

TEMA 2: CAMPO GRAVITATORIO

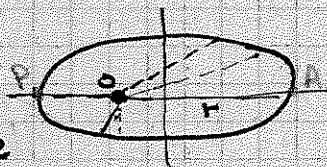
CG-1

2.1- LEIS DE KEPLER:

1) Órbitas elípticas

2) lei das áreas: $\frac{dA}{dt} = \text{cte}$

3) lei dos períodos: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$, onde $\frac{4\pi^2}{GM} = \text{cte}$



O = Sol
P = Perihélio
A = Afélio

2.2- CAMPOS DE FORÇAS CENTRAIS:

- Def. campo: Região do espaço onde cada ponto (x, y, z) tem associado um determinado valor de uma magnitude física

podem ser $\left\{ \begin{array}{l} \text{escalares: } r = r(x, y, z) \rightarrow U(r), \text{ escalar} \\ \text{vectoriais: } r = r(x, y, z) \rightarrow \vec{F}(r), \text{ vector} \end{array} \right.$

$\hookrightarrow$ se $\vec{F} = F(r) \vec{u}_r \Rightarrow$ c. central, $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$\hookrightarrow$ se $F(r) = \pm \frac{k}{r^2} \Rightarrow$ c. central newtoniano

- Se temos um campo central, existe um lugar chamado centro do campo, onde se situa a partícula criadora do campo.

- Nun campo de forças centrais:

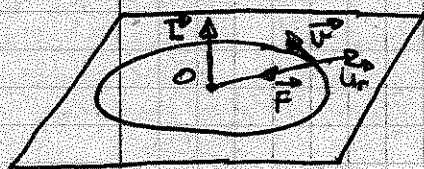
a) O vector momento angular é constante:

① Direcção de $\vec{L}$ cte $\Rightarrow$ partícula tem trajectória plana

② Sentido de $\vec{L}$ cte $\Rightarrow$ partícula gira sempre no mesmo sentido

③ $|\vec{L}| = m |\vec{r} \times \vec{v}| = \text{cte} \Rightarrow$ lei das áreas:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{cte}$$



b) Força central é conservativa

$\Rightarrow$ Existe uma função escalar, potencial, associada a cada pto do espaço onde se define o campo

$\Rightarrow$ Existe uma f. escalar, energia potencial, associada a cada pto do espaço onde se define o campo

At: $W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB}$

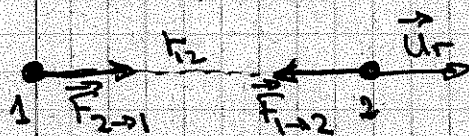
onde: $W_{A \rightarrow B}$ é o trabalho realizado pela força conservativa para ir de A a B

ΔE_p é a diferença de E_p entre A e B

E_{pA} e E_{pB} é a E_p associada a cada ponto, sempre com respeito a um ponto de referência, normalmente situado no infinito.

2.3. LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL:

Newton, 1686



$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_r$$

G : cte gravit. universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

- Observ: Em geral, podemos supor que numa esfera de massa M se considera como se toda a massa estivesse situada no centro da esfera (centro de massa)
- F é sempre atractiva
- Existe segundo a linha recta que une os corpos
- 3ª lei de Kepler: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$
- Se um corpo descreve uma órbita (satélite) ao redor de outro (centro do campo) $\Rightarrow$ possui aceleração normal e tem uma velocidade orbital, constante em módulo:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \text{ onde}$$

M massa do centro do campo
 r distância centro-satélite

Se chamarmos:

R : raio da esfera - centro do campo

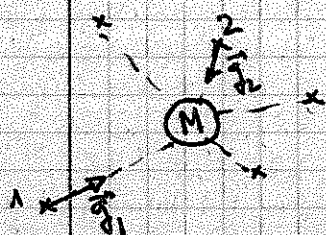
h : distância da superfície ao satélite

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \end{array} \right.$$

2.4- INTENSIDADE DO CAMPO GRAVITATORIO

Nunca reação do espaço existe um campo gravitatorio se ao colocarmos um corpo de massa m_0 actua sobre el unha forza de tipo gravitatorio, isto é:

$$\vec{F}_g = G \frac{M}{r^2} m_0$$



Intensidade do campo gravitatorio ou c. gravitat.:
em cada punto do espaço onde se acha definido o campo, podemoslle asociar un valor:

$$\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}_g}{m_0} = - \frac{GM}{r^2} \vec{u}_r$$

Ani, se colocarmos un corpo de massa m : $\vec{F}_g = \vec{g} \cdot m$

Para puntos próximos á Superficie da Terra:

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9,8 \frac{N}{kg}$$

Observacións

1) Variación de g coa distancia á masa creadora do campo:

