \text{ kg}$

$\Delta y = 10,0 \text{ cm} = 0,100 \text{ m}$

$y_0 = 5,00 \text{ cm} = 0,0500 \text{ m}$

$A = y_0 = 0,0500 \text{ m}$

y

E_c

E_p

k

$\omega = 2 \pi f$

ϕ_0

F

$y = A \sin(\omega t + \phi_0)$

$a = -\omega^2 y$

$F = -ky$

$\sum \vec{F} = m \vec{a}$

$E_p = \frac{1}{2} k y^2$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2$

Solución:

a) Ao colgar a masa de 200 g, no equilibrio:

$$F = \text{Peso}$$

$$k \Delta y = mg$$

$$k \cdot 0,100 \text{ [m]} = 0,200 \text{ [kg]} 9,80 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$k = 19,6 \text{ N/m}$$

Non movemento vertical, a forza resultante entre a forza recuperadora elástica e o peso é unha forza recuperadora do tipo $F = -ky$.

$$-k y = m a = m (-\omega^2 y)$$

$$k = m \omega^2$$

$$19,6 \text{ [N/m]} = 0,200 \text{ [kg]} \omega^2$$

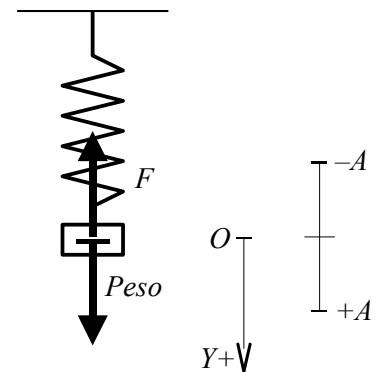
$$\omega = 9,90 \text{ rad/s}$$

S.R. Orixe O: posición de equilibrio. Eixo $Y+$ vertical no sentido do alongamento (cara abaixo)

$$y = 0,0500 \sin(9,90 t + \phi_0) \text{ [m]}$$

Cando $t = 0$, $y_0 = A = 0,0500 \text{ m}$

$$0,0500 = 0,0500 \sin \phi_0$$



$$\varphi_0 = \pi / 2$$

$$y = 0,0500 \sin(9,90 t + \pi / 2) \text{ [m]}$$

Como $\sin(\varphi + \pi / 2) = \cos \varphi$, a ecuación pode escribirse máis curta:

$$y = 0,0500 \cos(9,90t) \text{ [m]}$$

b) Enerxía mecánica:

$$E = \frac{1}{2} 19,6 \text{ [N/m]} (0,0500 \text{ [m]})^2 = 0,0245 \text{ J}$$

Enerxía potencial para $y = 3 \text{ cm}$:

$$E_p = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} 19,6 \text{ [N/m]} (0,0300 \text{ [m]})^2 = 8,8 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Enerxía cinética para $y = 3 \text{ cm}$

$$E_c = E - E_p = 0,0245 - 8,8 \times 10^{-3} = 15,7 \times 10^{-3} \text{ J}$$

10. Un resorte de masa desprezable estírase 0,1 m cando se lle aplica unha forza de 2,45 N. Fíxase no seu extremo libre unha masa de 0,085 kg e estírase 0,15 m ao longo dunha mesa horizontal a partir da súa posición de equilibrio e sóltase deixándoo oscilar libremente sen rozamento. Calcula:

a) A constante elástica do resorte e o período de oscilación.

b) A enerxía total asociada a oscilación e as enerxías potencial e cinética cando $x = 0,075 \text{ m}$.

(P.A.U. Xuño 04)

Rta.: a) $k = 24,5 \text{ N/m}$; $T = 0,37 \text{ s}$; b) $E = 0,28 \text{ J}$; $E_p = 0,07 \text{ J}$; $E_c = 0,21 \text{ J}$

Datos

Masa que realiza o M.H.S.

Forza aplicada.

Alongamento

Posición inicial

Amplitude (elongación máxima)

Incógnitas

Constante elástica do resorte

Período de oscilación

Enerxía mecánica

Enerxía cinética para $x = 0,0750 \text{ m}$

Enerxía potencial para $x = 0,0750 \text{ m}$

Outros símbolos

Elongación

Pulsación (frecuencia angular)

Fase inicial

Forza recuperadora elástica

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Relación entre a aceleración a e a elongación x

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

Enerxía potencial elástica

Enerxía cinética

Enerxía mecánica

Cifras significativas: 3

$m = 0,085 \text{ kg}$

$F_a = 2,45 \text{ N}$

$\Delta x = 0,100 \text{ m}$

$x_0 = 0,150 \text{ m}$

$A = x_0 = 0,150 \text{ m}$

k

T

E

E_c

E_p

x

$\omega = 2 \pi f = 2 \pi / T$

φ_0

F

$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$a = -\omega^2 x$

$F = -kx$

$\sum \vec{F} = m \vec{a}$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2$

Solución:

a) No equilibrio a forza elástica contrarresta á forza aplicada

$$F_a = k \Delta x$$

$$2,45 \text{ [N]} = k \cdot 0,100 \text{ [m]}$$

$$k = 24,5 \text{ N/m}$$

Cando oscila, a forza resultante é a forza elástica.

$$-k x = m a = m (-\omega^2 x)$$

$$k = m \omega^2$$

$$24,5 \text{ [N/m]} = 0,085 \text{ [kg]} \omega^2$$

$$\omega = 17,0 \text{ rad/s} = 2 \pi f$$

$$f = 2,70 \text{ s}^{-1}$$

$$T = 1 / f = 0,370 \text{ s}$$

b)

$$E = \frac{1}{2} 24,5 \text{ [N/m]} (0,150 \text{ [m]})^2 = 0,276 \text{ J}$$

Energía potencial para $x = 0,075 \text{ m}$:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 24,5 \text{ [N/m]} (0,075 \text{ [m]})^2 = 6,89 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Energía cinética para $x = 0,075 \text{ m}$:

$$E_c = E - E_p = 0,276 \text{ [J]} - 6,89 \times 10^{-2} \text{ [J]} = 0,207 \text{ J}$$

11. Unha masa de 0,01 kg realiza un movemento harmónico simple de ecuación $y = 5 \cos (2 t + \pi/6)$ (Magnitudes no S.I.). Calcula:

- Posición, velocidade e aceleración en $t = 1 \text{ s}$.
- Energía potencial en $y = 2 \text{ m}$.
- A enerxía potencial, é negativa nalgún instante?

(P.A.U. Xuño 07)

Rta.: a) $y_1 = -4,08 \text{ m}$; $v_1 = -5,79 \text{ m/s}$; $a_1 = 16,3 \text{ m/s}^2$; b) $E_p = 0,08 \text{ J}$

Datos

Masa que realiza o M.H.S.

Ecuación do movemento

Incógnitas

Posición en $t = 1,00 \text{ s}$.

Velocidade en $t = 1,00 \text{ s}$.

Aceleración en $t = 1,00 \text{ s}$.

Energía potencial en $y = 2,00 \text{ m}$

Outros símbolos

Elongación

Pulsación (frecuencia angular)

Fase inicial

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Relación entre a aceleración a e a elongación y

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

Energía potencial elástica

Energía cinética

Energía mecánica

Cifras significativas: 3

$m = 0,0100 \text{ kg}$

$y = 5,00 \cos (2,00t + \pi/6)$

y_1

v_1

a_1

E_p

y

$\omega = 2 \pi f = 2 \pi / T$

φ_0

$y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

$a = -\omega^2 \cdot y$

$F = -k \cdot y$

$\sum \vec{F} = m \vec{a}$

$E_p = \frac{1}{2} k \cdot y^2$

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2$

Solución:

a) A posición para $t = 1,00 \text{ s}$ obtense substituíndo o valor do tempo na ecuación de movemento:

$$y_1 = 5,00 \cos(2,00 \cdot 1,00 + \pi/6) = -4,08 \text{ m}$$

A velocidade é a derivada da posición con respecto ao tempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d(5,00 \cos(2,00t + \pi/6))}{dt} = -5,00 \cdot 2,00 \sin(2,00t + \pi/6) = -10,0 \sin(2,00t + \pi/6) \text{ m/s}$$

Substituíndo o valor do tempo, $t = 1,00 \text{ s}$

$$v_1 = -10,0 \sin(2,00 \cdot 1,00 + \pi/6) = -5,79 \text{ m/s}$$

A aceleración é a derivada da velocidade con respecto ao tempo:

$$a = d \frac{v}{dt} = \frac{d(-10,0 \sin(2,00t + \pi/6))}{dt} = -10,0 \cdot 2,00 \cos(2,00t + \pi/6) = -20,0 \cos(2,00t + \pi/6) \text{ m/s}^2$$

Substituíndo o valor do tempo, $t = 1,00 \text{ s}$

$$a_1 = -20,0 \cos(2,00 \cdot 1,00 + \pi/6) = 16,3 \text{ m/s}^2$$

Análise: A posición inicial era $y_0 = 5,00 \cos(\pi/6) = 4,33 \text{ m}$ e movíase cara á orixe, xa que a velocidade inicial $v_0 = -10,0 \sin(\pi/6) < 0$. Como o período $T = 2\pi/\omega = 3,14 \text{ s}$, para $t = 1,00 \text{ s}$ aínda non describiu medio ciclo, polo que ten que atoparse nas zonas de elongacións negativas, polo que a aceleración $a = -\omega^2 y$ e ten que ser positiva. Con estes sinxelos cálculos non podemos determinar se a súa velocidade é cara á orixe (+) ou en sentido contrario.

b) Cando oscila, a forza resultante é unha forza elástica.

$$-k y = m a = m (-\omega^2 y)$$

$$k = m \omega^2$$

A enerxía potencial calcúlase da ecuación:

$$E_p = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 = 0,0100 \text{ [kg]} (2,00 \text{ [rad/s]})^2 (2,00 \text{ [m]})^2 / 2 = 8,00 \times 10^{-2} \text{ J} = 0,0800 \text{ J}$$

Análise: A enerxía mecánica consérvase, ao ser a forza elástica unha forza conservativa, polo que a enerxía potencial elástica podería calcularse restando a enerxía cinética da enerxía mecánica:

$E_p = E - E_c$. Aínda que a enerxía mecánica pódese calcular facilmente sen coñecer a constante elástica, xa que: $E = E_{p \text{ máx}} = E_{c \text{ máx}} = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2$, calcular a enerxía cinética para $y = 2,00 \text{ m}$ é máis complicado e non compensa facelo.

c) Non, xa que a constante elástica é un número positivo e a elongación e , aínda que pode ser positiva ou negativa, está elevada ao cadrado, polo que a enerxía potencial elástica

$$E_p = \frac{1}{2} k y^2$$

é sempre positiva.

12. Dun resorte de 40 cm de lonxitude cólgase un peso de 50 g de masa e, alcanzado o equilibrio, a lonxitude do resorte é de 45 cm. Estírase coa man o conxunto masa-resorte 6 cm e sóltase.

Acha:

a) A constante do resorte.

b) A ecuación do M.H.S. que describe o movemento.

c) Deduce a ecuación da enerxía potencial elástica.

Dato: $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$

(P.A.U. Set. 07)

Rta.: a) $k = 9,8 \text{ N/m}$; b) $y = 0,060 \cos(14 t) \text{ [m]}$

Datos

Lonxitude inicial do resorte

Masa que colga

Lonxitude ao colgarlle os 50 g

Amplitude

Incógnitas

Constante elástica do resorte

Cifras significativas: 3

$L_0 = 40,0 \text{ cm} = 0,400 \text{ m}$

$m = 50,0 \text{ g} = 0,0500 \text{ kg}$

$L = 45,0 \text{ cm} = 0,450 \text{ m}$

$A = 6,0 \text{ cm} = 0,060 \text{ m}$

k

Incógnitas

Ecuación do movemento harmónico: ω : pulsación (frecuencia angular);

φ_0 : fase inicial

ω, φ_0

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Relación entre a aceleración a e a elongación y

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -\omega^2 y$$

$$F = -ky$$

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

Solución:

a) Cando o sistema atópase en equilibrio a forza peso contrárestase coa forza elástica:

$$m \cdot g = k \cdot \Delta y$$

$$k = \frac{mg}{\Delta y} = \frac{0,0500 [\text{kg}] \cdot 9,8 [\text{m/s}^2]}{(0,450 - 0,400) [\text{m}]} = 9,8 \text{ N/m}$$

b) No movemento vertical, a forza resultante entre a forza elástica e o peso é unha forza recuperadora do tipo $F = -k \cdot y$

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

$$-k \cdot y = m \cdot a = m (-\omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9,8 [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]}{0,0500 [\text{kg}]}} = 14 \text{ rad/s}$$

S.R. orixe Ou: posición de equilibrio. Eixo $Y+$ vertical no sentido do alongamento (cara abaixo).

$$y = 0,060 \sin(14 t + \varphi_0) [\text{m}]$$

Posición inicial: para $t = 0, y_0 = 0,060 \text{ m}$

$$0,060 = 0,060 \sin(14 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1 = \pi/2 \text{ rad}$$

$$y = 0,060 \sin(14 t + \pi/2) [\text{m}]$$

polas equivalencias trigonométricas, pódese utilizar a ecuación equivalente:

$$y = 0,060 \cos(14 t) [\text{m}]$$

(Tomando como número de cifras significativas as do dato que menos ten «6 cm», o resultado non tería sentido xa que: 14 rad/s sería $\omega = 1 \cdot 10 = 10 \pm 10 \text{ rad/s}$ e ten un erro do 100%)

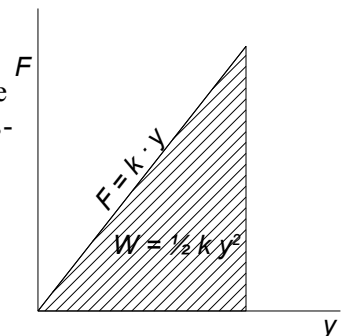
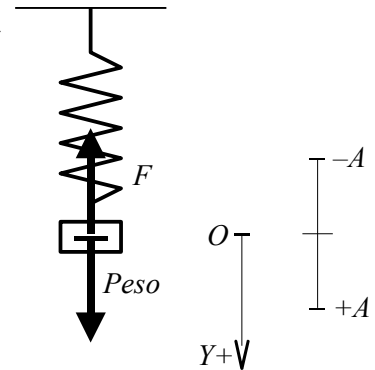
c) Para obter a ecuación de enerxía potencial elástica, sen cálculo integral, débuxase a gráfica F/y e admítase que o traballo da forza elástica entre a orixe e un punto calquera A de elongación y_A é a área baixo a gráfica, xa que para un desprazamento elemental dy o traballo da forza valería:

$$dW = F \cdot dy$$

a área elemental baixo a gráfica F/y .

$$W = -\Delta E_p$$

$$E_p = \frac{1}{2} k y^2$$



13. Unha masa de 5 gramos realiza un movemento harmónico simple de frecuencia 1 Hz e amplitude 10 cm. Se en $t = 0$ a elongación é a metade da amplitude, calcula:

- A ecuación do movemento.**
- A enerxía mecánica.**
- En que punto da traxectoria é máxima a enerxía cinética e en cales é máxima a enerxía potencial?**

(P.A.U. Xuño 09)

Rta.: a) $x = 0,100 \sin(2\pi \cdot t + \pi/6)$ [m]; b) $E = 9,87 \times 10^{-4}$ J; c) $E_{c \text{ máx}} \Rightarrow x = 0$; $E_{p \text{ máx}} \Rightarrow x = A$

Datos

Masa que realiza o M.H.S.

Amplitude

Posición inicial

Frecuencia

Incógnitas

Ecuación do movemento harmónico: ω : pulsación (frecuencia angular);

φ_0 : fase inicial

Enerxía mecánica

Outros símbolos

Constante elástica do resorte

Pulsación (frecuencia angular)

Fase inicial

Forza recuperadora elástica

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Relación entre a aceleración a e a elongación x

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

Enerxía potencial elástica

Enerxía cinética

Enerxía mecánica

Cifras significativas: 3

$m = 5,00 \text{ g} = 0,00500 \text{ kg}$

$A = 10,0 \text{ cm} = 0,100 \text{ m}$

$x_0 = A/2 = 0,0500 \text{ m}$

$f = 1,00 \text{ Hz}$

x

E

k

$\omega = 2\pi f$

φ_0

F

$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$a = -\omega^2 \cdot x$

$F = -k \cdot x$

$\sum \vec{F} = m \vec{a}$

$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2$

Solución:

a) A ecuación dun M.H.S. é:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

A amplitude é un dato: $A = 0,100 \text{ m}$. A frecuencia angular ω calcúlase a partir da frecuencia f :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1 \text{ [Hz]} = 6,28 \text{ rad/s}$$

Para calcular a fase inicial φ_0 úsase o dato da posición inicial: Para $t = 0$, $x_0 = A/2 = 0,0500 \text{ m}$

$$A/2 = A \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\sin \varphi_0 = 1/2$$

$$\varphi_0 = \arcsin(1/2)$$

que ten dúas solucións: $\varphi_{01} = \pi/6$ e $\varphi_{02} = 5\pi/6$

Necesitárase coñecer o sentido do movemento para poder elixir entre elas. A falta dese dato, elíxese arbitrariamente, por exemplo: $\varphi_{01} = \pi/6$, que corresponde ao desprazamento en sentido positivo.

A ecuación queda:

$$x = 0,100 \sin(2\pi \cdot t + \pi/6) \text{ [m]}$$

(Se se elixiu a ecuación $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, tamén habería dúas solucións para a fase inicial: $\varphi_{01} = -\pi/3$ y $\varphi_{02} = \pi/3$)

b) A enerxía mecánica pode calcularse como a enerxía potencial máxima, a enerxía cinética máxima ou a suma das enerxías cinética e potencial en calquera instante:

$$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Se se opta pola primeira, hai que calcular o valor da constante elástica k .
Usando a 2ª lei de Newton, tendo en conta que nun M.H.S. a aceleración recuperadora é proporcional á elongación, $a = -\omega^2 x$.

$$F = m a = -m \omega^2 x$$

Igualando esta con a lei de Hooke, supondo que a única forza que actúa é a forza elástica

$$F = -k \cdot x$$

$$-k \cdot x = -m \omega^2 \cdot x$$

$$k = m \omega^2 = 0,00500 \text{ [kg]} \cdot (6,28 \text{ rad/s})^2 = 0,197 \text{ N/m}$$

Enerxía mecánica:

$$E = \frac{1}{2} 0,197 \text{ [N/m]} (0,0500 \text{ [m]})^2 = 9,87 \times 10^{-4} \text{ J}$$

Poderíase calcular a enerxía mecánica como a enerxía cinética máxima. A velocidade nun instante é a derivada da posición con respecto ao tempo. Derivando a ecuación de movemento queda:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(0,100 \sin(2\pi \cdot t + \pi/6))}{dt} = 0,100 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \cos(2\pi \cdot t + \pi/6) = 0,628 \cos(2\pi \cdot t + \pi/6) \text{ m/s}$$

que ten un valor máximo cando o coseno da fase vale 1.

$$v_{\text{máx}} = 0,628 \text{ m/s}$$

$$E_{\text{c máx}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} 0,00500 \text{ [kg]} \cdot (0,628 \text{ [m/s]})^2 = 9,87 \times 10^{-4} \text{ J}$$

c) A enerxía cinética é máxima cando a enerxía potencial é mínima, ou sexa nula. É dicir na orixe ou centro da traxectoria $x = 0$.

A enerxía potencial é máxima cando a elongación é máxima, ou sexa a amplitude. É dicir $x = A = 0,100 \text{ m}$

14. Unha partícula de masa $m = 0,1 \text{ kg}$, suxeita no extremo dun resorte, oscila nun plano horizontal cun M.H.S., sendo a amplitude $A = 0,20 \text{ m}$ e a frecuencia $f = 5 \text{ s}^{-1}$. No instante inicial a posición é $x = A$. Calcula para $t = T/8 \text{ s}$:

- A velocidade e aceleración.**
- A enerxía mecánica.**
- A frecuencia con que oscilaría se se duplica a masa.**

(P.A.U. Xuño 13)

Rta.: a) $v = -4,44 \text{ m/s}$; $a = -140 \text{ m/s}^2$; b) $E = 1,97 \text{ J}$; c) $f = 3,54 \text{ Hz}$

Datos

Masa que realiza o M.H.S.

Amplitude

Frecuencia

Posición inicial

Incógnitas

Velocidade para $t = T/8$

Aceleración para $t = T/8$

Enerxía mecánica

Frecuencia se se duplica a masa

Outros símbolos

Constante elástica do resorte

Período

Pulsación (frecuencia angular)

Fase inicial

Forza recuperadora elástica

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Relación entre a aceleración a e a elongación x

Cifras significativas: 3

$m = 0,100 \text{ kg}$

$A = 0,200 \text{ m}$

$f = 5,00 \text{ s}^{-1}$

$x_0 = A = 0,200 \text{ m}$

v

a

E

f_2

k

$T = 1/f$

$\omega = 2\pi \cdot f$

φ_0

F

$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$

$a = -\omega^2 \cdot x$

Ecuacións

Lei de Hooke: forza recuperadora elástica

2ª lei de Newton

Enerxía potencial elástica

Enerxía cinética

Enerxía mecánica

$$F = -k \cdot x$$

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

Solución:

a) A ecuación dun M.H.S. é:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

A amplitude é un dato: $A = 0,200$ m. A frecuencia angular ω calcúlase a partir da frecuencia f :

$$\omega = 2 \pi \cdot f = 2 \pi [\text{rad}] \cdot 5,00 [\text{s}^{-1}] = 31,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Para calcular a fase inicial φ_0 úsase o dato da posición inicial: Para $t = 0$, $x_0 = A = 0,200$ m

$$A = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen } \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \arcsen(1) = \pi / 2$$

A ecuación queda:

$$x = 0,200 \cdot \text{sen}(10 \pi \cdot t + \pi / 2) [\text{m}]$$

(De elixirse a ecuación $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, a fase inicial sería: $\varphi' = 0$)

Derivando a ecuación de movemento queda:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(0,200 \cdot \text{sen}(10 \pi \cdot t + \pi / 2))}{dt} = 0,200 \cdot 10 \cdot \pi \cdot \cos(10 \pi \cdot t + \pi / 2) = 6,28 \cdot \cos(10 \pi \cdot t + \pi / 2) \text{ m/s}$$

Como o tempo é $t = T / 8$, calculamos o período:

$$T = 1 / f = 1 / (5,00 [\text{s}^{-1}]) = 0,200 \text{ s}$$

e o tempo

$$t = T / 8 = 0,200 [\text{s}] / 8 = 0,0250 \text{ s}$$

polo que a velocidade nese instante valerá:

$$v = 6,28 \cdot \cos(10 \pi [\text{rad/s}] \cdot 0,0250 [\text{s}] + \pi / 2) [\text{m/s}] = -4,44 \text{ m/s}$$

Obtemos a aceleración derivando a ecuación da velocidade con respecto ao tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(6,28 \cdot \cos(10 \pi t + \pi / 2))}{dt} = 6,28 \cdot 10 \pi \cdot [-\text{sen}(10 \pi t + \pi / 2)] = -197 \cdot \text{sen}(10 \pi t + \pi / 2) [\text{m/s}^2]$$

Substituíndo o valor do tempo:

$$a = -197 \cdot \text{sen}(10 \pi [\text{rad/s}] \cdot 0,0250 [\text{s}] + \pi / 2) [\text{m/s}^2] = -140 \text{ m/s}^2$$

b) A enerxía mecánica pode calcularse como a enerxía potencial máxima, como a enerxía cinética máxima ou como a suma das enerxías cinética e potencial en calquera instante

$$E = (E_c + E_p) = \frac{1}{2} k \cdot A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

De elixir a primeira, hai que calcular o valor da constante elástica k .Empregando a 2ª lei de Newton, e tendo en conta que nun M.H.S. A aceleración recuperadora é proporcional á elongación: $a = -\omega^2 \cdot x$:

$$F = m \cdot a = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

Igualando esta coa lei de Hooke, supondo que a única forza que actúa é a forza elástica:

$$F = -k \cdot x$$

$$-k \cdot x = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$k = m \cdot \omega^2 = 0,100 \text{ [kg]} \cdot (31,4 \text{ rad/s})^2 = 98,7 \text{ N/m}$$

Energía mecánica:

$$E = E_{p \text{ máx}} = 98,7 \text{ [N/m]} (0,200 \text{ [m]})^2 / 2 = 1,97 \text{ J}$$

Podería terse calculado a enerxía mecánica como a enerxía cinética máxima.

A velocidade ten un valor máximo cando o coseno da fase vale 1.

$$v_{\text{máx}} = 6,28 \cos(10 \pi t + \pi / 2) \text{ [m/s]} = 6,28 \text{ m/s}$$

$$E = E_{c \text{ máx}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{máx}}^2 = 0,100 \text{ [kg]} \cdot (6,28 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 1,97 \text{ J}$$

Tamén podería optarse por calcular a enerxía mecánica como a suma das enerxías cinética e potencial, pero sería un proceso máis longo porque habería que calcular o valor da constante elástica e o da posición. (Só se tiña calculada a velocidade)

c) Da ecuación que relaciona a constante elástica coa frecuencia angular

$$k = m \cdot \omega^2 = m \cdot (2 \pi \cdot f)^2 = 4 \pi^2 \cdot f^2 \cdot m$$

pódese despexar a frecuencia f

$$f = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{98,7 \text{ [N/m]}}{0,2 \text{ [kg]}}} = 3,54 \text{ s}^{-1}$$

e vese que a frecuencia é inversamente proporcional á raíz cadrada da masa. Se la masa faise o dobre, a frecuencia diminúe nun factor $\sqrt{2}$.

● PÉNDULO.

1. Un péndulo simple de lonxitude $l = 2,5 \text{ m}$, desvíase do equilibrio ata un punto a $0,03 \text{ m}$ de altura e sóltase. Calcula:

a) A velocidade máxima.

b) O período.

c) A amplitude do movemento harmónico simple descrito polo péndulo.

Dato $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

(P.A.U. Xuño 11)

Rta.: a) $v_{\text{máx}} = 0,77 \text{ m/s}$; b) $T = 3,2 \text{ s}$; c) $A = 0,39 \text{ m}$

Datos

Lonxitude do péndulo

Altura inicial

Velocidade inicial

Aceleración da gravidade

Incógnitas

Velocidade máxima

Período

Amplitude do M.H.S.

Outros símbolos

Pulsación (frecuencia angular)

Fase inicial

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Período do péndulo

Relación entre o arco s e o ángulo central θ nunha circunferencia de radio R

Energía cinética

Energía potencial do peso

Cifras significativas: 3

$$l = 2,50 \text{ m}$$

$$h_0 = 0,0300 \text{ m}$$

$$v_0 = 0$$

$$g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v_{\text{máx}}$$

$$T$$

$$A$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$\varphi_0$$

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$s = \theta R$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

Ecuacións

Principio de conservación da enerxía mecánica

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

Solución:

a) Como a única forza que realiza traballo é o peso (o traballo da tensión da corda é nulo porque a tensión é perpendicular ao desprazamento en todo momento), a enerxía mecánica consérvase:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} m v_f^2 + m \cdot g \cdot h_f$$

$$v_f = \sqrt{2 g \cdot h_0} = \sqrt{2 \cdot 9,80 [\text{m/s}^2] \cdot 0,0300 [\text{m}]} = 0,767 \text{ m/s}$$

b) O período vale

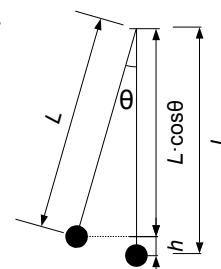
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2,50 [\text{m}]}{9,80 [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]}} = 3,17 \text{ s}$$

c) Na figura vese o xeito de calcular o ángulo a correspondente a amplitude a partir da altura h_0 e a lonxitude l :

$$l - l \cos \theta = h_0$$

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{h_0}{l}\right) = \arccos\left(1 - \frac{0,0300 [\text{m}]}{2,50 [\text{m}]}\right) = \arccos 0,988 = 0,155 \text{ rad}$$

$$A = l \cdot \theta = 2,50 [\text{m}] \cdot 0,155 [\text{rad}] = 0,388 \text{ m}$$



O movemento de péndulo é harmónico simple porque $\theta (= 0,155) \approx \sin \theta (= 0,154)$

2. Unha bola colgada dun fío de 2 m de lonxitude desvíase da vertical un ángulo de 4° , sóltase e obsérvanse as súas oscilacións. Acha:

a) A ecuación do movemento harmónico simple.

b) A velocidade máxima da bola cando pasa pola posición de equilibrio.

c) Comproba o resultado obtido no apartado anterior, utilizando a ecuación da conservación da enerxía mecánica.

(P.A.U. Set. 13)

Rta.: a) $s = 0,140 \sin(2,21 t + 4,71) [\text{m}]$; b) $v_{\text{máx}} = 0,309 \text{ m/s}$

Datos

Lonxitude do fío

Amplitude angular (elongación angular máxima)

Aceleración da gravidade (non a dan pero sen ela non se pode resolver)

Incógnitas

Elongación en función do tempo

Velocidade máxima da bola

Outros símbolos

Pulsación (frecuencia angular)

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Período do péndulo

Relación entre o arco s e o ángulo central θ nunha circunferencia

Cifras significativas: 3

$l = 2,00 \text{ m}$

$\theta_0 = 4,00^\circ = 0,0698 \text{ rad}$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$

θ

$v_{\text{máx}}$

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\theta = \theta_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$s = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$s = \theta R$$

Solución:

a) Tomando o movemento de péndulo como harmónico simple porque $\theta \approx \sin \theta$

$$\sin 0,0698 = 0,0697 \approx 0,0698$$

calcúlase o período e a frecuencia angular

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{2,00 \frac{[m]}{9,81} [m/s^2]} = 2,84 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2,84 \text{ s}} = 2,21 \text{ rad/s}$$

A ecuación de movemento queda

$$\theta = 0,0698 \cdot \sin(2,21 t + \varphi_0) [\text{rad}]$$

Cando $t = 0$, $\theta = 0,0698$ (está na posición de máxima elongación),

$$0,0698 = 0,0698 \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\sin \varphi_0 = 1 \begin{cases} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \\ \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Tomando como positivo o sentido en que se mova ao principio, queda

$$\theta = 0,0698 \cdot \sin(2,21 t + 4,71) [\text{rad}]$$

A elongación máxima ou amplitude:

$$A = s_{\text{máx}} = \theta_0 R = \theta_0 l = 0,0698 [\text{rad}] \cdot 2,00 [\text{m}] = 0,140 \text{ m}$$

A ecuación de movemento quedaría

$$s = 0,140 \sin(2,21 t + 4,71) [\text{m}]$$

b) A velocidade máxima cando pasa pola posición de equilibrio, calcúlase derivando a ecuación de movemento

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \{0,140 \sin(2,21 t + 4,71)\} = 0,309 \cos(2,21 t + 4,71) [\text{m/s}]$$

que alcanza un valor máximo cando o coseno da fase é 1.

$$v_{\text{máx}} = 0,309 \text{ m/s}$$

c) No punto máis alto, a altura vale:

$$h_{\text{máx}} = l - l \cos \theta_0 = l (1 - \cos \theta_0) = 2,00 [\text{m}] (1 - \cos 0,0698) = 4,87 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Como a única forza non conservativa (a tensión do fío) non realiza traballo (porque o desprazamento é perpendicular sempre á dirección da forza), a enerxía mecánica consérvase:

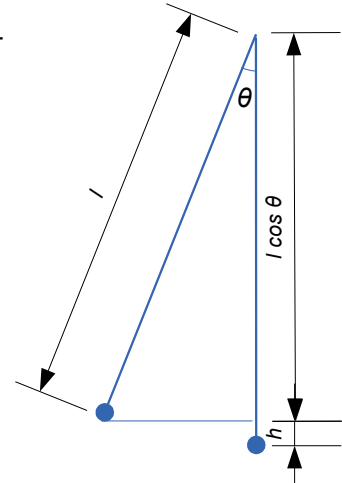
$$(E_c + E_p)_{\text{arriba}} = (E_c + E_p)_{\text{abaixo}}$$

$$\left(\frac{1}{2} m v^2 + m \cdot g \cdot h\right)_{\text{arriba}} = \left(\frac{1}{2} m v^2 + m \cdot g \cdot h\right)_{\text{abaixo}}$$

$$2 m \left(\frac{1}{2} v^2 + g \cdot h\right)_{\text{arriba}} = 2 m \left(\frac{1}{2} v^2 + g \cdot h\right)_{\text{abaixo}}$$

$$2 g \cdot h_{\text{arriba}} = v_{\text{abaixo}}^2$$

$$v_{\text{abaixo}} = \sqrt{2 g \cdot h_{\text{arriba}}} = \sqrt{2 \cdot 9,81 [m/s^2] \cdot 4,87 \times 10^{-3} [m]} = 0,309 \text{ m/s}$$



3. Un péndulo simple oscila cunha elongación de 18° desenvolvendo 10 oscilacións por segundo. Tomando como instante inicial a posición de equilibrio:

- a) **Escrebe a súa elongación en función do tempo.**
 b) **Determina o seu período de oscilación na Lúa, onde a gravidade é aproximadamente un sexto da terrestre.**

(P.A.U. Xuño 98)

Rta.: a) $s = 7,81 \times 10^{-4} \sin(20 \pi t)$ [m]; b) $T_L = 0,245$ s.

Datos

Amplitude angular (elongación angular máxima).

Frecuencia de oscilación na Terra

Instante inicial

Gravidade na Lúa

Incógnitas

Elongación en función do tempo

Período de oscilación na lúa

Outros símbolos

Pulsación (frecuencia angular)

Fase inicial

Período na Terra

Ecuacións

De movemento no M.H.S.

Período do péndulo

Relación entre o arco s e o ángulo centrar θ nunha circunferencia de radio R $s = \theta R$

Cifras significativas: 3

$$\theta_0 = 18^\circ = \pi/10 \text{ rad} = 0,314 \text{ rad}$$

$$f_T = 10,0 \text{ Hz}$$

$$t_0 = 0 \text{ s}$$

$$g_L = g_T / 6,00$$

$$\theta$$

$$T_L$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$\varphi_0$$

$$T_T = 1 / f_T$$

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Solución:

a) Tomando o movemento de péndulo como harmónico simple porque $\theta \approx \sin \theta$

$$\sin 0,314 = 0,309 \approx 0,314 \text{ rad}$$

$$\omega = 2 \pi f = 2 \pi [\text{rad}] \cdot 10 [\text{Hz}] = 20 \pi \text{ rad/s} = 62,8 \text{ rad/s}$$

$$\theta = \pi/10 \sin(20 \pi t + \varphi_0) [\text{rad}]$$

Cando $t = 0$, $\theta = 0$,

$$0 = \theta_0 \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\sin \varphi_0 = 0 \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ \varphi_0 = \pi \end{cases}$$

Tomando como positivo o sentido en que se mova ao principio, queda

$$\theta = \pi/10 \sin(20 \pi t) [\text{rad}]$$

Como podemos calcular a lonxitude do péndulo, xa que

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\frac{g}{l} = \left(\frac{2 \pi}{T} \right)^2 = \omega^2$$

$$l = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9,81 [\text{m/s}^2]}{(62,8 [\text{rad/s}])^2} = 2,48 \times 10^{-3} \text{ m}$$

A elongación máxima ou amplitude:

$$A = s_{\text{máx}} = \theta_0 R = \theta_0 l = 0,314 [\text{rad}] \cdot 2,48 \times 10^{-3} [\text{m}] = 7,81 \times 10^{-4} \text{ m}$$

A ecuación de movemento quedaría

$$s = 7,81 \times 10^{-4} \sin(20 \pi t) \text{ [m]}$$

Análise: a lonxitude do péndulo (2,5 mm) é raquítica, pero débese a uns datos máis ben irrealis.

b) O período do péndulo na Terra é:

$$T_T = 1 / f_T = 1 / 10,0 \text{ [Hz]} = 0,100 \text{ s}$$

Da ecuación do período, facendo a relación entre o período do péndulo na Lúa e na Terra,

$$\frac{T_L}{T_T} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} \Rightarrow T_L = T_T \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = 0,100 \text{ [s]} \sqrt{\frac{g_T}{g_T/6,00}} = 0,100 \text{ [s]} \sqrt{6,00} = 0,245 \text{ s}$$

Análise: O péndulo vai máis amodo na Lúa, pola súa menor gravidade, polo que o período debería ser maior, como así é.

● ONDAS.

1. A ecuación dunha onda transversal que se propaga a través dunha corda é

$$y = 0,1 \sin [2 \pi (0,4 t - 6,25 x)] \text{ (sistema internacional). Determina:}$$

a) A amplitude, lonxitude de onda, frecuencia, constante e velocidade de propagación.

b) Velocidade e aceleración transversal das partículas do medio en $x = 0$, $t = T/2$.

(P.A.U. Set. 99)

Rta.: a) $A = 0,1 \text{ m}$; $\lambda = 0,16 \text{ m}$; $f = 0,4 \text{ Hz}$; $k = 39 \text{ rad/m}$; $v = 0,064 \text{ m/s}$; b) $v = -0,25 \text{ m/s}$; $a = 0$

Datos

Ecuación da onda

Incógnitas

Amplitude

Lonxitude de onda

Número de onda (constante?)

Frecuencia

Velocidade de propagación

Velocidade da partícula en $x = 0$ e $t = T/2$

Aceleración da partícula en $x = 0$ e $t = T/2$

Outros símbolos

Posición do punto (distancia ao foco)

Período

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

Número de onda

Frecuencia

Relación entre a lonxitude de onda e a frecuencia

Cifras significativas: 2

$$y = 0,1 \sin [2 \pi (0,4 t - 6,25 x)]$$

A

λ

k

f

v

v

a

x

T

$$y = A \sin \left[2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

$$k = 2 \pi / \lambda$$

$$f = 1 / T$$

$$v = \lambda f$$

Solución:

a) Comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional con a ecuación dada queda:

Amplitude: $A = 0,1 \text{ m}$

Lonxitude de onda: $1 / \lambda = 6,25 \text{ [m}^{-1}\text{]}$, de onde $\lambda = 0,16 \text{ m}$

Número de onda: $k = 2 \pi / \lambda = 2 \pi \text{ [rad]} / 0,16 \text{ [m]} = 39 \text{ rad/m}$

Frecuencia: $f = 1 / T = 0,4 \text{ s}^{-1}$

Velocidade de propagación: $v = \lambda f = 0,16 \text{ [m]} \cdot 0,4 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 0,064 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

b) Derivando a ecuación de movemento, obtemos:

$$v = dy / dt = 0,1 \cdot 2 \pi \cdot 0,4 \cos [2 \pi (0,4 t - 6,25 x)]$$

$$v(x=0, t=T/2) = 0,08\pi \cos(\pi) = -0,25 \text{ m/s}$$

Volvendo a derivar,

$$a = dv / dt = -0,064\pi^2 \sin[2\pi(0,4 t - 6,25 x)]$$

$$a(x=0, t=T/2) = -0,064\pi^2 \sin(\pi) = 0$$

2. Unha onda transmítese o longo dunha corda. O punto situado en $x = 0$ oscila segundo a ecuación $y = 0,1 \cos 10 \pi t$ e outro punto situado en $x = 0,03 \text{ m}$ oscila segundo a posición $y = 0,1 \cos (10 \pi t - \pi / 4)$. Calcula:

- a) A constante de propagación, a velocidade de propagación e a lonxitude de onda.
b) A velocidade de oscilación dun punto calquera da corda.