Se h é a distancia á Superficie

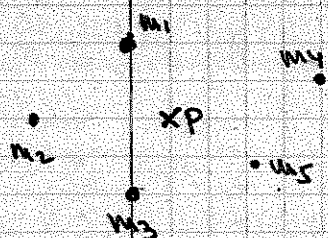
R é o radio do centro do campo

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$\text{Ani: } \frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

2) Principio de Superposición: Se existen varias masas creadoras do campo,

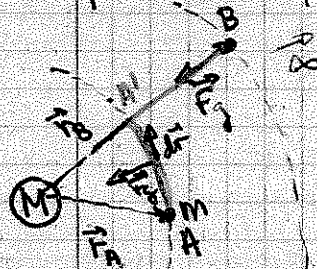
$$\vec{g}_p = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \dots = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$



"O campo gravitatorio resultante en P será a suma vectorial dos campos gravitatorios $\vec{g}_i$ debidos a cada unha masa actuando sobre P individualmente"

2.5- ENERGIA POTENCIAL GRAVITATORIA. POTENCIAL GRAVITATORIO.

Como a força gravitatoria é central podemos definir a função energia potencial, que só depende da posição do corpo:



$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = E_{pA} - E_{pB}$$

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow A'} + W_{A' \rightarrow B}$$

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-G \frac{Mm}{r^2} \cdot \vec{u}_r \right) \cdot d\vec{r} \cdot \vec{u}_r = \\ &= -GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -GMm \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned}$$

Ass: $W_{A \rightarrow B} = \frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A}$

Se tomarmos como orixe de potencial um ponto infinitamente afastado do centro do campo (interacção gravitatoria desprezível):

$$E_p(r=\infty) = 0$$

podemos atribuir a cada ponto um valor único da energia potencial:

$$E_{pA} = W_{A \rightarrow \infty} = -\frac{GMm}{r_A}$$

Ass:

$$W_{A \rightarrow B} = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p$$

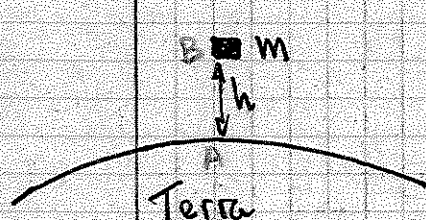
Observ:

- Se a partícula cambia a sua posição de A a B: O trabalho é realizado externamente contra o campo gravitatorio. A partícula "ganha" E_p .
- Se vai de B a A: O trabalho é realizado pelo campo. A partícula "perde" E_p .

A $\rightarrow$ B: $\Delta E_p > 0$, $W_{A \rightarrow B} < 0$; ollo!: Máxima E_p no infinito!

B $\rightarrow$ A: $\Delta E_p < 0$, $W_{B \rightarrow A} > 0$ (menos negativa)

2.5.1: Variação da E_p entre a Superfície da Terra e um ponto próximo.



Suponhamos que desprezamos um objecto de massa m desde a superfície da Terra até uma altura h :

$$E_{pA} = - \frac{G M_T m}{R_T} ; \quad E_{pB} = - \frac{G M_T m}{R_T + h}$$

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = + G M_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right) = \frac{G M_T m h}{(R_T + h) R_T}$$

Se h é muito pequeno frente a R_T : $h \ll R_T \Rightarrow (R_T + h) R_T \approx R_T^2$:

$$\Delta E_p = \frac{G M_T m h}{R_T^2} = m g h$$

Se escolhermos o chão como origem de potencial: $E_p(h=0) = 0$

$$\boxed{E_p(h) = m g h}$$

Se h não é desprezível: $E_p(h) = \frac{G M m h}{(R_T + h) R_T}$

- Observ: Agora E_p é positiva, pois tomamos como referência o chão. No infinito, a E_p tende a um valor limite.

2.5.2: Potencial gravitatório:

Força gravitacional $\Rightarrow$ Energia potencial gravitacional

Campo gravitacional $\Rightarrow$ Potencial gravitacional

Para estabelecer um valor único do potencial gravitacional a cada ponto do espaço, cumpre escolher uma origem de potenciais, que normalmente é: $V(r=\infty) = 0$.

Assim, o potencial gravitacional em um ponto representará o trabalho realizado pela força gravitacional para levar um corpo de massa unidade desde esse ponto até o infinito:

$$\boxed{V_P = \frac{W_{P \rightarrow \infty}}{m} = -\frac{1}{m} \int_{r_P}^{\infty} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\frac{GM}{r_P}}$$

2.5.3: Diferença de potencial entre dois pontos.

$$V_B - V_A = -\frac{W_{A \rightarrow B}}{m} = -\frac{\Delta E_p}{m}; \quad \Delta V = \frac{\Delta E_p}{m}$$

Podemos relacionar a ddp com intensidade de campo gravitacional:

$$V_A - V_B = \frac{W_{A \rightarrow B}}{m} = \int_A^B \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{m} = \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r}$$

2.6- A TERRA COMO FONTE DE INTERACÇÃO GRAVITATORIA. SATELITES ARTIFICIAIS.