(P.A.U. Xuño 06)

Rta.: a) $k = 26 \text{ rad/m}$; $v = 1,2 \text{ m/s}$; $\lambda = 0,24 \text{ m}$; b) $v = -\pi \sin (10 \pi t - 8,33 \pi x) \text{ m/s}$

Datos

Ecuación de oscilación na orixe $x = 0$

Ecuación de oscilación en $x = 0,03 \text{ m}$

Incógnitas

Número de onda (constante de propagación?)

Velocidade de propagación

Lonxitude de onda

Velocidade da partícula nun punto calquera da corda.

Outros símbolos

Posición do punto (distancia ao foco)

Período

Amplitude

Frecuencia

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

Número de onda

Frecuencia angular

Frecuencia

Relación entre a lonxitude de onda e a frecuencia

Cifras significativas: 2

$$y = 0,10 \cos (10 \pi t)$$

$$y = 0,10 \cos (10 \pi t - \pi / 4)$$

$$k$$

$$v$$

$$\lambda$$

$$v$$

$$x$$

$$T$$

$$A$$

$$f$$

$$y = A \cos (\omega t - k x)$$

$$k = 2 \pi / \lambda$$

$$\omega = 2 \pi / T = 2 \pi f$$

$$f = 1 / T$$

$$v = \lambda f$$

Solución:

a) Comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coas ecuacións de vibración en cada punto queda:

Ecuación dunha onda harmónica	$y = A \cos (\omega t - k x)$	
Na orixe: $x = 0$	$y = 0,10 \cos (10 \pi t) \Rightarrow$	$A = 0,10 \text{ m}$ $\omega = 10 \pi \text{ rad/s}$
No punto $x = 0,030 \text{ m}$	$y = 0,10 \cos (10 \pi t - \pi / 4) \Rightarrow$	$k x = \pi / 4$

Calcúlase o número de onda

$$k = \frac{\pi [\text{rad}]}{4 \cdot 0,030 [\text{m}]} = \frac{25}{3} \pi = 26 \text{ rad/m}$$

e a partir del a lonxitude de onda

$$\lambda = \frac{2 \pi}{k} = \frac{2 \pi}{25 \pi / 3 [\text{rad/m}]} = 0,24 \text{ m}$$

Da frecuencia angular $\omega = 10 \pi \text{ rad/s}$ pódese calcular a frecuencia:

$$f = \omega / 2 \pi = 10 \pi / 2 \pi = 5,0 \text{ s}^{-1} = 5,0 \text{ Hz}$$

A velocidade v de propagación da onda sae da relación:

$$v = \lambda f = 0,24 \text{ [m]} \cdot 5,0 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 1,2 \text{ m/s}$$

b) A ecuación de movemento queda:

$$y = 0,10 \cos(10 \pi t - 25 \pi / 3 x) \text{ [m]}$$

Derivando obtense:

$$v = dy / dt = -0,1 \cdot 10 \pi \sin(10 \pi t - 25 \pi / 3 x) \text{ [m/s]}$$

$$v = -\pi \sin[10 \pi t - (25 \pi / 3) x] \text{ [m/s]}$$

3. A función de onda que describe a propagación dun son é $y(x) = 6 \times 10^{-2} \cos(628t - 1,90x)$ (magnitudes no sistema internacional). Calcula:

a) A frecuencia, lonxitude de onda e velocidade de propagación.

b) A velocidade e a aceleración máximas dun punto calquera do medio no que se propaga a onda. (P.A.U. Set. 04)

Rta.: a) $f = 100 \text{ Hz}$; $\lambda = 3,31 \text{ m}$; $v = 330 \text{ m/s}$; b) $v_{\text{máx}} = 40 \text{ m/s}$; $a_{\text{máx}} = 2 \times 10^4 \text{ m/s}^2$

Datos

Ecuación da onda

Incógnitas

Frecuencia

Lonxitude de onda

Velocidade de propagación

Velocidade máxima

Aceleración máxima

Outros símbolos

Posición do punto (distancia ao foco)

Período

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

Número de onda

Frecuencia

Relación entre a lonxitude de onda e a frecuencia

Cifras significativas: 3

$$y = 6,00 \times 10^{-2} \cos(628t - 1,90x) \text{ m}$$

$$f$$

$$\lambda$$

$$v$$

$$v_{\text{máx}}$$

$$a_{\text{máx}}$$

$$x$$

$$T$$

$$y = A \sin \left[2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

$$k = 2 \pi / \lambda$$

$$f = 1 / T$$

$$v = \lambda f$$

Solución:

a) Comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional con a ecuación dada queda:

$$\text{Frecuencia} \quad 2 \pi / T = 2 \pi f = 628 \text{ s}^{-1} \text{ de onde } f = 100 \text{ Hz}$$

$$\text{Lonxitude de onda:} \quad 2 \pi / \lambda = 1,90 \text{ [m}^{-1}\text{]} \text{ de onde } \lambda = 3,31 \text{ m}$$

$$\text{Velocidade de propagación:} \quad v = \lambda f = 3,31 \text{ [m]} \cdot 100 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Análise: A velocidade da un resultado que semella ao da velocidade do son no ar.

b) Derivando a ecuación de movemento, obtemos:

$$v = dy / dt = -6,00 \times 10^{-2} \cdot 628 \sin(628t - 1,90x)$$

A velocidade é máxima cando $\sin \theta = 1$

$$|v_{\text{máx}}| = 6,00 \times 10^{-2} \text{ [m]} \cdot 628 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 37,7 \text{ m/s}$$

Volvendo a derivar,

$$a = dv / dt = -6,00 \times 10^{-2} \text{ [m]} \cdot (628 \text{ [s}^{-1}\text{]})^2 \cos(628t - 1,90x)$$

A aceleración é máxima cando $\cos \theta = 1$

$$|a_{\text{máx}}| = 6,00 \times 10^{-2} \text{ [m]} \cdot 628 \text{ [s}^{-1}\text{]}^2 = 2,37 \times 10^4 \text{ m/s}^2$$

(No caso de que se tomase só unha cifra significativa, xa que o dato amplitude 6×10^{-2} só ten unha, os resultados serían: $v_{\text{máx}} = 40 \text{ m/s}$; $a_{\text{máx}} = 2 \times 10^4 \text{ m/s}^2$)

4. Unha onda harmónica transversal propagase na dirección do eixe X: $y(x, t) = 0,5 \sin(4x - 6t)$ (S.I.). Calcula:

- A lonxitude de onda, a frecuencia coa que vibran as partículas do medio e a velocidade de propagación da onda.
- A velocidade dun punto situado en $x = 1 \text{ m}$ no instante $t = 2 \text{ s}$
- Os valores máximos da velocidade e a aceleración.

(P.A.U. Set. 08)

Rta.: a) $\lambda = 1,6 \text{ m}$; $f = 0,96 \text{ Hz}$; $v = 1,5 \text{ m/s}$; b) $v_1 = 0,44 \text{ m/s}$; c) $v_{\text{máx}} = 3 \text{ m/s}$; $a_{\text{máx}} = 18 \text{ m/s}^2$

Datos

Ecuación da onda

Cifras significativas: 3

$y = 0,500 \sin(-6,00 t + 4,00 x) \text{ m}$

Incógnitas

Lonxitude de onda

λ

Frecuencia

f

Velocidade de propagación

v

Velocidade dun punto situado en $x = 1 \text{ m}$ no instante $t = 2 \text{ s}$

v_1

Velocidade máxima

$v_{\text{máx}}$

Aceleración máxima

$a_{\text{máx}}$

Outros símbolos

Posición do punto (distancia ao foco)

x

Período

T

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

$y = A \sin(\omega t - kx)$

Número de onda

$k = 2\pi / \lambda$

Frecuencia angular

$\omega = 2\pi f$

Relación entre a lonxitude de onda e a frecuencia

$v = \lambda f$

Solución:

a) Comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación dada queda:

Lonxitude de onda: $k = 2\pi / \lambda = 4,00 \text{ [rad} \cdot \text{m}^{-1}]$ de onde $\lambda = 1,57 \text{ m}$

Frecuencia $\omega = 2\pi f = 6,00 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}]$ de onde $f = 0,955 \text{ Hz}$

A frecuencia coa que vibran as partículas do medio é a mesma que a da onda.

Velocidade de propagación: $v = \lambda f = 1,57 \text{ [m]} \cdot 0,955 \text{ [s}^{-1}] = 1,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

b) Derivando a ecuación de movemento, obtense:

$$v = dy / dt = -3,00 \cos(-6,00 t + 4,00 x) \text{ [m/s]}$$

Substituíndo os valores de $x = 1,00 \text{ m}$ e $t = 2,00 \text{ s}$

$$v_1 = -3,00 \cos(-6,00 \cdot 2,00 + 4,00 \cdot 1,00) = 0,437 \text{ m/s}$$

c) A velocidade é máxima cando $\cos \theta = 1$

$$|v_{\text{máx}}| = 3,00 \text{ m/s}$$

Volvendo a derivar,

$$a = dv / dt = -18,0 \sin(-6,00 t + 4,00 x)$$

A aceleración é máxima cando $\sin \theta = 1$

$$|a_{\text{máx}}| = 18,0 \text{ m/s}^2$$

5. A ecuación de propagación dun movemento ondulatorio é $y(x,t) = 2 \sin(8\pi t - 4\pi x)$ (S.I.)

- Cal é a amplitude, a frecuencia e a velocidade de propagación da onda?

b) Cal é (en función do tempo) a velocidade e a aceleración dun punto para o que x é constante? (P.A.U. Set. 01)

Rta.: a) $A = 2$ m; $n = 4$ Hz; $v = 2$ m/s; b) $v = 16 \pi \cos(8\pi t - 4\pi x)$ m/s; $a = -128 \pi^2 \sin(8\pi t - 4\pi x)$ m/s²

Datos

Ecuación da onda

Incógnitas

Amplitude

Frecuencia

Velocidade de propagación

Velocidade da partícula en $x = \text{constante}$ en función do tempo

Aceleración da partícula en $x = \text{constante}$ en función do tempo

Outros símbolos

Posición do punto (distancia ao foco)

Período

Lonxitude de onda

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

Frecuencia

Relación entre a lonxitude de onda e a frecuencia

Cifras significativas: 2

$$y(x,t) = 2,0 \sin(8\pi t - 4\pi x)$$

$$A$$

$$f$$

$$v$$

$$v$$

$$a$$

$$x$$

$$T$$

$$\lambda$$

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

$$f = 1 / T$$

$$v = \lambda f$$

Solución:

a) Comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional con a ecuación dada queda:

Amplitude: $A = 2,0$ m

Frecuencia $8,0 \pi = 2 \pi / T = 2 \pi f$, de onde $f = 4,0$ s⁻¹

Lonxitude de onda: $2 \pi / \lambda = 4,0 \pi$, de onde $\lambda = 0,50$ m

Velocidade de propagación: $v = \lambda f = 0,50$ [m] $\cdot$ $4,0$ [s⁻¹] = $2,0$ m·s⁻¹

b) Derivando a ecuación de movemento, obtemos:

$$v = dy / dt = 2,0 \cdot 8,0 \pi \cos(8\pi t - 4\pi x) = 16 \pi \cos(8\pi t - 4\pi x) \text{ m/s}$$

Volvendo a derivar,

$$a = dv / dt = 16 \pi \cdot 8 \pi [-\sin(8\pi t - 4\pi x)] = -128 \pi^2 \sin(8\pi t - 4\pi x) \text{ m/s}^2$$

6. A ecuación dunha onda sonora que se propaga na dirección do eixo X é: $y = 4 \sin 2\pi (330 t - x)$ (S.I.) Acha:

a) A velocidade de propagación.

b) A velocidade máxima de vibración dun punto do medio no que se transmite a onda.

c) Define a enerxía dunha onda harmónica.

(P.A.U. Set. 07)

Rta.: a) $v = 330$ m·s⁻¹ b) $v_{\text{máx}} = 8,3 \times 10^3$ m/s

Datos

Ecuación da onda

Incógnitas

Velocidade de propagación

Velocidade máxima de vibración dun punto do medio

Outros símbolos

Amplitude

Frecuencia

Posición do punto (distancia ao foco)

Período

Lonxitude de onda

Cifras significativas: 2

$$y = 4,0 \sin 2\pi (330 t - x) \text{ [m]}$$

$$v$$

$$v_{\text{máx}}$$

$$A$$

$$f$$

$$x$$

$$T$$

$$\lambda$$

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Frecuencia

$$f = 1 / T$$

Relación entre a lonxitude de onda e a frecuencia

$$v = \lambda f$$

Solución:

a) Comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación dada queda:

Amplitude: $A = 4,0 \text{ m}$ Frecuencia $330 = 1 / T = f$, de onde $f = 330 \text{ s}^{-1}$ Lonxitude de onda: $1 / \lambda = 1,0$ de onde $\lambda = 1,0 \text{ m}$ Velocidade de propagación: $v = \lambda f = 1,0 [\text{m}] \cdot 330 [\text{s}^{-1}] = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

b) Derivando a ecuación de movemento, obtense:

$$v = dy / dt = 4,0 \cdot 2\pi \cdot 330 \cos 2\pi(330 t - x) = 8,3 \times 10^3 \cos 2\pi(330 t - x) \text{ m/s}$$

que ten un valor máximo para o valor do $\cos(\varphi) = 1$

$$v_{\text{máx}} = 8,3 \times 10^3 \text{ m/s}$$

c) A enerxía que transmite unha onda harmónica produce un movemento harmónico simple das partículas do medio. Como a enerxía dun M.H.S. é

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2$$

e a velocidade máxima dun movemento harmónico simple é:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = 2 \pi f A$$

enerxía que transporta unha onda é

$$E = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2 = 2 \pi^2 m f^2 A^2$$

directamente proporcional ao cadrado da amplitude e ao cadrado da frecuencia.

7. Por unha corda tensa propágase unha onda transversal con amplitude 5 cm, frecuencia 50 Hz e velocidade de propagación 20 m/s. Calcula:**a) A ecuación de onda $y(x,t)$** **b) Os valores do tempo para os que $y(x,t)$ é máxima na posición $x = 1 \text{ m}$** **(P.A.U. Xuño 04)****Rta.:** a) $y = 0,05 \sin(100\pi t - 5\pi x) [\text{m}]$; b) $t = 0,055 + 0,01 n [\text{s}]$, ($n = 0, 1, 2 \dots$)**Datos**

Amplitude

Frecuencia

Velocidade de propagación

Cifras significativas: 2 $A = 5,0 \text{ cm} = 0,050 \text{ m}$ $f = 50 \text{ Hz} = 50 \text{ s}^{-1}$ $v = 20 \text{ m/s}$ **Incógnitas**

Ecuación da onda

Tempo para os que $y(x,t)$ é máxima na posición $x = 1 \text{ m}$ $y(x,t)$ t **Outros símbolos**

Posición do punto (distancia ao foco)

Período

Lonxitude de onda

 x T λ **Ecuacións**

Dunha onda harmónica unidimensional

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Frecuencia

$$f = 1 / T$$

Relación entre a lonxitude de onda e a frecuencia

$$v = \lambda f$$

Solución:

a) Período $T = 1 / f = 1 / 50 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 0,020 \text{ s}$
 Lonxitude de onda: $\lambda = v / f = 20 \text{ [m/s]} / 50 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 0,40 \text{ m}$
 Ecuación de onda:

$$y = 0,050 \sin(100\pi t - 5\pi x) \text{ [m]}$$

b) y é máxima cando $\sin \varphi = 1$, o que dá un ángulo de $\varphi = \pi / 2 \text{ [rad]}$ na primeira circunferencia. Si supoñemos que se refire a unha y máxima en valor absoluto, $\varphi = \pm \pi / 2 \text{ [rad]}$. En xeral

$$\varphi = \pi / 2 + n \pi \text{ [rad]}$$

sendo n un número natural ($n = 0, 1, 2, \dots$)
 Igualando e substituíndo $x = 1,0 \text{ m}$

$$100\pi t - 5\pi = \pi / 2 + n \pi$$

$$t = 0,055 + 0,010 n \text{ [s]}$$

Análise: A primeira vez que a elongación é máxima para $x = 1,0 \text{ m}$ é ($n = 0$) para $t = 0,055 \text{ s}$. Como o período é $T = 0,020 \text{ s}$, volverá a ser máximo cada $0,020 \text{ s}$, e máximo en valor absoluto cada medio ciclo $0,010 \text{ s}$.

8. Unha onda periódica vén dada pola ecuación $y(t, x) = 10 \sin 2\pi (50 t - 0,2 x)$ en unidades do S.I. Calcula:

- a) Frecuencia, velocidade de fase e lonxitude de onda.
 b) A velocidade máxima dunha partícula do medio e os valores do tempo t para os que esa velocidade é máxima (nun punto que dista 50 cm da orixe)

(P.A.U. Set. 05)

Rta.: a) $f = 50 \text{ Hz}$; $\lambda = 5,0 \text{ m}$; $v = 250 \text{ m/s}$; b) $v_{\max} = 3,1 \text{ km/s}$; $t = 0,002 + 0,010 n \text{ [s]}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Datos

Ecuación da onda
 Posición do punto (distancia ao foco)

Incógnitas

Frecuencia
 Velocidade de fase
 Lonxitude de onda
 Tempo para os que $v(x, t)$ é máxima na posición $x = 50 \text{ cm}$

Outros símbolos

Período

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

Frecuencia
 Relación entre a lonxitude de onda e a frecuencia

Cifras significativas: 2

$$y(t, x) = 10 \sin 2\pi (50 t - 0,20 x)$$

$$x = 50 \text{ cm} = 0,50 \text{ m}$$

$$f$$

$$v$$

$$\lambda$$

$$t$$

$$T$$

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

$$f = 1 / T$$

$$v = \lambda \cdot f$$

Solución:

a) Comparando a ecuación dunha onda coa do dato:

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

$$y(t, x) = 10 \sin 2\pi (50 t - 0,2 x)$$

Período: $T = 1 / 50 = 0,020 \text{ s}$
 Lonxitude de onda: $\lambda = 1 / 0,20 \text{ [m/s]} = 5,0 \text{ m}$

Das relacións entre período, frecuencia, lonxitude de onda e velocidade de propagación da onda (velocidade de fase)

Frecuencia: $f = 1 / T = 1 / 0,020 \text{ [s]} = 50 \text{ s}^{-1} = 50 \text{ Hz}$

Velocidade de fase: $v = \lambda \cdot f = 5,0 \text{ [m]} \cdot 50 \text{ [s}^{-1}] = 250 \text{ m/s}$

b) A velocidade dunha partícula do medio é a derivada da súa posición con respecto ao tempo

$$v = dy / dt = 10 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot \cos 2\pi(50t - 0,2x) = 1000\pi \cos 2\pi(50t - 0,2x) \text{ [m/s]}$$

que é máxima cando $\cos \varphi = 1$.

$$v_{\text{MÁX}} = 1000\pi = 3,1 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Este valor do coseno corresponde a un ángulo de $\varphi = 0$ ou π [rad] na primeira circunferencia, e, en xeral

$$\varphi = n \pi \text{ [rad]}$$

sendo n un número natural ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Igualando e substituíndo $x = 0,50 \text{ m}$

$$2\pi(50t - 0,10) = n \pi$$

$$t = 0,0020 + 0,010 n \text{ [s]}, (n = 0, 1, 2 \dots)$$

Análise: A primeira vez que a elongación é máxima para $x = 0,50 \text{ m}$ é ($n = 0$) para $t = 0,0020 \text{ s}$. Como o período é $T = 0,020 \text{ s}$, volverá a ser máximo cada vez que pase polo orixe, ou sexa, cada medio período $0,010 \text{ s}$.

9. Unha onda harmónica transversal propágase no sentido positivo do eixe X con velocidade $v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. A amplitude da oda é $A = 0,10 \text{ m}$ e a súa frecuencia é $f = 50 \text{ Hz}$.

a) Escribe a ecuación da onda.

b) Calcula a elongación e a aceleración do punto situado en $x = 2 \text{ m}$ no instante $t = 0,1 \text{ s}$.

c) Cal é a distancia mínima entre dous puntos situados en oposición de fase?

(P.A.U. Set. 11)

Rta.: a) $y = 0,10 \cdot \sin(100\pi t - 5\pi x) \text{ [m]}$; $y = 0$; $a = 0$; c) $\Delta x = 0,20 \text{ m}$

Datos

Amplitud

Frecuencia

Velocidade de propagación

Para o cálculo da elongación e aceleración: posición

tempo

Cifras significativas: 2

$$A = 0,10 \text{ m}$$

$$f = 50 \text{ Hz} = 50 \text{ s}^{-1}$$

$$v = 20 \text{ m/s}$$

$$x = 2,0 \text{ m}$$

$$t = 0,10 \text{ s}$$

Incógnitas

Ecuación da onda

Elongación do punto situado en $x = 2 \text{ m}$ no instante $t = 0,1 \text{ s}$.

Aceleración do punto situado en $x = 2 \text{ m}$ no instante $t = 0,1 \text{ s}$.

Distancia mínima entre dous puntos situados en oposición de fase

$$y(x, t)$$

$$y(2; 0,1)$$

$$a(2; 0,1)$$

$$\Delta x$$

Outros símbolos

Posición do punto (distancia ao foco)

Período

Lonxitude de onda

$$x$$

$$T$$

$$\lambda$$

Ecuacións

Dunha onda armónica unidimensional

$$y = A \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Frecuencia

$$f = 1 / T$$

Relación entre a lonxitude de onda e a frecuencia

$$v = \lambda \cdot f$$

Solución:

a) Período $T = 1 / f = 1 / 50 \text{ [s}^{-1}] = 0,020 \text{ s}$

Lonxitude de onda: $\lambda = v / f = 20 \text{ [m/s]} / 50 \text{ [s}^{-1}] = 0,40 \text{ m}$

Ecuación de onda:

$$y = 0,10 \cdot \sin(100\pi t - 5\pi x) \text{ [m]}$$

b) A aceleración é a derivada da velocidade con respecto ao tempo, e a velocidade é a derivada da posición con respecto ao tempo. Obtemos a ecuación da aceleración derivando a de posición dúas veces:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0,10 \cdot \sin(100\pi t - 5\pi x)) = 10\pi \cdot \cos(100\pi t - 5\pi x) \text{ [m/s]}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(10\pi \cdot \cos(100\pi t - 5\pi x)) = 1,0 \times 10^3 \pi^2 \sin(100\pi t - 5\pi x) \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Para $x = 2,0$ m e $t = 0,10$ s, a elongación é

$$y(2; 0,1) = 0,10 \cdot \sin(100\pi \cdot 0,10 - 5\pi \cdot 2,0) = 0 \text{ m}$$

e a aceleración:

$$a(2; 0,1) = 1,0 \times 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \sin(100\pi \cdot 0,10 - 5\pi \cdot 2,0) = 0 \text{ m/s}^2$$

(Se a ecuación de onda ponse en función do coseno, en vez do seno, as respostas serían:

$$y(2; 0,1) = 0,10 \text{ m} \quad \text{e} \quad a(2; 0,1) = 1,0 \times 10^3 \cdot \pi^2 = 9,9 \times 10^3 \text{ m/s}^2$$

c) Como están en oposición de fase, a diferenza de fase é π [rad]. Nun instante t , a diferenza de fase entre dous puntos situados en x_1 e x_2 é:

$$\Delta\varphi = [(100\pi t - 5\pi x_2)] - [(100\pi t - 5\pi x_1)] = 5\pi(x_1 - x_2) = 5\pi \Delta x = \pi \text{ rad}$$

$$\Delta x = 1 / 5 = 0,20 \text{ m}$$

Análise: A lonxitude de onda é a distancia mínima entre dous puntos que están en fase. A distancia mínima entre dous puntos que están en oposición de fase é: $\Delta x = \lambda / 2 = 0,20$ m, que coincide co calculado.

10. Unha onda plana propágase na dirección x positiva con velocidade $v = 340$ m/s, amplitude $A = 5$ cm e frecuencia $f = 100$ Hz (fase inicial $\varphi_0 = 0$)

a) Escribe a ecuación da onda.

b) Calcula a distancia entre dous puntos se a diferenza de fase nun intre dado é $2\pi/3$.

(P.A.U. Xuño 05)

Rta.: a) $y = 0,05 \sin(200\pi t - 0,588\pi x)$ [m]; b) $\Delta x = 1,13$ m

Datos

Amplitude

Frecuencia

Velocidade de propagación

Incógnitas

Ecuación de onda

Distancia entre dous puntos coa diferenza de fase de $2\pi/3$

Outros símbolos

Posición do punto (distancia ao foco)

Período

Lonxitude de onda

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

Frecuencia

Relación entre a lonxitude de onda e a frecuencia

Cifras significativas: 2

$$A = 5,0 \text{ cm} = 0,050 \text{ m}$$

$$f = 100 \text{ Hz} = 100 \text{ s}^{-1}$$

$$v = 340 \text{ m/s}$$

$$y(x, t)$$

$$\Delta x$$

$$x$$

$$T$$

$$\lambda$$

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

$$f = 1 / T$$

$$v = \lambda \cdot f$$

Solución:

a) Período

$$T = 1 / f = 1 / 100 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 0,010 \text{ s}$$

Lonxitude de onda: $\lambda = v / f = 340 \text{ [m/s]} / 100 \text{ [s}^{-1}] = 3,40 \text{ m}$

Ecuación de onda:

$$y = 0,050 \sin(200\pi t - 0,588\pi x) \text{ [m]}$$

b) Se a diferenza de fase é $2\pi/3$

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$2\pi \Delta x / \lambda = 2\pi / 3$$

$$\Delta x = \lambda / 3 = 1,13 \text{ m}$$

11. A ecuación dunha onda é $y(x, t) = 2 \cos 4\pi (5t - x)$ (S.I.). Calcula:

a) A velocidade de propagación.

b) A diferenza de fase entre dous puntos separados 25 cm.

c) Na propagación dunha onda, que se transporta? materia ou enerxía? Xustifícaa cun exemplo.

(P.A.U. Xuño 09)

Rta.: a) $v_p = 5,0 \text{ m/s}$; b) $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$

Datos

Ecuación da onda

Distancia entre os puntos

Incógnitas

Velocidade de propagación

Diferenza de fase entre dous puntos separados 25 cm

Outros símbolos

Pulsación (frecuencia angular)

Frecuencia

Lonxitude de onda

Número de onda

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

Relación entre a frecuencia f e a frecuencia angular ω

Relación entre a lonxitude de onda λ e o número de onda k

Relación entre a lonxitude de onda λ , a frecuencia f e a velocidade de propagación v_p

Cifras significativas: 2

$$y(t, x) = 2 \cos 4\pi(5t - x) \text{ [m]}$$

$$\Delta x = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}$$

$$v_p$$

$$\Delta\phi$$

$$\omega$$

$$f$$

$$\lambda$$

$$k$$

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$k = 2\pi / \lambda$$

$$v_p = \lambda f$$

Solución:

a) Comparando a ecuación dunha onda coa do dato:

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y = 2 \cos 4\pi(5t - x)$$

Pulsación (frecuencia angular) $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$

Número de onda: $k = 4\pi \text{ rad/m}$

Calcúlase agora a lonxitude de onda e a frecuencia para determinar a velocidade de propagación.

Frecuencia: $f = \omega / 2\pi = 20\pi \text{ [rad/s]} / 2\pi \text{ [rad]} = 10 \text{ s}^{-1} = 10 \text{ Hz}$

Lonxitude de onda: $\lambda = 2\pi / k = 2\pi \text{ [rad]} / 4\pi \text{ [rad/m]} = 0,50 \text{ m}$

Velocidade de propagación: $v_p = \lambda \cdot f = 0,50 \text{ [m]} \cdot 10 \text{ [s}^{-1}] = 5,0 \text{ m/s}$

b) Para calcular a diferenza de fase entre dous puntos restamos as fases ϕ

$$\Delta\phi = [4\pi(5t - x_2)] - [4\pi(5t - x_1)] = 4\pi(x_1 - x_2) = 4\pi \Delta x = 4\pi \cdot 0,25 = \pi \text{ rad}$$

Análise: A distancia entre os puntos é 0,25 m que é a metade da lonxitude de onda. Como os puntos que están en fase ou cuxa diferenza de fase é múltiplo de 2π atópanse a unha distancia que é múltiplo da lonxi-

tude de onda, unha distancia de media lonxitude de onda corresponde a unha diferenza de fase da metade de 2π , ou sexa, π rad

c) Unha onda é un mecanismo de transporte de enerxía sen desprazamento neto de materia. Nunha onda lonxitudinal dunha corda vibrante, as partículas do medio volven á súa posición inicial mentres a perturbación que provoca a elevación e depresión desprázase ao longo da corda.

12. A ecuación dunha onda transversal é $y(t, x) = 0,05 \cos(5t - 2x)$ (magnitudes no S.I.). Calcula:

- Os valores de t para os que un punto situado en $x = 10$ m ten velocidade máxima.
- Que tempo ha de transcorrer para que a onda percorra unha distancia igual a 3λ ?
- É estacionaria esta onda?

(P.A.U. Xuño 07)

Rta.: a) $t_a = 4,3 + 0,63 n$ [s], ($n = 0, 1, 2 \dots$); b) $t_b = 3,8$ s

Datos

Ecuación da onda

Posición do punto (distancia ao foco)

Incógnitas

Tempos para os que un punto situado en $x = 10$ m ten velocidade máxima

Tempo para que a onda percorra unha distancia igual a 3λ

Outros símbolos

Período

Lonxitude de onda

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

Relación entre a pulsación ω e o período T

Relación entre o número de onda k e a lonxitude de onda

Frecuencia

Relación entre a lonxitude de onda λ , a frecuencia f e a velocidade de propagación v_p

Cifras significativas: 2

$$y(t, x) = 0,050 \cos(5,0 \cdot t - 2,0 \cdot x)$$

$$x = 10 \text{ m}$$

$$t_a$$

$$t_b$$

$$T$$

$$\lambda$$

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\omega = 2\pi / T$$

$$k = 2\pi / \lambda$$

$$f = 1 / T$$

$$v_p = \lambda f$$

Solución:

a) A velocidade dunha partícula do medio é a derivada da súa posición con respecto ao tempo

$$v = dy / dt = -0,050 \cdot 5,0 \cdot \sin(5,0t - 2,0x) = -0,25 \sin(5,0t - 2,0x) \text{ [m/s]}$$

que é máxima cando $\sin \varphi = 1$.

$$v_{\text{MÁX}} = 0,25 \text{ m/s}$$

Este valor do seo corresponde a un ángulo de $\varphi = \pi/2$ ou $3\pi/2$ [rad] na primeira circunferencia, e, en xeral

$$\varphi = n\pi + \pi/2 \text{ [rad]}$$

sendo n un número natural ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Igualando e substituíndo $x = 10$ m

$$(5,0t - 20) = n\pi + \pi/2$$

$$t_a = 4,0 + 0,20 n\pi + \pi/10 = 4,3 + 0,63 n \text{ [s]}, (n = 0, 1, 2 \dots)$$

Análise: A primeira vez que a velocidade é máxima para $x = 10$ m é ($n = 0$) para $t = 4,3$ s. Como o período é $T = 1,3$ s, volverá ser máximo cada vez que pase polo punto de equilibrio, ou sexa, cada medio período: 0,63 s.

b) Pódese definir o período como o tempo que tarda unha onda en percorrer unha distancia igual á lonxitude de onda polo que o tempo necesario para que a onda percorra unha distancia igual a 3λ , será o triplo do período:

$$t_b = 3 \cdot T$$

Comparando a ecuación dunha onda coa do dato:

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y(t,x) = 0,05 \cos(5,0 \cdot t - 2,0 \cdot x)$$

a pulsación vale:

$$\omega = 5,0 \text{ rad/s}$$

e o período:

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi / 5,0 = 1,3 \text{ s}$$

Polo tanto o tempo necesario para que a onda percorra unha distancia igual a 3λ vale:

$$t_b = 3 \cdot T = 3,8 \text{ s}$$

Da ecuación da onda, podemos calcular a lonxitude de onda λ a partir do valor do número de onda

$$\lambda = 2\pi / k = 2\pi / 2,0 = 3,1 \text{ m}$$

e a velocidade v_p de propagación da onda polo medio:

$$v_p = \lambda f = \lambda / T = 3,1 \text{ [m]} / 1,3 \text{ [s]} = 2,5 \text{ m/s}$$

e o tempo que tarda en percorrer unha distancia igual a $3\lambda = 9,4 \text{ m}$

$$t_b = 9,4 \text{ [m]} / [2,5 \text{ m/s}] = 3,8 \text{ s}$$

c) As ondas estacionarias non se propagan e non hai unha transmisión neta de enerxía. Nas ondas estacionarias existen uns puntos, chamados nodos, que non oscilan. A súa elongación é nula en todo instante. A onda do enunciado non é onda estacionaria xa que non existe ningún punto da onda que sexa un nodo e teña unha elongación nula en calquera instante.

13. A ecuación dunha onda é $y(t, x) = 0,2 \sin \pi (100 t - 0,1 x)$. Calcula:

- A frecuencia, o número de ondas k , a velocidade de propagación e a lonxitude de onda.**
- Para un tempo fixo t , que puntos da onda están en fase co punto que se atopa en $x = 10 \text{ m}$?**
- Para unha posición fixa x , para que tempos o estado de vibración dese punto está en fase coa vibración para $t = 1 \text{ s}$?**

(P.A.U. Xuño 10)

Rta.: a) $f = 50 \text{ Hz}$; $k = 0,31 \text{ rad/m}$; $v = 1,0 \times 10^3 \text{ m/s}$; $\lambda = 20 \text{ m}$; b) $x = 10 + 20 n$; c) $t = 1,0 + 0,020 n$

Datos

Ecuación da onda
Posición do punto
Tempo de referencia

Cifras significativas: 2

$y(t,x) = 0,20 \sin \pi(100t - 0,10x)$
 $x = 10 \text{ m}$
 $t = 1,0 \text{ s}$

Incógnitas

Frecuencia
Número de ondas
Velocidade de propagación
Lonxitude de onda
Puntos da onda que están en fase co punto que se atopa en $x = 10 \text{ m}$
Tempos nos que o estado de vibración está en fase coa vibración para $t = 1 \text{ s}$

f
 k
 v_p
 λ

x

Outros símbolos

Pulsación (frecuencia angular)
Número de onda

ω
 k

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional
Relación entre a frecuencia f e a frecuencia angular ω
Relación entre a lonxitude de onda λ e o número de onda k
Relación entre a lonxitude de onda λ , a frecuencia f e a velocidade de propagación v_p

$y = A \cos(\omega t - kx)$
 $\omega = 2\pi f$
 $k = 2\pi / \lambda$
 $v_p = \lambda f$

Solución:

a) Comparando a ecuación dunha onda coa do dato, e supondo que as unidades son as do S.I.:

$$y = A \sin(\omega t - k x)$$

$$y = 0,20 \sin \pi(100 t - 0,10 x)$$

Pulsación (frecuencia angular) $\omega = 100 \pi \text{ rad/s}$

Número de onda: $k = 0,10 \pi \text{ rad/m}$

Calcúlase agora a lonxitude de onda e a frecuencia para determinar a velocidade de propagación.

Frecuencia: $f = \omega / 2 \pi = 100 \pi [\text{rad/s}] / 2 \pi [\text{rad}] = 50 \text{ s}^{-1} = 50 \text{ Hz}$

Lonxitude de onda: $\lambda = 2 \pi / k = 2 \pi [\text{rad}] / 0,10 \pi [\text{rad/m}] = 20 \text{ m}$

Velocidade de propagación: $v_p = \lambda \cdot f = 20 [\text{m}] \cdot 50 [\text{s}^{-1}] = 1,0 \times 10^3 \text{ m/s}$

b) Dous puntos atópanse en fase cando a diferenza de fase é múltiplo de 2π :

$$\Delta\varphi = 2\pi n \text{ (sendo } n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Delta\varphi = [\pi(100 t - 0,10 x_2)] - [\pi(100 t - 0,10 x_1)] = 0,10\pi(x_1 - x_2) = 2\pi n$$

$$x_1 = 20 n + x_2 = 10 + 20 n [\text{m}]$$

Análise: Os puntos que están en fase atópanse a unha distancia que é múltiplo da lonxitude de onda, $\Delta x = 20 n [\text{m}]$

c)

$$\Delta\varphi = [\pi(100 t_2 - 0,10 x)] - [\pi(100 t_1 - 0,10 x)] = 100\pi(t_2 - t_1) = 2\pi n$$

$$t_2 = 0,020 n + t_1 = 1,0 + 0,20 n [\text{s}]$$

Análise: Os instantes en que están en fase son múltiplos do período que é o inverso da frecuencia, $\Delta t = 1 / f = 0,020 n [\text{s}]$

14. Unha onda harmónica propágase en dirección x con velocidade $v = 10 \text{ m/s}$, amplitude $A = 3 \text{ cm}$ e frecuencia $f = 50 \text{ s}^{-1}$. Calcula:

a) A ecuación da onda.

b) A velocidade e aceleración máxima dun punto da traxectoria.

c) Para un tempo fixo t , que puntos da onda están en fase co punto $x = 10 \text{ m}$?

(P.A.U. Set. 10)

Rta.: a) $y = 0,030 \sin(100\pi t - 10\pi x) [\text{m}]$; b) $v_{\max} = 9,42 \text{ m/s}$; $a_{\max} = 2,96 \times 10^3 \text{ m/s}^2$; c) $x' = 10 + 0,2 n$

Datos

Ecuación da onda

Posición do punto

Tempo de referencia

Incógnitas

Frecuencia

Número de ondas

Velocidade de propagación

Lonxitude de onda

Puntos da onda que están en fase co punto que se atopa en $x = 10 \text{ m}$

Tempos nos que o estado de vibración está en fase coa vibración para $t = 1 \text{ s}$

Outros símbolos

Pulsación (frecuencia angular)

Número de onda

Ecuacións

Dunha onda harmónica unidimensional

Relación entre a frecuencia f e a frecuencia angular ω

Relación entre a lonxitude de onda λ e o número de onda k

Relación entre a lonxitude de onda λ , a frecuencia f e a velocidade de propagación v_p

Cifras significativas: 2

$$y(t, x) = 0,20 \sin \pi(100t - 0,10x)$$

$$x = 10 \text{ m}$$

$$t = 1,0 \text{ s}$$

$$f$$

$$k$$

$$v_p$$

$$\lambda$$

$$x$$

$$\omega$$

$$k$$

$$y = A \cos(\omega t - k x)$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$k = 2 \pi / \lambda$$

$$v_p = \lambda f$$

Solución:

a) Comparando a ecuación dunha onda coa do dato, e supondo que as unidades son as do S.I.:

$$y = A \sin(\omega t - kx)$$

$$y = 0,20 \sin \pi(100 t - 0,10 x)$$

Pulsación (frecuencia angular) $\omega = 100 \pi \text{ rad/s}$

Número de onda: $k = 0,10 \pi \text{ rad/m}$

Calcúlase agora a lonxitude de onda e a frecuencia para determinar a velocidade de propagación.