• Hipótese: Terra esférica e homogênea

• $M_T \approx 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T \approx 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

• Na superfície: $g_0 = 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$

• Velocidade orbital e período de revolução dum satélite:



órbita circular cerrada: $\Sigma F = ma = ma_n = m \frac{v^2}{r}$

$$\Sigma F = F_g$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

Se h altura sobre a superfície do centro de campo: $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

Período de revolução: $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} r \Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$

Tomando como referência g_0 :

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0 R_T^2}}$$

• Velocidade de escape:

É a velocidade inicial mínima que cumpre comunicá-la a um objeto para que escape do campo gravitacional terrestre.

Suponhamos que somente atue a força gravitacional.

A veloe. de escape significa uma energia mínima igual ao trabalho necessário para levar a nave desde a superfície terrestre até o infinito ($E_p \rightarrow 0$):

$B = \infty$

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

A = Sup. terrestre

B = infinito

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

M, R massa e raio do centro de campo

Na Terra: $v_e = 11 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

• Energia de escape:

É a energia que põe um satélite que está em órbita circular estacionária.

Se a órbita está a uma distância h da superfície terrestre:

$$E_{\text{escape}} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G \frac{Mm}{R+h} \right)$$

onde v é a velocidade orbital:

$$E_{\text{escape}} = -\frac{G M m}{2(R+h)}$$

• Energia de posto em órbita

Energia necessária para pôr em órbita a um satélite à veloe. de órbita desde a sup. terrestre:

$$E = E_{\text{escape}} - E_{pA} = E_{\text{escape}} + G \frac{Mm}{R}$$

• Satélite geoestacionário:

Satélites que giram em órbita circular ao redor da Terra num plano máximo que coincide com o Equador $\Rightarrow \omega_{\text{sat}} = \omega_{\text{rot Terra}}$

Táboa de períodos de revolución e de rotación dos planetas

	Planetas internos ou telúricos				Planetas externos ou xovianos				
	Mercurio	Venus	Terra	Marte	Xúpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Plutón
Período de rotación sideral	58,95 días	243,01 días	23,945 h	24,6229 h	9,841 h	10,233 h	15,5 h	15,8 h	6,91/22m
Período de revolución sideral en días	87,969 d	224,701 d	365,256 d	686,980 d	4,332,599	10,759,72	30,686,4	60,189,0	90,465,0
Velocidade orbital media (km/s)	47,89	35,02	29,79	24,13	13,06	9,84	6,81	5,43	4,74

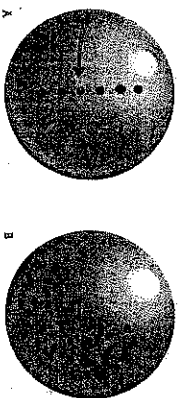
Densidade media (g/cm ³)	5,42	5,25	5,52	3,94	1,314	0,69	(1,19)	1,66	(1,1)
Gravidade (m/s ²)	3,78	8,60	9,8	3,72	22,88	9,05	7,77	11,00	(4,3)
Velocidade de escape (km/s)	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,22	23,6	(5,3)

O Sol xira máis rápido no Ecuador.

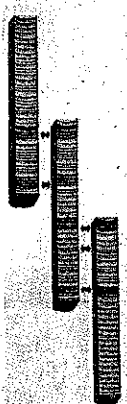
Simulando uns puntos, despois dunha rotación enteira estarían nesta situación

Os períodos de rotación para diversas latitudes no Sol son os seguintes:

Ecuador: 26,8 días
Latitude 30°: 28,2 días
Latitude 60°: 30,8 días
Latitude 75°: 31,8 días



Relación entre manchas solares e anos das ávores.
En caso todas as madeiras replétense unha serie de anos que acadan diámetros 2 ou 3 veces maiores cada once anos.

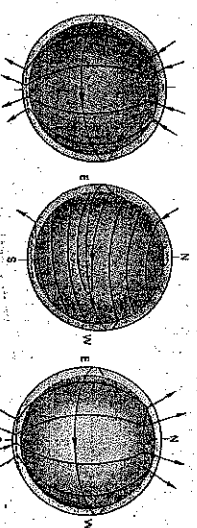


2429
6370
3592
11027

Nota: os números entre paréntese son inseguros

O Sol, como todos os planetas do Sistema Solar, xira sobre si mesmo, pero coa peculiaridade de que xira máis rápido no seu ecuador que nas latitudes altas.