Frecuencia: $f = \omega / 2 \pi = 100 \pi [\text{rad/s}] / 2 \pi [\text{rad}] = 50 \text{ s}^{-1} = 50 \text{ Hz}$

Lonxitude de onda: $\lambda = 2 \pi / k = 2 \pi [\text{rad}] / 0,10 \pi [\text{rad/m}] = 20 \text{ m}$

Velocidade de propagación: $v_p = \lambda \cdot f = 20 [\text{m}] \cdot 50 [\text{s}^{-1}] = 1,0 \times 10^3 \text{ m/s}$

b) Dous puntos atópanse en fase cando a diferenza de fase é múltiplo de 2π :

$$\Delta\varphi = 2\pi n \text{ (sendo } n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Delta\varphi = [\pi(100 t - 0,10 x_2)] - [\pi(100 t - 0,10 x_1)] = 0,10\pi(x_1 - x_2) = 2\pi n$$

$$x_1 = 20 n + x_2 = 10 + 20 n [\text{m}]$$

Análise: Os puntos que están en fase atópanse a unha distancia que é múltiplo da lonxitude de onda, $\Delta x = 20 n [\text{m}]$

c)

$$\Delta\varphi = [\pi(100 t_2 - 0,10 x)] - [\pi(100 t_1 - 0,10 x)] = 100\pi(t_2 - t_1) = 2\pi n$$

$$t_2 = 0,020 n + t_1 = 1,0 + 0,020 n [\text{s}]$$

Análise: Os instantes en que están en fase son múltiplos do período que é o inverso da frecuencia, $\Delta t = 1 / f = 0,020 n [\text{s}]$

♦ CUESTIÓNS

● M.H.S.

1. Nun movemento harmónico simple, o sentido da forza recuperadora apunta sempre cara ao o de equilibrio. O seu valor:

A) É constante.

B) É sinusoidal como a elongación.

C) É proporcional á elongación.

(P.A.U. Xuño 97)

Solución: B ou C

C. A forza recuperadora é proporcional á elongación, como vén expresada na lei de Hooke.

$$F = -kx$$

na que k é a constante recuperadora do resorte.

B. É sinusoidal como a elongación é correcta xa que a ecuación da elongación é

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

sinusoidal. Da lei de Hooke pode escribirse que

$$F = -k \cdot x = -k \cdot A \sin(\omega t + \varphi)$$

que é tamén sinusoidal, pero oposta á da elongación.

2. Un obxecto realiza un M.H.S., cales das seguintes magnitudes son proporcionais entre si?:

- A) A elongación e a velocidade.
- B) A forza recuperadora e a velocidade.
- C) A aceleración e a elongación.

(P.A.U. Set. 06)

Solución: C

Por definición, un obxecto realiza un movemento harmónico simple cando a aceleración recuperadora é proporcional á separación da posición de equilibrio.

$$a = -\omega^2 x$$

Isto é equivalente a dicir que a ecuación de movemento é de tipo sinusoidal ou cosenoidal.

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Derivando.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d A \sin(\omega t + \varphi_0)}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

e volvendo a derivar

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d A \omega \cos(\omega t + \varphi_0)}{dt} = -A \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

3. Nun oscilador harmónico cúmprese que:

- A) A velocidade v e a elongación x son máximas simultaneamente.
- B) O período de oscilación T depende da amplitude A .
- C) A enerxía total E_T se cuadriplica cando se duplica a frecuencia.

(P.A.U. Xuño 12)

Solución: C

A forza recuperadora é unha forza conservativa (o traballo que realiza entre dous puntos é independente do camiño seguido) e dá lugar a unha enerxía potencial en cada punto de elongación x cuxa expresión é:

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Ao ser unha forza conservativa, a enerxía mecánica valerá o mesmo para calquera elongación: é constante.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Para o punto de equilibrio:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2 + \frac{1}{2} k \cdot 0^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{máx}}^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{máx}}^2$$

Por definición, un obxecto realiza un movemento harmónico simple cando a aceleración recuperadora é proporcional á separación da posición de equilibrio.

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Isto é equivalente a dicir que a ecuación de movemento é de tipo senoidal ou cosenoidal.

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Derivando.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

A velocidade é máxima cando o $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$

$$v_{\text{máx}} = A \cdot \omega$$

A pulsación ou fase angular, ω está relacionada coa frecuencia f pola expresión

$$\omega = 2 \pi f$$

Substituíndo na ecuación da enerxía total

$$E_T = \frac{1}{2} m \cdot v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \cdot (A 2 \pi f)^2 = 2 \pi m A^2 f^2$$

vese que é directamente proporcional ao cadrado da frecuencia. Si a frecuencia faise o dobre, a enerxía total se cuadriplica.

As outras opcións:

A: falsa. Como se dixo antes, a velocidade máxima cando o coseno da fase é 1 ($\varphi = 0$ ó $\varphi = \pi$). Da expresión da elongación x , vese que a amplitude é máxima cando o seno da fase é 1 ($\varphi = \pi/2$ ó $\varphi = 3\pi/2$)

B: falsa. A forza recuperadora elástica é:

$$F = -k \cdot x$$

Si só actúa esta forza elástica, pola 2ª lei de Newton:

$$-k \cdot x = m \cdot a$$

Para obter a expresión da aceleración dérivanse a expresión da velocidade:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

Substituíndo na expresión anterior:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m (-\omega^2 \cdot x)$$

queda

$$k = m \cdot \omega^2$$

A pulsación ou fase angular, ω está relacionada co período T pola expresión

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Substituíndo queda

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Despexando o período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

O período depende da masa e da constante elástica do resorte, pero non da amplitude.

4. Un punto material describe un movemento harmónico simple de amplitude A . Cal das seguintes afirmacións é correcta?:

A) A enerxía cinética é máxima cando a elongación é nula.

B) A enerxía potencial é constante.

C) A enerxía total depende da elongación x .

(P.A.U. Set. 12)

Solución: A

A ecuación dun movemento harmónico simple é:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

onde x é a elongación (separación da posición de equilibrio), A é a amplitude (máxima elongación), ω é a constante harmónica, t é o tempo e φ_0 é a fase inicial.

Derivando obtense a expresión da velocidade:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

A velocidade é máxima cando o $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$.

Como a enerxía cinética é

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

tamén será máxima nese caso.

Cando o coseno dun ángulo é 1, o seno dese ángulo vale 0.

Si o seno do ángulo vale 0, a elongación tamén vale 0. Polo tanto a enerxía cinética é máxima cando a elongación x é nula

As outras opcións:

B: Falsa. A forza que produce un movemento harmónico simple é unha forza conservativa (o traballo que realiza entre dous puntos é independente do camiño seguido) e dá lugar a unha enerxía potencial en cada punto de elongación x cuxa expresión é:

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

que depende do valor da elongación.

C: Falsa. Ao ser unha forza conservativa, a enerxía mecánica vale o mesmo en calquera elongación: é constante.

- 5. A enerxía mecánica total dun oscilador harmónico:**
A) Duplícase cando se duplica a amplitude da oscilación.
B) Duplícase cando se duplica a frecuencia da oscilación.
C) Cuadruplicase cando se duplica a amplitude da oscilación.

(P.A.U. Set. 96)

Solución: C

A enerxía dun oscilador harmónico vén dada pola expresión

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

k é a constante elástica do resorte

A é a amplitude da oscilación.

polo que se cuadruplica cando se duplica a amplitude da oscilación

- 6. A enerxía mecánica dun oscilador harmónico simple é función de:**
A) A velocidade.
B) A aceleración.
C) É constante.

(P.A.U. Xuño 08)

Solución: C

Un oscilador harmónico é aquel no que a posición cumpre a ecuación:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

que é equivalente a dicir que está sometido a unha forza recuperadora proporcional e de sentido contrario á separación da posición de equilibrio.

$$F = -k x$$

onde k é a constante elástica do oscilador.

Esta é unha forza conservativa (o traballo que realiza entre dous puntos é independente do camiño seguido) e dá lugar a unha enerxía potencial en cada punto de elongación x cuxa expresión é:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

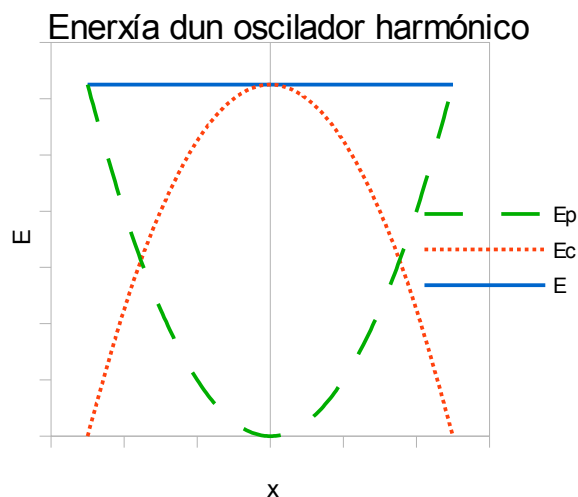
Ao ser unha forza conservativa, a enerxía mecánica valerá o mesmo para calquera elongación: é constante.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Para a elongación máxima ou amplitude:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m 0^2 + \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$



7. Se un oscilador harmónico atópase nun instante dado nunha posición x que é igual a metade da súa amplitude ($x = A/2$), a relación entre a enerxía cinética e potencial é:

- A) $E_c = E_p$
- B) $E_c = 2 E_p$
- C) $E_c = 3 E_p$

(P.A.U. Set. 04)

Solución: C

A enerxía potencial dun oscilador harmónico cando a elongación vale x é:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

onde k é a constante elástica do oscilador.

Como a enerxía cinética é:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

a enerxía mecánica do oscilador vale:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Para a elongación máxima ou amplitude:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m 0^2 + \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

Como a forza elástica é unha forza conservativa a enerxía mecánica é unha constante e valerá o mesmo para calquera elongación. Polo tanto:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Para o caso no que $x = A / 2$,

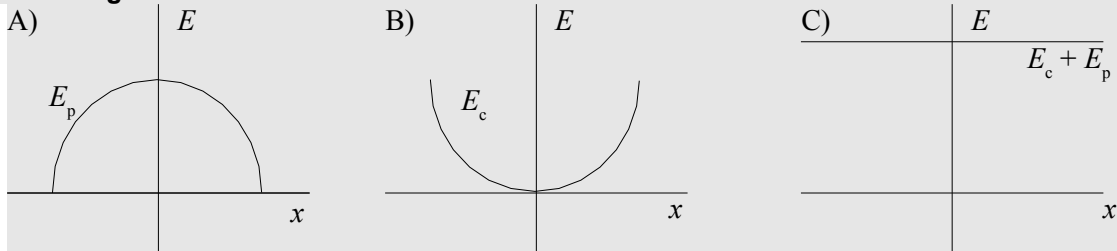
$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (A / 2)^2 = \frac{1}{4} (\frac{1}{2} k A^2) = \frac{1}{4} E$$

$$E_c = E - E_p = E - \frac{1}{4} E = \frac{3}{4} E$$

Vese que $E_c = 3 E_p$

● PÉNDULO

1. Nun péndulo simple indica cal das seguintes gráficas se axusta correctamente á relación enerxía/elongación:



(P.A.U. Set. 03)

Solución: C

Un péndulo sinxelo pode asimilarse a un oscilador harmónico. Nun oscilador harmónico a enerxía total do mesmo permanece constante e independente da elongación, sendo o seu valor $E = \frac{1}{2} k A^2$.

A gráfica A) sería incorrecta pois o máximo valor da enerxía potencial sería cando $x = A$. Cando $x = 0$ a enerxía potencial sería nula.

A gráfica B) tamén é incorrecta pois a enerxía cinética máxima sería para $x = 0$ ao pasar polo punto central do movemento.

● ONDAS

1. Nun movemento ondulatorio que se propaga a velocidade constante, a frecuencia e a lonxitude de onda:

A) Son independentes.

B) Están relacionadas.

C) Están relacionadas só se a onda se propaga nun medio material.

(P.A.U. Set. 98)

Solución: B

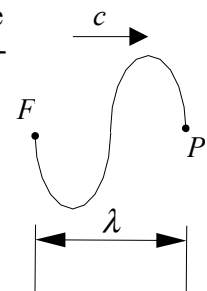
A relación entre a lonxitude de onda, λ , e a frecuencia, f , é: $\lambda \cdot f = v$, no que v é a velocidade de propagación da onda. A lonxitude de onda é inversamente proporcional á frecuencia.

Cando un foco F está emitindo unha onda, nun tempo igual ao período T , a onda desprázase unha distancia igual á lonxitude de onda. O punto P alcanzado pola onda nese tempo oscilará en fase co foco.

$$\lambda = v T = v / f$$

As outras opcións:

C: tanto nas ondas materiais (como o son), como nas lonxitudinais (como a luz), é válida a relación anterior.



2. Considéranse dúas ondas de radio, unha en onda media (AM) de 1000 kHz e outra en frecuencia modulada (FM) de 100 MHz.

A) A onda de AM ten maior lonxitude de onda ca de FM.

B) A onda de AM ten menor lonxitude ca de FM.

C) Todas as ondas de radio teñen igual lonxitude de onda.

(P.A.U. Xuño 96)

Solución: A

Todas as ondas electromagnéticas, incluídas as de radio, propáganse no baleiro á velocidade da luz $c = 3 \times 10^8$ m/s que é constante. A relación entre a lonxitude de onda, λ , e a frecuencia, f , é: $\lambda \cdot f = c$.

A lonxitude de onda é inversamente proporcional á frecuencia. Como a onda de AM ten menor frecuencia ca de FM ($1\,000\text{ kHz} (= 1\text{ MHz}) < 100\text{ MHz}$), a súa lonxitude de onda é maior. Concretamente:

$$\lambda (\text{AM}) = c / f = 3 \times 10^8 [\text{m/s}] / 1\,000 \times 10^3 [\text{Hz}] = 300\text{ m}$$

$$\lambda (\text{FM}) = c / f = 3 \times 10^8 [\text{m/s}] / 100 \times 10^6 [\text{Hz}] = 3\text{ m}$$

3. Se a ecuación de propagación dun movemento ondulatorio é $y(x, t) = 2 \sin(8\pi t - 4\pi x)$ (S.I.); a súa velocidade de propagación é:

- A) 2 m/s
- B) 32 m/s
- C) 0,5 m/s

(P.A.U. Xuño 08)

Solución: A

A ecuación dunha onda harmónica unidimensional pode escribirse como:

$$y = A \sin(\omega t \pm kx)$$

Na que

y é a elongación do punto que oscila (separación da posición de equilibrio)

A é a amplitude (elongación máxima)

ω é a frecuencia angular que está relacionada coa frecuencia f por $\omega = 2\pi f$.

t é o tempo

k é o número de onda, a cantidade de ondas que entran nunha lonxitude de 2π metros. Está relacionada coa lonxitude de onda λ por $k = 2\pi / \lambda$

x é a distancia do punto ao foco emisor.

O signo $\pm$ entre ωt e kx é negativo se a onda propágase en sentido positivo do eixo X , e positivo se o fai en sentido contrario.

A velocidade de propagación dunha onda é

$$c = \lambda \cdot f = (2\pi / k) \cdot (\omega / 2\pi) = \omega / k = (8\pi [\text{rad/s}]) / (4\pi [\text{rad/m}]) = 2\text{ m/s}$$

4. Cal das expresións propostas representa unha onda transversal que se propaga no sentido positivo do eixe x cunha velocidade de 5 m s^{-1} , ten unha amplitude de 1 m e unha frecuencia de 10 Hz ?

- A) $y = \cos 2\pi(10t - 5x)$
- B) $y = \cos 2\pi(10t + 5x)$
- C) $y = \cos 4\pi(5t - x)$

(P.A.U. Xuño 00)

Solución: C

A ecuación dunha onda harmónica unidimensional pode escribirse como:

$$y = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right)$$

Na que

y é a elongación do punto que oscila (separación da posición de equilibrio)

A é a amplitude (elongación máxima)

T é o período ($T = 1/f$, sendo f a frecuencia, o número de ondas que pasa por un punto na unidade de tempo)

λ é a lonxitude de onda (distancia mínima entre dous puntos que se atopan en fase)

t é o tempo e

x é a distancia do punto ao foco emisor.

O signo $\pm$ entre t/T e x/λ é negativo se a onda propágase en sentido positivo do eixo X , e positivo se o fai en sentido contrario.

As tres ecuacións son válidas para unha onda transversal de amplitude 1 m , pero a opción B desprázase en sentido negativo do eixo X .

As opcións A e C teñen unha frecuencia de 10 Hz, aínda que para velo é mellor escribir a ecuación C

$$y = \cos 2\pi(10 t - 2 x)$$

pero só a opción C ten unha velocidade de 5 m/s, xa que a velocidade de propagación dunha onda é

$$v = \lambda \cdot f = 1/2 \text{ [m]} \cdot 10 \text{ [Hz]} = 5 \text{ m/s}$$

5. A ecuación dunha onda transversal de amplitude 4 cm e frecuencia 20 Hz que se propaga no sentido negativo do eixe X cunha velocidade de 20 m·s⁻¹ é:

- A) $y(x,t) = 4 \cdot 10^{-2} \cos \pi (40 t + 2 x) \text{ [m]}$
 B) $y(x,t) = 4 \cdot 10^{-2} \cos \pi (40 t - 2 x) \text{ [m]}$
 C) $y(x,t) = 4 \cdot 10^{-2} \cos 2 \pi (40 t + 2 x) \text{ [m]}$

(P.A.U. Set. 13)

Solución: A

A ecuación dunha onda harmónica unidimensional pode escribirse como:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

Na que

y é a elongación do punto que oscila (separación da posición de equilibrio)

A é a amplitude (elongación máxima)

ω é a frecuencia angular que está relacionada coa frecuencia f por $\omega = 2 \pi \cdot f$

t é o tempo

k é o número de onda, a cantidade de ondas que entran nunha lonxitude de 2π metros. Está relacionada coa lonxitude de onda λ por $k = 2 \pi / \lambda$

x é a distancia do punto ao foco emisor.

O signo $\pm$ entre $\omega \cdot t$ e $k \cdot x$ é negativo se a onda propágase en sentido positivo do eixe X , e positivo se o fai en sentido contrario.

Como di que se propaga en sentido negativo do eixe X podemos descartar a opción B.

A frecuencia angular ω da ecuación da opción A é $\omega_A = \pi \cdot 40 \text{ [rad/s]}$, que corresponde a unha frecuencia de 20 Hz.

$$f_A = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi \text{ [rad/s]}}{2\pi \text{ [rad]}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

6. A ecuación dunha onda é $y = 0,02 \sin (50 t - 3 x)$. Isto significa que:

- A) $\omega = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ e $\lambda = 3 \text{ m}$.
 B) A velocidade de propagación $u = 16,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e a frecuencia $f = 7,96 \text{ s}^{-1}$.
 C) $T = 50 \text{ s}$ e o número de onda $k = 3 \text{ m}^{-1}$.

(P.A.U. Xuño 12)

Solución: B

A ecuación dunha onda harmónica unidimensional pode escribirse como:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

Na que

y é a elongación do punto que oscila (separación da posición de equilibrio)

A é a amplitude (elongación máxima)

ω é a frecuencia angular que está relacionada coa frecuencia f por $\omega = 2 \pi \cdot f$.

t é o tempo

k é o número de onda, a cantidade de ondas que entran nunha lonxitude de 2π metros. Está relacionada coa lonxitude de onda λ por $k = 2 \pi / \lambda$

x é a distancia do punto ao foco emisor.

O signo $\pm$ entre $\omega \cdot t$ e $k \cdot x$ é negativo si a onda propágase en sentido positivo do eixe X , e positivo si faio en sentido contrario.

A velocidade u de propagación dunha onda é $u = \lambda \cdot f$

Comparando a ecuación xeral coa do problema obtemos:

$$A = 0,02 \text{ m}$$

$$\omega = 50 \text{ rad/s}$$

$$k = 3 \text{ rad/m}$$

Para elixir a opción correcta calculamos algúns dos parámetros da ecuación (usando 2 cifras significativas)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi[\text{rad}]}{3,0[\text{rad/m}]} = 2,1 \text{ m}$$

que nos permite descartar a opción A.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50[\text{rad/s}]}{2\pi[\text{rad}]} = 8,0 \text{ s}^{-1} = 8,0 \text{ Hz}$$

$$u = \lambda \cdot f = 2,1 [\text{m}] \cdot 8,0 [\text{s}^{-1}] = 17 \text{ m/s}$$

que coincide coa opción B (si redondeamos os valores que aparecen en devandita opción ás cifras significativas que hai que usar)

A opción C non é correcta porque a frecuencia é a inversa do período:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8,0[\text{s}^{-1}]} = 0,13 \text{ s}$$

7. A enerxía que transporta unha onda é proporcional:

A) Á frecuencia.

B) Á amplitude.

C) Ós cadrados da frecuencia e amplitude.

(P.A.U. Set. 00)

Solución: C

A enerxía que transporta unha onda material harmónica unidimensional é a suma da cinética e de potencial:

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{máxima}}^2$$

A ecuación da onda harmónica unidimensional é

$$y = A \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Derivando con respecto ao tempo:

$$v = dy / dt = -A \cdot \omega \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

que é máxima cando $-\sin(\omega \cdot t - k \cdot x) = 1$,

$$v_{\text{máxima}} = A \cdot \omega$$

Substituíndo na ecuación da enerxía:

$$E = \frac{1}{2} m v_{\text{máxima}}^2 = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

Tendo en conta que a pulsación ω ou frecuencia angular é proporcional á frecuencia f : $\omega = 2\pi f$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m A^2 (2\pi f)^2 = 2\pi^2 m A^2 f^2$$

A enerxía que transporta unha onda é proporcional aos cadrados da frecuencia e da amplitude.

8. A enerxía dunha onda é proporcional:

A) Ao cadrado da amplitude.

B) Á inversa da frecuencia.

C) Á lonxitude de onda.

(P.A.U. Xuño 03)

Solución: A. Véxase a cuestión parecida na proba de [Set 00](#).

9. Cando unha onda harmónica plana se propaga no espazo, a súa enerxía é proporcional:

a) A $1/f$ (f é a frecuencia)

b) Ao cadrado da amplitude A^2

c) A $1/r$ (r é a distancia ao foco emisor)

(P.A.U. Set. 09)

Solución: B. Véxase a cuestión parecida na proba de [Set 00](#).

10. Razoa cal das seguintes afirmacións referidas á enerxía dun movemento ondulatorio é correcta:

- A) É proporcional á distancia ao foco emisor de ondas.
- B) É inversamente proporcional á frecuencia da onda.
- C) É proporcional ao cadrado da amplitude da onda.

(P.A.U. Set. 11)

Solución: C. Véxase a cuestión parecida na proba de [Set 00](#).

11. Na polarización lineal da luz:

- A) Modifícase a frecuencia da onda.
- B) O campo eléctrico oscila sempre nun mesmo plano.
- C) Non se transporta enerxía.

(P.A.U. Set. 06)

Solución: B

A luz emitida por un foco (unha lámpada, o sol) é unha onda electromagnética transversal que vibra en moitos planos. Cando atravesa un medio polarizador, só o atravesa a luz que vibra nun determinado plano.

As outras opcións:

A. Falsa. A frecuencia dunha onda electromagnética é unha característica da mesma e non depende do medio que atravesa.

B. As ondas, excepto as estacionarias, transmiten enerxía sen transporte neto de materia.

12. Unha onda luminosa:

- A) Non se pode polarizar.
- B) A súa velocidade de propagación é inversamente proporcional ao índice de refracción do medio.
- C) Pode non ser electromagnética.

(P.A.U. Xuño 06)

Solución: B

Defínese índice de refracción n_i dun medio i con respecto ao baleiro como a velocidade da luz no baleiro con respecto á velocidade da luz en devandito medio.

$$n_i = \frac{c}{v_{\text{luz } i}}$$

Como a velocidade da luz no baleiro é unha constante universal, a velocidade de propagación da luz nun medio é inversamente proporcional ao seu índice de refracción.

As outras opcións:

A. Falsa. A luz é unha onda electromagnética transversal que vibra en moitos planos. Cando atravesa un medio polarizador, só o atravesa a luz que vibra nun determinado plano.

B. Falsa. Maxwell demostrou que a luz é unha perturbación eléctrica harmónica que xera unha campo magnético harmónico perpendicular ao eléctrico e perpendiculares ambos á dirección de propagación.

13. Cando a luz atravesa a zona de separación de dous medios, experimenta:

- A) Difracción.
- B) Refracción.
- C) Polarización.

(P.A.U. Xuño 06)

Solución: B

A refracción é o cambio de dirección que experimenta unha onda cando pasa dun medio a outro no que se transmite a distinta velocidade.

Unha medida da densidade óptica dun medio é o seu índice de refracción n , o co-ciente entre c a velocidade da luz no baleiro e a velocidade v da luz no medio.

$$n = \frac{c}{v}$$

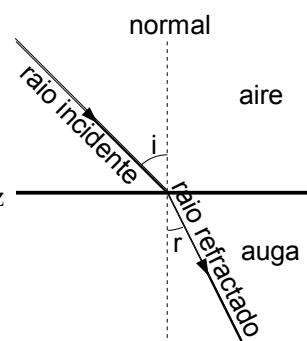
O índice de refracción n é sempre maior que a unidade, xa que a velocidade da luz no baleiro é o límite de calquera velocidade, segundo a teoría da relatividade restrinxida.

Cando un raio de luz pasa dun medio óptico menos «denso» (aire) a outro máis «denso» (auga), o raio desvíase achegándose á normal.

Leis da refracción:

1ª.- O raio incidente, o raio refractado e a normal á superficie de separación están no mesmo plano.

2ª.- Os senos dos ángulos i (o que forma o raio incidente coa normal á superficie de separación) e r (o que forma o raio refractado coa mesma normal) son directamente proporcionais ás velocidades da luz en cada medio, e inversamente proporcionais aos seus índices de refracción.



$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_i}{v_r} = \frac{n_r}{n_i}$$

14. Cando interfieren nun punto dúas ondas harmónicas coherentes, presentan interferencia construtiva si a diferenza de percorridos Δr é:

A) $\Delta r = (2n + 1) \lambda/2$

B) $\Delta r = (2n + 1) \lambda$

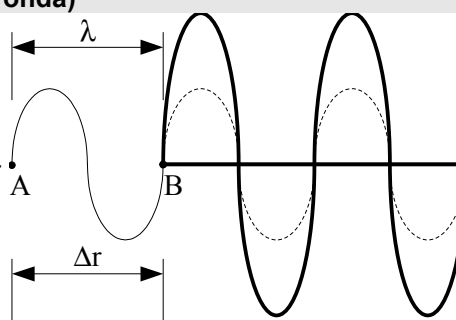
C) $\Delta r = n \lambda$

(sendo $n = 0, 1, 2$ etc. e λ a lonxitude de onda)

(P.A.U. Set. 02)

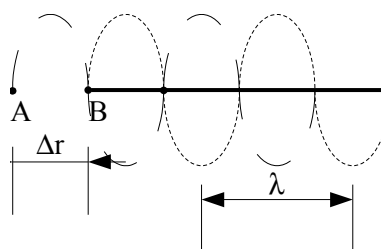
Solución: C ou B

No caso máis sinxelo, representamos dúas ondas que se propagan de esquerda a dereita dende dous puntos A e B separados por unha diferenza de camiño $\Delta r = B - A$. Se a diferenza de camiños é un número enteiro de lonxitudes de onda (da o mesmo que sexa $n\lambda$ ou $(2n+1)\lambda$), os máximos coinciden e amplifícanse e a interferencia é construtiva.



— Onda 1
 Onda 2
 — Interferencia construtiva

Se a distancia fose un número impar de semilonxitudes de onda (resposta a) as cristas dunha coinciden cos ventres da outra e anúlanse, e a interferencia é destrutiva.



— Onda 1
 Onda 2
 — Interferencia destrutiva

15. Dous focos O_1 e O_2 emiten ondas en fase da mesma amplitude (A), frecuencia (f) e lonxitude de onda (λ) que se propagan á mesma velocidade, interferindo nun punto P que está a unha distancia λ m de O_1 e 3λ m de O_2 . A amplitude resultante en P será:

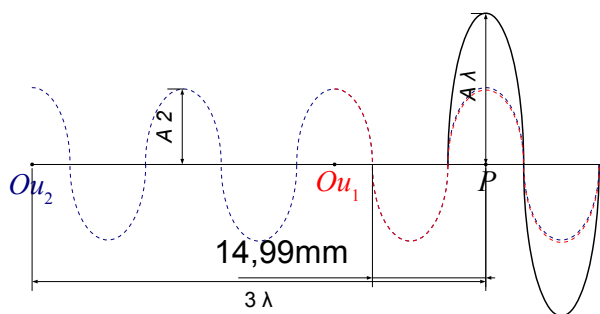
A) Nula.

B) A .

C) $2A$.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: C



Representamos dúas ondas que se propagan de esquerda a dereita desde dous puntos O_1 e O_2 de xeito que o punto P atópese a unha distancia λ de O_1 e a unha distancia 3λ de O_2 . Como a diferenza de camiños é un número enteiro de lonxitudes de onda, os máximos coinciden e se amplifican e a interferencia é construtiva. Como a frecuencia, a fase e amplitude son a mesma, a onda resultante será:

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t - kx_1) + A \sin(\omega t - kx_2)$$

$$y = 2A \sin\left(\omega t - k \frac{(x_1 + x_2)}{2}\right) \cos\left(k \frac{(x_1 - x_2)}{2}\right)$$

Como $x_1 - x_2 = 2\lambda$ e $k = 2\pi/\lambda$, queda

$$y = 2A \sin(\omega t - 4\pi) \cos(2\pi) = 2A \sin(\omega t)$$

unha onda da mesma frecuencia, en fase coas iniciais e co dobre de amplitude.

16. As ondas sonoras cumpren algunha das seguintes características:

- A) Son transversais.
- B) Son lonxitudinais.
- C) Transmítense no baleiro.

(P.A.U. Xuño 99)

Solución: B

Unha onda é transversal cando a dirección de oscilación é perpendicular á dirección de propagación da onda, e é lonxitudinal cando ámbalas direccións son paralelas.

Se pensamos no son xerado por unha superficie plana (a pel dun tambor, a pantalla dun altafalante), a vibración da superficie empuxa ás partículas do medio (moléculas de ar) que se desprazan ata chocar con outras veciñas e rebotar, nunha dirección na que oscila a superficie e na que se despraza o son.

As outras opcións:

A: Son transversais as ondas sobre a superficie da auga ou nunha corda vibrante.

C: Non se transmiten no baleiro. Un dispositivo que o confirma é poñer un espertador dentro dun recipiente no se que fai o baleiro. Faise soar e vai facéndose o baleiro no recipiente. Vese como o martelo do espertador segue a petar na campá, pero o son vaise facendo máis feble ata desaparecer.

17. O son dunha guitarra propágase como:

- A) Unha onda mecánica transversal.
- B) Unha onda electromagnética.
- C) Unha onda mecánica lonxitudinal.

(P.A.U. Set. 05)

Solución: C

O son é unha onda mecánica, xa que precisa un medio, (aire, auga, unha parede) para propagarse. É unha onda lonxitudinal porque as partículas do medio vibran na mesma dirección na que se propaga o son.

18. A posibilidade de oír detrás dun obstáculo sons procedentes dunha fonte sonora, que se atopa fóra da nosa vista, é un fenómeno de:

- A) Polarización.
- B) Difracción.
- C) Refracción.

(P.A.U. Set. 03)

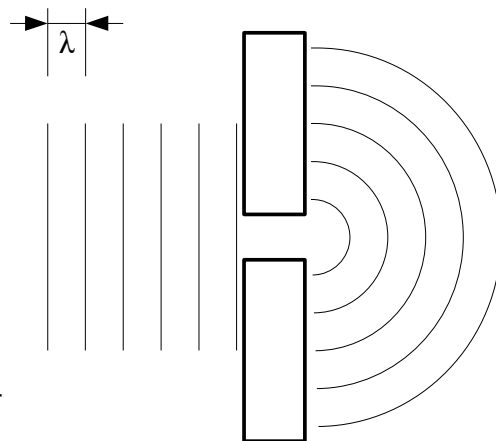
Solución: B

Difracción é o fenómeno que se produce cando unha onda “rodea” un obstáculo ou “se abre” cando atravesa un burato de dimensións parecidas á lonxitude de onda. É un fenómeno característico das ondas.

Pode representarse como na figura para unha onda plana.

A difracción do son se produce porque é un movemento ondulatorio, de lonxitude de onda da orde de cm a poucos metros (no aire) polo que pode rodear obstáculos de esas dimensións.

A luz, aínda que tamén é un movemento ondulatorio, ten lonxitudes de onda da orde dos 10^{-7} m. Prodúcese difracción da luz cando o tamaño do burato é menor que $1\ \mu\text{m}$, o que ocorre nas redes de difracción ou entre as pistas dun CD de música.



19. Se unha onda atravesa unha abertura de tamaño comparable á súa lonxitude de onda:

- a) Refráltase.
- b) Polarízase.
- c) Difráltase.

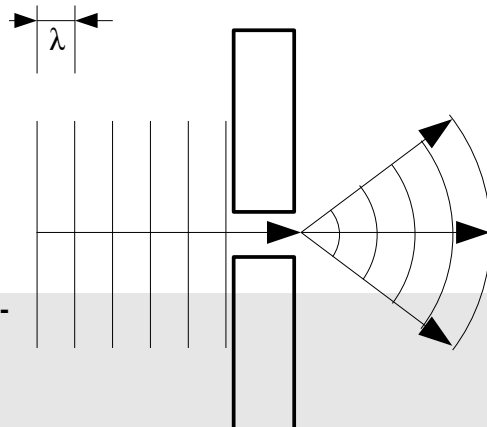
(Debuxa a marcha dos raios)

(P.A.U. Set. 09)

Solución: C

Prodúcese difracción cando unha onda «ábrese» ao atravesar unha abertura de tamaño comparable á súa lonxitude de onda. É un fenómeno característico das ondas.

Pode representarse como na figura para unha onda plana.



20. Unha onda de luz é polarizada por un polarizador A e atravesa un segundo polarizador B colocado despois de A. Cal das seguintes afirmacións é correcta con respecto á luz despois de B?

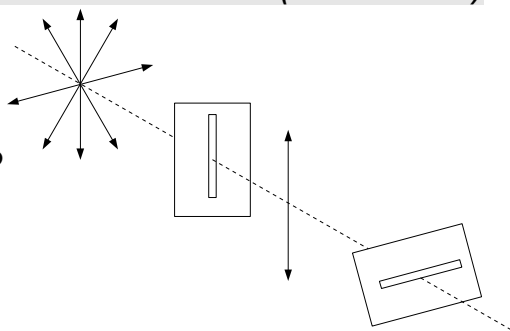
- A) Non hai luz se A e B son paralelos entre si.
- B) Non hai luz se A e B son perpendiculares entre si.
- C) Hai luz independentemente da orientación relativa de A e B.

(P.A.U. Xuño 11)

Solución: B

O fenómeno de polarización só ocorre nas ondas transversais. A luz é un conxunto de oscilacións de campo eléctrico e campo magnético que vibran en planos perpendiculares que se cortan na liña de avance a raio de luz. A luz do sol ou dunha lámpada eléctrica vibra nunha multitude de planos.

O primeiro polarizador só permite pasar a luz que vibra nun determinado plano. Si o segundo polarizador está colocado en dirección perpendicular ao primeiro, a luz que chega a el non ten compoñentes na dirección desta segunda polarización polo que non pasará ningunha luz.



21. Das seguintes ondas cales poden ser polarizadas?

- A) Ondas sonoras.
- B) Luz visible.
- C) Ondas producidas na superficie da auga.

(P.A.U. Xuño 02)

Solución: B

Para que unha onda poida ser polarizada ten que ser unha onda transversal.

A luz é una onda transversal que, cando é emitida por unha lámpada ou polo sol, vibra en todas as direccións perpendiculares á de propagación. Se atravesa un cristal polarizador, só se permite o paso á luz que vibra nun determinado plano. Se se pon un segundo polarizador en dirección perpendicular ao primeiro, a luz non pasa a través del.

As outras respostas:

A As ondas sonoras son ondas lonxitudinais, e non poden ser polarizadas

C. As ondas producidas na superficie da auga xa están polarizadas verticalmente (só vibran nunha dirección)

22. Unha onda electromagnética que se atopa cun obstáculo de tamaño semellante á súa lonxitude de onda:

- A) Forma nunha pantalla, colocada detrás do obstáculo, zonas claras e escuras.**
- B) Se polariza e o seu campo eléctrico oscila sempre no mesmo plano.**
- C) Reflictese no obstáculo.**

(P.A.U. Xuño 07)

Solución: A

A difracción é o fenómeno que se produce cando unha onda mecánica ou electromagnética «rodea» un obstáculo de dimensións parecidas á lonxitude de onda. É un fenómeno característico das ondas. Isto producirá un patrón de interferencias que, no caso da luz, dará lugar a unha sucesión de zonas claras e escuras nunha pantalla.

23. Se un feixe de luz láser incide sobre un obxecto de pequeno tamaño (da orde da súa lonxitude de onda):

- A) Detrás do obxecto hai sempre escuridade.**
- B) Hai zonas de luz detrás do obxecto.**
- C) Reflictese cara ao medio de incidencia.**

(P.A.U. Set. 07)

Solución: B

Chámase difracción ao fenómeno polo cal unha onda «rodea» obstáculos de tamaño similar a se lonxitude de onda. Prodúcese interferencias construtivas e destrutivas detrás do obstáculo, polo que existirán zonas «iluminadas» e zonas escuras.

24. Unha onda harmónica estacionaria caracterízase por:

- A) Ter frecuencia variable.**
- B) Transportar enerxía.**
- C) Formar nodos e ventres.**

(P.A.U. Xuño 10)

Solución: C

Unha onda estacionaria é xerada por interferencia de dúas ondas de iguais características pero con distinto sentido de desprazamento. Nela existen puntos que non vibran e que se chaman nodos. Un exemplo sería a onda estacionaria ancorada á corda dun instrumento musical como unha guitarra ou violín. Os extremos da corda están fixos (son os nodos) e a amplitude da vibración é máxima no punto central. Nesta onda a lonxitude da corda sería a metade da lonxitude de onda o a situación correspondería ao modo fundamental de vibración.

25. Cando a interferencia de dúas ondas orixina unha onda estacionaria, esta cumpre:

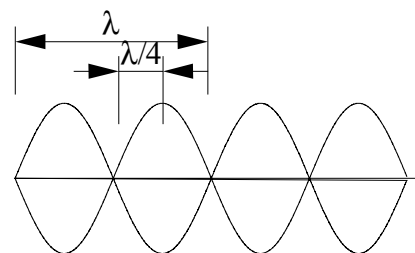
- A) A súa frecuencia duplicase.**
- B) A súa amplitude posúe máximos e nulos cada $\lambda / 4$.**
- C) Transporta enerxía proporcional ao cadrado da frecuencia.**

(P.A.U. Xuño 02)

Solución: B

Nunha onda estacionaria os máximos están separados por media lonxitude de onda $\Delta x = \lambda / 2$, e tamén os nulos. Polo tanto nunha distancia d igual a unha lonxitude de onda alternanse un nulo, un máximo, outro nulo e outro máximo.

A distancia entre cada un destes elementos é $\lambda / 4$.

**26. Dos seguintes tipos de ondas dicir cal non é capaz de transportar enerxía:**

- A) As ondas lonxitudinais.
- B) As ondas transversais.
- C) As ondas estacionarias.

(P.A.U. Set. 96)**Solución: C**

As ondas transportan enerxía sen desprazamento neto de materia. Pero as ondas estacionarias (como as dunha corda de violín ou guitarra están limitadas ou encerradas nun espazo fixo (a lonxitude da corda). Unha vez xeradas (normalmente por reflexión nun extremo) a enerxía queda atrapada no espazo que ocupan.