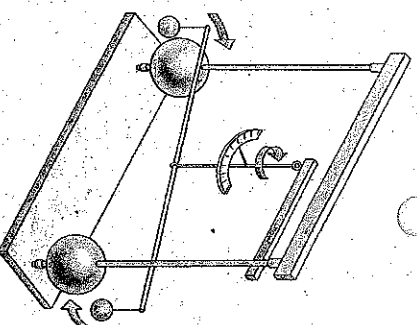
Esta diferente rotación fai enrolar o seu campo magnético de tal maneira que este invértase cada 11 anos e ademais provoca, ao aumentar o campo, que aparezan na rexión solar da fotosfera unhas zonas escuras, máis frías, a 1.700 °C inferior ao seu contorno, que se coñecen co nome de **manchas solares**.



A acción combina de múltiples manchas ao longo dos 11 anos orixina que ao final do ciclo o campo polar se inverte.

Estas acadan un máximo cada 11 anos, durante o cal o campo magnético do Sol intensifícase e inflúe no noso planeta en feitos tan concretos como a filtración precoc ou tardía dos vexetais, o tamaño das súas follas, o espesor da capa de ozono e, obviamente, no clima e nas precipitacións (lagos como o Victoria e o Mar Caspio presentan un nivel máis alto en anos de maior actividade solar).

A masa da Terra foi calculada por primeira vez no 1798 polo inglés Cavendish.



Balanza de torsión de Cavendish. Dúas pesas penduradas dunha corda xirarían cando lles achegamos un par de bolas de chumbo máis pesadas. A forza de atracción será a causa. Así conseguiu averiguar o valor de constante gravitacional, e como o diámetro e a forza de atracción da Terra xa se coñecían naquel tempo, era doado calcular a súa masa. Resultado: a Terra ten 6,6 miles de trillóns de toneladas de masa.

EXERCICIOS

- ¿Canto pesaría un corpo de 70 kg na Lúa?
- $g_{Lúa} = 1,6 \text{ m/s}^2$
- ¿Por que inflúe máis nas mareas a Lúa que o Sol?
- Debateo.
- ¿Cal será o valor de "g" nun satélite en órbita a 3.000 Km sobre a Terra.
- Calcula a F con que se atraen a Terra ($M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) e o Sol ($M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$), separados 380.000 km

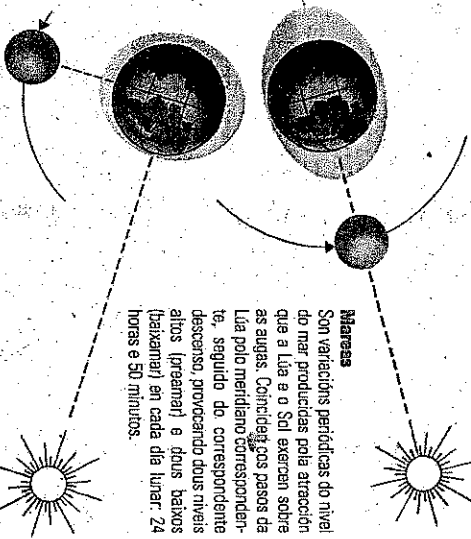
A gravidade da Terra diminúe o 0,000001% cada ano, polo que o peso de cada persoa reducirase unha dezmillonésima parte

Segundo a Lei da Gravidade é máis doado abrir a boca que pechala.

TÁBOA DE VALORES DE g

Polo (nivel do mar)	9,832 m/s ²
45° latitude (nivel do mar)	9,806
20° latitude (nivel do mar)	9,788
Ecuador (nivel do mar)	9,760
1.000 m altura (45° latitude)	9,803
18.000 m altura (45° latitude)	9,757
1.000 Km altura (satélite en órbita)	7,41

Mareas
Son variacións periódicas do nivel do mar producidas pola atracción que a Lúa e o Sol exercen sobre as augas. Coincidindo cos pasos da Lúa polo meridiano correspondente, seguido do correspondente descenso, provocando dous niveis altos (preamar) e dous baixos (baxamar) en cada día lunar. 24 horas e 50 minutos.



A Terra e a Lúa están unidas unha á outra pola forza de gravidade. Non é só a Lúa que xira en torno á Terra, senón que esta tamén se move nunha pequena órbita circular, ambos os astros xiran arredor dun centro común situado no interior do globo terráqueo.

A forza de gravidade da Lúa atrae aos océanos da cara da Terra exposta a ela.

As mareas vivas acadan a maior amplitude cando o Sol e a Lúa exercen simultaneamente a súa forza de atracción en Lúa Nova e Lúa Chea. Nos Cuartos Crecente e Minguante as dúas forzas actúan en cuadricula e a súa compoñente produce mareas mortas.