27. Nunha onda estacionaria xerada por interferencia de dúas ondas, cúmprese:

- A) A amplitude é constante.
- B) A onda transporta enerxía.
- C) A frecuencia é a mesma que a das ondas que interfieren.

(P.A.U. Xuño 05)**Solución: C**

Unha onda estacionaria xerada por interferencia de dúas ondas de iguais características pero con distinto sentido de desprazamento.

A ecuación da onda incidente, supondo que viaxa cara á dereita, é

$$y_1 = A \sin(\omega t - kx)$$

A onda incidente ao reflectirse no extremo fixo, sofre un cambio de fase de π rad e a onda reflectida que viaxa cara á dereita ten por ecuación:

$$y_2 = A \sin(\omega t + kx + \pi) = y_1 = -A \sin(\omega t + kx)$$

Cando as ondas interfieren, a onda resultante ten por ecuación

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t - kx) - A \sin(\omega t + kx)$$

Usando que

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

queda

$$y = 2 A \cos \omega t \sin kx$$

que é a ecuación dunha onda que ten unha frecuencia angular ω igual.

$$y = A_x \cos \omega t$$

As outras respostas:

- A. A amplitude depende do punto x : $A_x = 2 A \sin kx$
- B. Unha onda estacionaria non transporta enerxía.

♦ LABORATORIO

● RESORTE

1. **Fai unha descrición do material e do desenvolvemento experimental na determinación da constante elástica dun resorte polo método dinámico.**

(P.A.U. Xuño 13, Set. 09 e Xuño 96)

Solución:

Na medida da constante elástica dun resorte polo método dinámico tírase cara abaixo dunha masa de valor coñecido que colga dun resorte e déixase oscilar, medindo o tempo de varias oscilacións (10, por exemplo). Calcúlase o período dividindo o tempo entre o número de oscilacións.

Repítese o procedemento para outras masas coñecidas.

Da ecuación do período do resorte,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

que pode escribirse como:

$$T^2 = 4\pi^2 m / k$$

determinase o valor de constante.

No método gráfico represéntanse os cadrados dos períodos no eixe de ordenadas fronte ás masas no de abscisas. A gráfica debería dar unha liña recta de pendente:

$$\text{pendente estudio dinámico} = p_d = \Delta T^2 / \Delta m = 4\pi^2 / k$$

Determinando a pendente, pódese calcular o valor de constante:

$$k = 4\pi^2 / p_d$$

No método analítico calcúlase a constante do resorte k para cada masa e áchase o valor medio. Este método ten o problema de que se a masa do resorte non é desprezable fronte á masa pendurada, os resultados levan un erro sistemático.

2. **Na práctica do resorte elástico, consideras que o resorte utilizado tiña unha constante elástica grande ou pequena e por que?**

(P.A.U. Xuño 97)

Solución: Pequena.

As masas que se colgaban do resorte eran de ata 50 g, e o resorte se alongaba ata 10 cm.

Iso daría unha constante do resorte da orde de:

$$k = F / \Delta x = mg / \Delta x \approx 0,05 \text{ [kg]} \cdot 9,8 \text{ [m/s}^2\text{]} / 0,1 \text{ [m]} = 5 \text{ N/m}$$

Poden existir resortes dos que colgar varios quilos (os empregados para pesar bombonas de butano) e que se alongan só uns poucos centímetros

Iso daría unha constante do resorte da orde de:

$$k = F / \Delta x = mg / \Delta x \approx 15 \text{ [kg]} \cdot 9,8 \text{ [m/s}^2\text{]} / 0,05 \text{ [m]} = 3 \times 10^3 \text{ N/m}$$

unhas 100 – 1000 veces superior o obtido na práctica.

3. **Na práctica para medir a constante elástica k polo método dinámico, obtense a seguinte táboa. Calcula a constante do resorte.**

M (g)	5	10	15	20	25
T (s)	0,20	0,28	0,34	0,40	0,44

(P.A.U. Xuño 11)

Solución:

A forza recuperadora é:

$$F = -k \cdot x = m \cdot a = m(-\omega^2 x)$$

de onde

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Calcúlase o valor da constante para cada unha das experiencias

M (kg)	$5,0 \times 10^{-3}$	10×10^{-3}	15×10^{-3}	20×10^{-3}	25×10^{-3}
T (s)	0,20	0,28	0,34	0,40	0,44
k (N/m)	4,9	5,0	5,1	4,9	5,1

e o valor medio é:

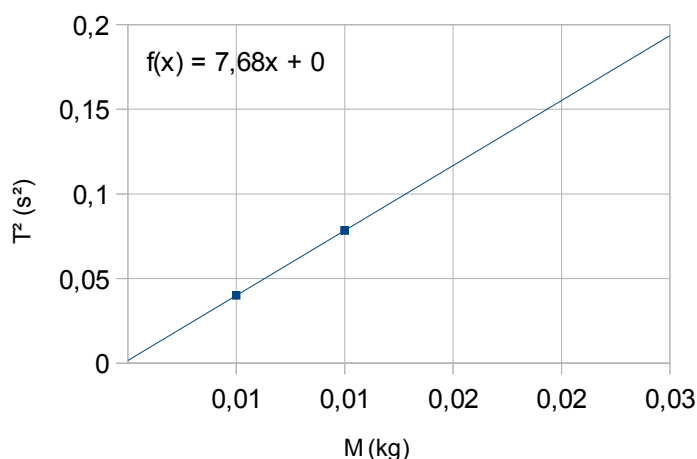
$$k_m = 5,0 \text{ N/m}$$

No caso de ter papel milimetrado, o mellor aínda unha folia de cálculo, poderíanse representar os cadrados dos períodos fronte ás masas, obténdose unha recta. Da pendente (7,78) da recta calcularíase a constante do resorte.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m$$

$$k = \frac{4\pi^2}{7,78} = 5,1 \text{ kg/s}^2 = 5,1 \text{ N/m}$$

que é un valor algo máis exacto que o obtido como valor medio.



- 4. Emprégase un resorte para medir a súa constante elástica polo método estático e polo dinámico, aplicando a lei de Hooke e o período en función da masa, respectivamente. Obsérvase unha certa diferenza entre os resultados obtidos por un e outro método. A que pode ser debido?**

(P.A.U. Xuño 11)

Solución:

O método estático consiste en medir os alongamentos producidos nun resorte ao pendurar del pesas de valor coñecido e aplicar a lei de Hooke:

$$F = -k \cdot \Delta x$$

A constante k de forza do resorte calcúlase a partir da pendente da recta obtida ao representar os alongamentos Δx fronte ás forzas F peso das pesas penduradas.

O método dinámico consiste en facer oscilar masas coñecidas penduradas do resorte e determinar o período de oscilación medindo o tempo dun número determinado de oscilacións.

Aínda que na oscilación vertical actúa a forza peso, ademais da forza recuperadora elástica, a forza resultante que actúa sobre a masa oscilante dá lugar a un movemento harmónico simple arredor da posición de equilibrio na que as forzas elástica e peso se anulan.

Combinando a ecuación de Hooke

$$F = -k \cdot \Delta x$$

coa 2ª lei de Newton

$$F = m \cdot a$$

tendo en conta que no M.H.S., a aceleración é proporcional e de sentido contrario á elongación,

$$a = -\omega^2 \cdot \Delta x$$

queda

$$-k \cdot \Delta x = -m \cdot \omega^2 \cdot \Delta x$$

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

A constante k de forza do resorte calcúlase a partir da pendente da recta obtida ao representar os cadrados T^2 dos períodos fronte as masas m das pesas penduradas.

Na gráfica $T^2 - m$, se os valores de m son os das masas penduradas, a recta obtida non pasa pola orixe de coordenadas senón que aparece desprazada cara á esquerda. Aínda que a constante de forza do resorte é a mesma en ámbalas dúas expresións, a masa m oscilante é maior que a masa que colga e inclúe parte da masa do resorte.

Se o cálculo da constante no método dinámico realízase a partir da pendente, a masa non debe afectar ao valor da constante obtida. Pero se a constante calcúlase coa ecuación anterior, o resultado pode ser diferente se a masa do resorte non é desprezable fronte ás masas penduradas.

5. No desenvolvemento da práctica do resorte elástico, obtivéronse valores parecidos da constante elástica polos métodos estático e dinámico? Cal pode ser a causa?

(P.A.U. Set. 98)

Solución: Si, parecidos.

Teoricamente, a constante é a mesma, pois a ecuación empregada no método dinámico

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

pódese obter da lei de Hooke $F = -kx$, (empregada no estudio estático) xunto coa ecuación da aceleración:

$$a = \omega^2 x$$

e a segunda lei de Newton

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

As diferencias, ademais dos erros experimentais, poden ser debidos a que a masa do resorte non sexa desprezable fronte á da masa que colga del. (Nestes casos, é costume considerar que o resorte contribúe con 1/3 da súa masa á masa oscilante total)

6. No estudio estático dun resorte representáanse variacións de lonxitude (Δl) fronte as forzas aplicadas (F_i), obtendo unha liña recta. No estudio dinámico do mesmo resorte representáanse as masas (m_i) fronte os cadrados dos períodos (T_i^2), obténdose tamén unha recta. Teñen as dúas a mesma pendente? Razoa a resposta.

(P.A.U. Set. 04)

Solución:

No estudio estático emprégase a lei de Hooke:

$$F = k \Delta l$$

Se Δl represéntase no eixe de ordenadas, e as forzas F no eixe de abscisas, a pendente da recta será:

$$\text{pendente estudio estático} = p_e = \Delta l / \Delta F = 1 / k$$

igual ao inverso da constante elástica do resorte.

No estudo dinámico, a ecuación empregada é a relación entre a constante elástica k e a constante harmónica ω

$$k = m \omega^2 = 4 \pi^2 m / T^2$$

Na representación, as masas están no eixe de ordenadas e os cadrados dos períodos no de abscisas. Entón:

$$\text{pendente estudo dinámico} = p_d = \Delta m / \Delta T^2 = k / 4 \pi^2$$

polo tanto a pendente da representación derivada do estudo dinámico debería ser:

$$p_d = k / 4 \pi^2 = 1 / (p_e 4 \pi^2)$$

distinta á obtida polo método estático.

7. Na determinación da constante elástica dun resorte podemos utilizar dous tipos de procedementos. En ambos os dous casos, obtense unha recta a partir da cal calcúlase a constante elástica. Explica como se determina o valor da constante a partir de dita gráfica para cada un dos dous procedementos, indicando que tipo de magnitudes hai que representar nos eixes de abscisas e de ordenadas.

(P.A.U. Xuño 12)

Solución:

No estudo estático úsase a lei de Hooke:

$$F = k \Delta l$$

na que F representa os peso das masas colgadas e Δl os alongamentos producidos no peirao.

Si na gráfica colócanse os alongamentos Δl no eixe de ordenadas, e as forzas F no eixe de abscisas, a pendente da recta será:

$$\text{pendente estudo estático} = p_e = \Delta l / \Delta F = 1 / k$$

igual ao inverso da constante elástica do resorte.

O valor da constante será o inverso da pendente do estudo estático.

No estudo dinámico, a ecuación empregada é a relación entre a constante elástica k e a constante harmónica ω

$$k = m \cdot \omega^2 = 4 \pi^2 m / T^2$$

Na representación, as masas están no eixe de ordenadas e os cadrados dos períodos no de abscisas. Entón:

$$\text{pendente estudo dinámico} = p_d = \Delta m / \Delta T^2 = k / (4 \pi^2)$$

O valor da constante será $4 \pi^2$ veces a pendente do estudo dinámico.

$$k = 4 \pi^2 p_d$$

8. Un resorte de masa desprezable e de lonxitude 20 cm, alóngase 4 cm cando se lle colga un peso de 1 kg. Se se estira 4 cm máis e se solta, cal será a frecuencia de oscilación?

(P.A.U. Set. 99)

Solución:

Suponse que os datos teñan dúas cifras significativas.

Ao colgar unha masa de 1,0 kg, o resorte queda en equilibrio cando se alonga $4,0 \times 10^{-2}$ m.

Pola 2ª lei de Newton:

$$\sum F = ma = 0$$

$$mg - kx = 0$$

$$1,0 \text{ [kg]} \cdot 9,8 \text{ [m/s}^2] - k 4,0 \times 10^{-2} \text{ [m]} = 0$$

Despexando:

$$k = 25 \text{ N/m}$$

Cando o resorte está a oscilar, se tomamos como posición de equilibrio a anterior, a forza resultante pode escribirse como $F = -kx$, sendo x a separación da posición de equilibrio.

Nun M.H.S. a aceleración recuperadora é proporcional á elongación, $a = -\omega^2 x$. Pola 2ª lei de Newton

$$F = ma = -m\omega^2 x$$

Igualando esta coa lei de Hooke,

$$F = -kx$$

$$-kx = -m\omega^2 x$$

$$k = m\omega^2 = m(2\pi f)^2$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{25 [\text{N/m}]}{1,0 [\text{kg}]}} = 0,79 \text{ Hz}$$

9. Na práctica para a medida da constante elástica dun resorte polo método dinámico:

a) Que precaucións debes tomar con respecto ao número e amplitude das oscilacións?

b) Como varía a frecuencia de oscilación si se duplica a masa oscilante.

(P.A.U. Xuño 06)

Solución:

a) O número de oscilacións debe ser da orde de 10 ou 20. Aínda que a precisión do cálculo do período aumenta co número de oscilacións ($T = t / N$), un número maior aumenta a probabilidade de equivocarse ao contar. A amplitude das oscilacións debe ser pequena (se a amplitude é moi grande, as pesas «saltan» fóra do portapesas), pero non tanto que sexa difícil contalas. Debe comprobarse que a oscilación é vertical.

b) No movemento vertical, a forza resultante entre a forza recuperadora elástica e o peso é unha forza recuperadora do tipo $F = -k \cdot y$

$$-k y = m a = m (-\omega^2 y)$$

$$k = m\omega^2$$

Se $m_2 = 2 m_1$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2 / 2\pi}{\omega_1 / 2\pi} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{k / m_2}{k / m_1}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{m_1}{2 m_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_2 = \frac{f_1}{\sqrt{2}}$$

A frecuencia será $\sqrt{2} = 1,4$ veces menor.

10. Na determinación da constante elástica dun resorte polo método dinámico, o período de oscilación é independente da amplitude? Depende da lonxitude e da masa do resorte? Que gráfica se constrúe a partir das magnitudes medidas?

(P.A.U. Set. 11, Xuño 00)

Solución:

Na expresión do período dun M.H.S.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

o período do resorte só depende da masa que oscila e da constante elástica.

Esta ecuación pode demostrarse así.

Un movemento harmónico simple cumpre que a forza elástica é proporcional á elongación.

$$F_{\text{ELASTICA}} = -kx$$

Pero tamén cumpre que a aceleración recuperadora é proporcional a da elongación x

$$a = -\omega^2 x$$

Pola segunda lei de Newton

$$F_{\text{RES}} = m \cdot a$$

Se a forza resultante é a elástica $F_{\text{RES}} = F_{\text{ELASTICA}}$,

$$m \cdot a = -k \cdot x$$

polo que

$$m(-\omega^2 x) = -kx$$

$$m\omega^2 = k$$

Como a pulsación é

$$\omega = 2\pi / T$$

$$T = 2\pi / \omega$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Na ecuación pódese observar que a amplitude non intervéñ, aínda que se o resorte alóngase dun xeito esaxerado as masas penduradas saen disparadas.

O período de oscilación non depende da lonxitude, pero si da masa do resorte.

A dependencia coa masa do resorte non é sinxela, xa que non todo o resorte oscila do mesmo xeito. Unha aproximación permite demostrar que o resorte contribúe á masa oscilante nun sumando que vale a terceira parte da masa do resorte.

$$m_{\text{OSCILANTE}} = m_{\text{PENDURADA}} + 1/3 M_{\text{RESORTE}}$$

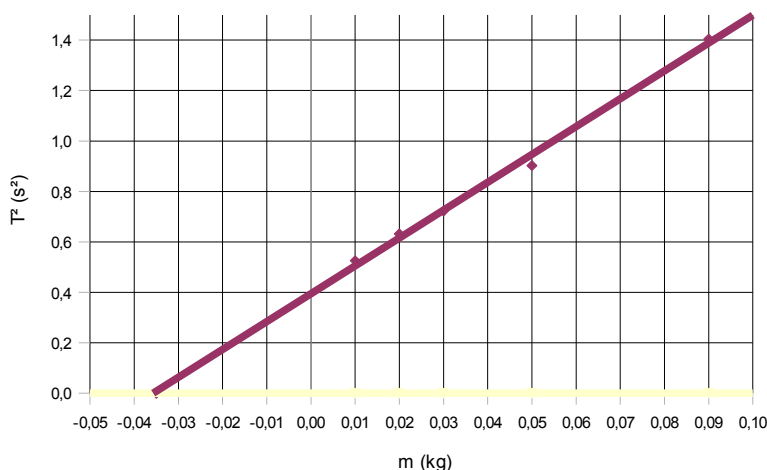
Ao facer unha representación gráfica dos cadrados dos períodos respecto a masa pendurada, a recta non pasa pola orixe. A contribución da masa do resorte é a abscisa na orixe da gráfica.

(Na gráfica que aparece a continuación, a contribución da masa do resorte sería de 0,035 kg)

A gráfica que se constrúe é a dos cadrados dos períodos fronte a masa pendurada, xa que, ao elevar ao cadrado a expresión do período queda

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

que corresponde á ecuación dunha recta que pasa pola orixe e ten unha pendente $= 4\pi^2 / k$



11. No estudio estático dun resorte elástico, que magnitudes se miden e que gráficas se usan para avaliar a constante elástica.

a) Inflúe a masa do resorte?

b) Poderías usar o resorte para pesar un obxecto? Razoa a resposta.

(P.A.U. Set. 00)

Solución: a) Véxase a resposta do [apartado b\) da cuestión práctica de Xuño 00](#).

b) Depende do límite de elasticidade do resorte.

Unha vez feita a práctica do estudio estático do resorte, poderíase usar a constante elástica calculada, para determinar a masa que provoca un determinado alongamento.

Colocaríamos o resorte cun prato de balanza e anotaríamos a posición do mesmo, medida cunha regra vertical.

Sen mover a regra, colocaríamos a masa no prato e mediríamos e anotaríamos a nova posición do prato.

Calcularíamos o alongamento x e usaríamos a ecuación de Hooke e o valor da constante k determinado na práctica para calcular a masa.

$$F = kx$$

$$mg = kx$$

$$m = kx / g$$

O resultado sería bastante seguro se a masa se atopase comprendida entre a mínima e a máxima empregadas na práctica, un pouco menos se fose algo maior que a máxima e non tería validez se fose moito maior (pois poderíamos haber excedido o límite de elasticidade do resorte).

12. Na medida da k_e polo método dinámico:

a) Como inflúe na medida de k_e a masa do propio resorte?

b) Poderías avaliar a masa "efectiva" do resorte?

(P.A.U. Xuño 02)

Solución: a) e b) Véxase a resposta do [apartado b\) da cuestión práctica de Xuño 00](#).

13. Medíronse no laboratorio os seguintes valores de masas e períodos de oscilación dun resorte; obtén a partir deles o valor da constante elástica.

T (s)	3,52	3,91	4,12	4,24	4,35
m (kg)	0,62	0,75	0,85	0,90	0,95

(P.A.U. Xuño 03)

Solución:

Das ecuacións da lei de Hooke ($F = -kx$) e a 2ª lei de Newton ($F = ma$), e mailo feito que nun M.H.S. a aceleración é proporcional á elongación ($a = -\omega^2 x$), resulta

$$-kx = m(-\omega^2 x)$$

$$k = \omega^2 m = 4\pi^2 m / T^2$$

De poderse facer un axuste por mínimos cadrados da recta T^2 fronte a m ($T^2 = 4\pi^2 m / k$), a pendente da mesma ($19,6 = 4\pi^2 / k$) nos daría o valor da constante k . ($k = 2,02 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$)

O mais doado é calcular a constante da ecuación $k = 4\pi^2 m / T^2$ e calcular o valor medio de k .

T (s)	3,52	3,91	4,12	4,24	4,35
m (kg)	0,62	0,75	0,85	0,90	0,95
T^2 (s ²)	12,4	15,3	17,0	18,0	18,9
k (N·m ⁻¹)	1,98	1,94	1,98	1,98	1,98

que da un valor medio de $k = 1,97 \pm 0,01 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

(Dadas as cifras significativas da masa, é mellor escribir: $k = 2,0 \pm 0,1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$)

14. Unha vez realizada a experiencia do resorte para determinar a constante elástica, como indagarías o valor dunha masa descoñecida (método estático e dinámico)?

Solución:

Método estático.

Co resorte baleiro se mira a posición do índice nunha regra graduada e anótase. x_1

Cólgase o obxecto do resorte, e, se deixa que acade o repouso. Se mira a posición do índice na regra e anótase. x_2

Tendo calculada a constante elástica do resorte k , a masa do obxecto se calcula do equilibrio estático entre a forza de recuperación elástica $k(x_2 - x_1)$ e o peso do obxecto mg .

$$m = k(x_2 - x_1) / g$$

Método dinámico.

Cólgase o obxecto do resorte, tírase cara abaixo un pouco e céibase. Comprobado que o resorte só se move no eixo vertical, mídese o tempo de dez oscilacións completas t .

Calcúlase o período $T = t / 10$.

Tendo calculada a constante elástica do resorte k , a masa do obxecto se calcula da ecuación do período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$m = \frac{k T^2}{4\pi^2}$$

15. A constante elástica dun resorte medida polo método estático:

- a) Depende do tipo de material?
- b) Varía co período de oscilación?
- c) Depende da masa e lonxitude do resorte?

(P.A.U. Set. 05)

Solución:

a) No guión da [práctica de laboratorio](#), non se fan probas de se existe unha dependencia entre o material do resorte e a súa constante elástica. Pódese dicir que dous resortes do mesmo material poden ter distinta constante elástica.

b) O método estático consiste en medir o alongamento que sofre un resorte cando colga del un obxecto de masa coñecida. Non se fai oscilar, polo que non se mide a relación entre o período de oscilación e a constante elástica. (No método dinámico o cálculo da constante elástica do resorte dá un resultado que se pode considerar constante)

c) Tampouco se comproba no laboratorio a dependencia entre a constante dun resorte e a súa masa nin a súa lonxitude. Damos por suposto que se mantén constante ao varia-la lonxitude, xa que o resorte se alonga ao colgarlle un peso.

16. Na medida da constante elástica polo método dinámico:

- a) Inflúe a lonxitude do resorte?
- b) Aféctalle o número de oscilacións e a amplitude delas?
- c) Varía a frecuencia de oscilación ao lle colgar diferentes masas?

(P.A.U. Set. 06)

Solución:

Na medida da constante elástica dun resorte polo método dinámico mídese o tempo de varias oscilacións (10, por exemplo) para cada unha de varias masas colgadas do resorte. Da ecuación do período do resorte, determínase o valor de constante.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Na ecuación anterior vese que o período de oscilación dunha masa non depende nin da lonxitude do resorte, nin do número de oscilacións nin da amplitude, só da masa que oscila.

Como a frecuencia é a inversa do período, tamén a frecuencia depende da masa que oscila.

17. Explica, brevemente, as diferenzas no procedemento para calcular a constante elástica dun resorte (K_e) polo método estático e polo método dinámico.

(P.A.U. Set. 12, Xuño 08)

Solución:

No método estático, baseado na lei de Hooke:

$$F = -k x$$

cólganse masas coñecidas, pesas dunha balanza, dun resorte e mídense os alongamentos producidos. A constante determínase numericamente da media dos cocientes $m g / \Delta L$

No método dinámico, baseado na ecuación que relaciona a constante do resorte k coa a constante harmónica ω^2 :

$$k = m \omega^2$$

apártase unha masa que colga dun resorte da posición de equilibrio e déixase oscilar, medindo o tempo de 10 oscilacións, calculando o período de oscilación, T , a constante harmónica $\omega^2 = 4 \pi^2 / T^2$, e a constante do resorte k . Repítese con varias masas coñecidas e áchase o valor medio.

18. Describe brevemente o procedemento empregado no laboratorio para medir a constante elástica dun resorte polo método estático.

(P.A.U. Xuño 10)

Solución:

O método estático, basease na lei de Hooke:

$$F = -k x$$

Cólganse pesas dunha balanza de masa coñecida dun resorte e mídense os alongamentos producidos. A constante determínase:

- numericamente da media dos cocientes $m g / \Delta L$,
- graficamente representando os alongamentos producidos fronte as masas colgadas. O valor da constante obtense da pendente da recta da gráfica pola relación.

$$\text{pendente} = p_e = \frac{\Delta L}{\Delta m} = \frac{g \Delta L}{\Delta m g} = g \frac{\Delta L}{\Delta F} = \frac{g}{k}$$

● PÉNDULO SIMPLE

1. Na determinación de g cun péndulo simple, describe brevemente o procedemento e o material empregado.

(P.A.U. Set. 01, Xuño 06)

Solución:

Cólgase unha esfera maciza dun fío duns 2,00 m, facendo pasar o outro extremo por unha pinza no extremo dun brazo horizontal, suxeito a vara vertical encaixada nunha base plana.

Axústase a lonxitude do fío a un 60 cm e mídese a súa lonxitude desde o punto de suspensión ata o centro da esfera. Apártase lixeiramente da posición de equilibrio e sóltase. Compróbase que oscila nun plano e a partir da 2ª ou 3ª oscilación mídese o tempo de 10 oscilacións. Calcúlase o período dividindo o tempo entre 10. Repítese a experiencia para comprobar que o tempo é practicamente o mesmo. Áchase o valor medio do período.

Axústase sucesivamente a lonxitude a 80, 100, 120, 150, 180 e 200 cm e repítese a experiencia para cada unha delas.

Unha vez obtidos os valores dos períodos T para cada lonxitude l do péndulo, pódese usar a ecuación do período do péndulo simple

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

para calcular g , a aceleración da gravidade.

Dos valores obtidos (que deben ser moi parecidos) áchase o valor medio.

2. Na práctica do péndulo simple, explica como afectaría á medida do período o seguinte:

- a) Duplicar a masa.
- b) Reducir a lonxitude á metade.
- c) Facer oscilacións con ángulos maiores de 45°.
- d) Realizar unha soa medida.

(P.A.U. Xuño 98)

Solución:

a) Non afectaría.

A expresión do período T dun péndulo de lonxitude l é:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

onde g é a aceleración da gravidade.

A masa non aparece na expresión e non afecta ao valor do período.

b) O período reducirase nun factor $\sqrt{2}$ como se deduce da expresión xa exposta.

c) Non se pode predicir.

O movemento deixará de ter un comportamento harmónico e a dependencia do período con outros parámetros non é sinxela. Considérase que o comportamento pódese tomar como harmónico para ángulos menores de 15°.

d) Non se pode predicir.

No estudio experimental hai que realizar varias medidas, entre outras cousas, para comprobar se hai unha tendencia e diminuír o risco de erros.

3. Que influencia teñen na medida experimental de g cun péndulo simple, as seguintes variables:

- a) A masa.
- b) O número de oscilacións.
- c) A amplitude das oscilacións?

(P.A.U. Set. 04)

Solución:

A medida experimental de g baséase na medida de tempos dun número de oscilacións para calcular o período do péndulo, e, a partir da ecuación, calcular o valor de g .

a) Ningunha,

A expresión do período T dun péndulo de lonxitude l é:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

onde g é a aceleración da gravidade.

A masa non aparece na expresión e non afecta ao valor do período.

b) Ningunha.

É conveniente que o número de oscilacións sexa da orden de 10 ou 20 para aumentar a precisión da medida.

c) Ningunha.

Considérase que o comportamento pódese tomar como harmónico para ángulos menores de 15° . Sempre que as amplitudes sexan pequenas non influirán na medida de g .

4. Na práctica do péndulo, que lonxitude de fio e amplitudes angulares iniciais consideras razoables? Por que?

(P.A.U. Set. 97)

Solución:

Unha lonxitude entre 0,6 m e 2,0 m. Se fose menor, sería doado superar o límite de amplitude de 15° para que o movemento tivese comportamento harmónico. Unha lonxitude maior sería incómoda para medir e facer a montaxe.

A amplitude ten que ser pequena, pois se se supera os 15° o comportamento deixa de ser harmónico.

5. Ao desenvolver a práctica do péndulo para o cálculo de "g", desempeña algunha función importante a lonxitude do fio?

(P.A.U. Xuño 98)

Solución:

Fanse medidas do tempo de dez oscilacións para cada valor da lonxitude do péndulo.

Determinase o período dividindo o tempo entre o número de oscilacións.

Mediante un cálculo, pode determinarse o valor da aceleración g que aparece na expresión do período do péndulo,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

e o seu erro absoluto e relativo.

Tamén pode calcularse a partir da pendente de gráfica dos cadrados dos períodos fronte as lonxitudes. Da ecuación anterior pode deducirse que dita pendente valerá

$$\left. \begin{array}{l} T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot l \\ \text{ordenadas} = \text{pendente} \cdot \text{abscisa} \end{array} \right\} \text{pendente} = \frac{4\pi^2}{g}$$

6. Na práctica do péndulo simple medíronse os seguintes datos de lonxitudes e períodos:

l (m)	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
T (s)	1,40	1,46	1,53	1,60	1,66

cal é o valor de g obtido con estes datos?

(P.A.U. Set. 02)

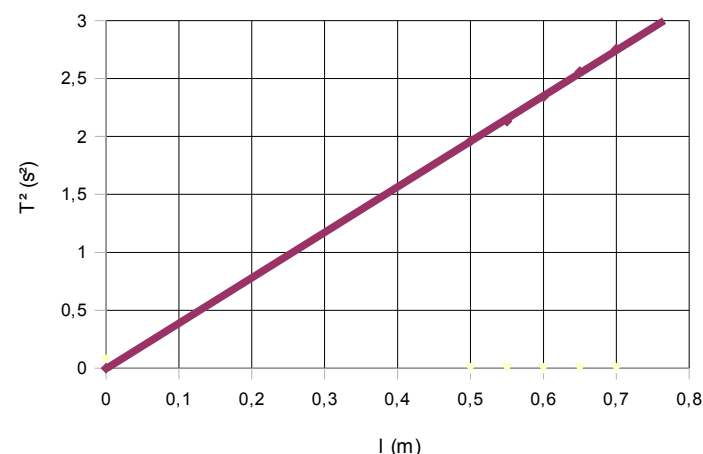
Solución:

l (m)	T (s)	T^2 (s ²)	g (m·s ⁻²)
0,50	1,40	1,96	10,1
0,55	1,46	2,13	10,2
0,60	1,53	2,34	10,1
0,65	1,60	2,56	10,0
0,70	1,66	2,76	10,0
			$g_m = 10,1$

Para obter unha recta temos que representar os cadrados dos períodos fronte as lonxitudes T^2 fronte a l .

Se se fai un axuste por mínimos cadrados a pendente queda:

$$T^2 / L = 4 \pi^2 / g = 4,04 \text{ s}^2/\text{m}$$



$$g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$$

Se se fai unha táboa, calculando o valor de g da expresión, $g = 4 \pi^2 L / T^2$, e determinación o valor medio de g da un resultado similar ($g = 10,1 \text{ ms}^{-2}$)

7. Fanse 5 experiencias cun péndulo simple. En cada unha realízanse 50 oscilacións de pequena amplitude e mídese cun cronómetro o tempo empregado. A lonxitude do péndulo é $l = 1 \text{ m}$. Con estes datos calcula a aceleración da gravidade.

Experiencia	1	2	3	4	5
Tempo(s) empregado en 50 oscilacións	101	100	99	98	102

(P.A.U. Xuño 09)

Solución:

Como só hai datos para unha lonxitude de péndulo só se pode calcular o valor medio do período e aplicar a ecuación do período do péndulo:

Experiencia	1	2	3	4	5
Tempo(s) empregado en 50 oscilacións	101	100	99	98	102
Período	2,02	2,00	1,98	1,96	2,04

O valor medio do período é:

$$T = \frac{\sum T_i}{N} = \frac{10,00}{5} = 2,00 \text{ s}$$

e o valor de l aceleración g da gravidade despegada da ecuación do período do péndulo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} = 4\pi^2 \frac{1,00}{2,00^2} = \pi^2 = 9,87 \text{ m/s}^2$$

que é bastante aproximado ao valor real.

8. Dispónse dun péndulo simple de 1,5 m de lonxitude. Mídese no laboratorio o tempo de 3 series de 10 oscilacións obtendo 24,56 s, 24,58 s, 24,55 s. Cal é o valor de g coa súa incerteza?

(P.A.U. Xuño 12)

Solución:

Como só hai datos para unha lonxitude de péndulo só se pode calcular o valor medio do período e aplicar a ecuación do período do péndulo:

Experiencia	1	2	3
Tempo(s) empregado en 10 oscilacións	24,56	24,58	24,55
Período	2,456	2,458	2,455

O valor medio do período é:

$$T = \frac{\sum T_i}{N} = \frac{7,369}{3} = 2,456 \text{ s}$$

A incerteza na medida é a diferenza entre a medida e o valor medio. A diferenza máxima entre os períodos calculados e a súa media é de 0,002 s, polo que o período coa súa incerteza é:

$$T = 2,456 \pm 0,002 \text{ s}$$

e o valor da aceleración g da gravidade despxada da ecuación do período do péndulo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

e o valor da aceleración g da gravidade

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} = 4\pi^2 \frac{1,5}{2,456^2} = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Tendo en conta que a incerteza da lonxitude, tal como dáse o dato, é 0,1 m

$$L = 1,5 \pm 0,1 \text{ m}$$

a incerteza do valor da gravidade é:

$$g = 9,8 \pm 0,1 \text{ m/s}^2$$

Análise: Non é moi coherente dar a medida dos tempos con 4 cifras significativas e a lonxitude de péndulo con só 2. Si supoñemos que a lonxitude do péndulo tomouse cunha regra milimetrada

$$L = 1,500 \pm 0,001 \text{ m}$$

e temos en conta que neste nivel, o cálculo de incertezas indirectas limitase ao uso apropiado das cifras significativas, o valor da gravidade quedaría:*

$$g = 9,815 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$$

* O cálculo correcto da incerteza de g sería:

$$\Delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \Delta T = \frac{4\pi^2}{T^2} \Delta L + \left| \frac{-2 \cdot 4\pi^2 L}{T^3} \right| \Delta T = 0,02$$

9. Na práctica do péndulo: Depende o período do ángulo de oscilación? Canto varía o período si se aumenta a lonxitude un 20%?

(P.A.U. Xuño 03)

Solución:

a) Considérase que o comportamento pódese tomar como harmónico para ángulos menores de 15° nos que $\sin \theta \approx \theta$. Dentro destes ángulos, o período é independente do valor do ángulo como se ve na ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

b) Substituíndo $l' = 1,2 l$, queda

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{1,2l}{g}} = \sqrt{1,2} T = 1,1 T$$

(aumenta un 10%)

10. Na práctica de medida de g cun péndulo, como conseguirías (sen variar o valor de g) que o péndulo duplique o número de oscilacións por segundo?

(P.A.U. Set. 12, Set. 11, Xuño 04)

Solución:

Para conseguir duplicar a frecuencia, ou o que é o mesmo, diminuír á metade o período, habería que facer a lonxitude do péndulo 4 veces menor, xa que o período dun péndulo ideal vén dado pola ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Se $l' = l / 4$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l/4}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{T}{2}$$

11. Cando no laboratorio mides g cun péndulo simple:

- Cantas oscilacións convén medir?
- Que precaucións se deben tomar coa amplitude das oscilacións?
- Inflúe a masa do péndulo na medida de g ?

(P.A.U. Xuño 05)

Solución:

a) Se solen medir 10 ou 20 oscilacións para aumenta-la precisión do período, xa que este se calcula dividindo o tempo de N oscilacións entre o número delas

$$T = t / N$$

Un número de oscilacións demasiado grande pode dar lugar a que cometamos erros ao contalas.

b) A amplitude das oscilacións debe ser pequena. En teoría unha aproximación aceptable é que sexan menores de 15° . Como non usamos un transportador de ángulos, separaremos o menos posible o fío da vertical, especialmente cando a lonxitude do péndulo sexa pequena.

c) Non inflúe. A ecuación do período T do péndulo é independente da masa:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

e só depende da lonxitude " L " do péndulo. Isto compróbase no laboratorio substituíndo a masa e volvendo a medir o período (ou medindo os períodos de distintos péndulos da mesma lonxitude pero dos que colgan distintas masas)

12. Comenta brevemente a influencia que teñen na medida de g cun péndulo: a amplitude de oscilación, o número de medidas, a masa do péndulo.

(P.A.U. Set. 10)

Solución:

O péndulo describe un movemento oscilatorio circular arredor da posición de equilibrio. Cando o ángulo é moi pequeno e sexa aplicable a aproximación $\sin \varphi = \varphi$, o movemento será harmónico simple cun período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

no que L é a lonxitude do péndulo.

No laboratorio mídese a lonxitude dun péndulo e faise oscilar cunha amplitude pequena. Mídese o tempo de dez oscilacións, calcúlase o período e del, o valor da aceleración da gravidade despexada da ecuación anterior:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Nesa ecuación pode verse que o valor de g non depende nin da amplitude da oscilación nin da masa do péndulo. Pero se a amplitude das oscilacións non é pequena, o movemento xa non é harmónico simple e a ecuación anterior deixa de ser válida.

En canto ao número de medidas, canto maior sexa, menor será o erro do valor medio e máis exacto o resultado.

13. Na medida experimental da aceleración da gravidade g cun péndulo simple, que precaucións débense tomar con respecto á amplitude das oscilacións e con respecto á medida do período de oscilación?

(P.A.U. Xuño 13)

Solución:

A amplitude das oscilacións debe ser pequena. En teoría unha aproximación aceptable é que sexan menores de 15° . Como non usamos un transportador de ángulos, separaremos o menos posible o fío da vertical, especialmente cando a lonxitude do péndulo sexa pequena.

Adóitanse medir 10 ou 20 oscilacións para aumentar a precisión do período, e diminuír o erro relativo que daría a medida dunha soa oscilación.

Un número demasiado grande de oscilacións pode dar lugar a que cometamos erros ao contalas.

Índice de contido

<u>VIBRACIÓNS E ONDAS</u>	1
◇ <u>INTRODUCCIÓN</u>	1
• <u>MÉTODO</u>	1
• <u>RECOMENDACIÓNS</u>	1
◇ <u>PROBLEMAS</u>	2
• <u>M.H.S.</u>	2
• <u>PÉNDULO</u>	19
• <u>ONDAS</u>	23
◇ <u>CUESTIÓNS</u>	36
• <u>M.H.S.</u>	36
• <u>PÉNDULO</u>	41
• <u>ONDAS</u>	41
◇ <u>LABORATORIO</u>	51
• <u>RESORTE</u>	51
• <u>PÉNDULO SIMPLE</u>	59

Cuestións e problemas das Probas de Acceso á Universidade (P.A.U.) en Galicia.

Respostas e composición de Alfonso J. Barbadillo Marán, alfbar@bigfoot.com

Algunhas ecuacións construíronse coas macros da extensión [CLC09](#) de Charles Lalanne-Cassou.

A tradución ao/desde o galego realizouse coa axuda de [traducindote](#), de Óscar Hermida López.

Algúns cálculos fixéronse cunha [folla de cálculo](#) OpenOffice (ou LibreOffice) feita por Alfonso J. Barbadillo Marán.