

MAGNITUDES FÍSICAS Y MEDIDAS. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE ERRORES

Índice

Introducción	1
1 Cantidades aproximadas	2
1.1 Cantidades aproximadas y error	2
1.2 Redondeo de números	5
1.3 Notación científica	5
1.4 Cálculos con cantidades aproximadas	5
2 Glosario	8
2.1 Magnitudes físicas y unidades	8
2.2 Mediciones	9
2.3 Instrumentos de medida	13
3 Presentación de los resultados de medida	14
4 Estimación de errores de medida	15
4.1 Medidas directas realizadas una sola vez	15
4.2 Medidas directas repetidas numerosas veces en condiciones prácticamente idénticas	15
4.3 Medidas indirectas y propagación de errores	17
4.3.1 Propagación de errores en las operaciones más comunes	19
5 Tratamiento gráfico de datos experimentales y ajuste de rectas a los datos	21
5.1 Indicaciones para construir una gráfica	21
5.2 Ajustes de rectas por el método de los mínimos cuadrados	22
5.3 Representación gráfica de una recta de regresión	23
5.4 Ajustes de rectas «a ojo»	23
6 Bibliografía	23

Introducción

La Física estudia los fenómenos de nuestro mundo siguiendo un método científico, empleando modelos de la realidad en los que intervienen las denominadas magnitudes físicas (o simplemente magnitudes) así como leyes que relacionan entre sí dichas magnitudes e hipótesis que imponen condiciones o añaden suposiciones al modelo para poder llegar a resultados. Para trabajar con esos modelos se emplea habitualmente un lenguaje extremadamente preciso, que permite decir muchas cosas en muy poco espacio sin dejar lugar a la ambigüedad y que no es otro que el lenguaje matemático, en el que el papel de las palabras lo toman las magnitudes, y las leyes e hipótesis forman las frases.

Por otra parte, la Física se basa en el experimento, lo cual implica realizar mediciones de magnitudes. Cuando se analizan los resultados de un experimento (es decir, valores numéricos de magnitudes) es necesario tener una estimación de la fiabilidad de dichos valores. Una medida está incompleta (por no decir que es completamente inútil) si no se conoce su incertidumbre.

En el presente texto se proporciona una introducción a los conceptos antedichos y unas reglas básicas para el tratamiento de datos experimentales.

1 Cantidades aproximadas

1.1 Cantidades aproximadas y error

En las ciencias experimentales y en la ingeniería es muy frecuente trabajar con valores aproximados de las cantidades en lugar de utilizar sus valores exactos, con todas sus cifras.

Muchos números racionales así como la totalidad de los irracionales tienen una cantidad infinita de cifras decimales de forma que, para realizar los cálculos en los que intervienen, han de ser aproximados por otros números con una cantidad finita de cifras decimales.

Ejemplos:

$$\frac{1}{3} = 0,33333333... \approx 0,33$$

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095... \approx 1,4$$

$$\pi = 3,1415926535897932385... \approx 3,1416$$

$$e = 2,7182818284590452354... \approx 2,718$$

Los números enteros muy grandes se suelen aproximar por otros con menor cantidad de cifras no nulas, siempre que éstos proporcionen la precisión necesaria para los cálculos.

Ejemplo: $30! = 265252859812191058636308480000000 \approx 26525 \times 10^{28}$

Los valores resultantes de medir una magnitud física, como veremos en adelante, están siempre afectados de una cierta incertidumbre con respecto al valor verdadero de la magnitud y, en consecuencia, son siempre cantidades aproximadas.

Error de una cantidad aproximada

es la diferencia entre la cantidad exacta (llamémosle a) y su valor aproximado (llamémosle x).

En contadas ocasiones se conoce el valor exacto del error y además es posible escribirlo completamente. Es este el caso de las aproximaciones de números enteros cuyo valor exacto se conoce.

Ejemplo: si se aproxima $30! = 265252859812191058636308480000000 \approx 26525 \times 10^{28}$,

el error cometido vale exactamente

$$265252859812191058636308480000000 - 26525 \times 10^{28} = 2859812191058636308480000000$$

En algunos casos se conoce el valor del error pero no puede escribirse completamente ni utilizarse en los cálculos porque tiene una cantidad infinitamente grande de cifras decimales. Se tiene esta situación cuando se toman valores aproximados de constantes matemáticas racionales o irracionales.

Ejemplo: si se aproxima $\pi = 3,1415926535897932385...$ por $p = 3,1416$

el error vale exactamente $3,1415926535897932385... - 3,1416 = -0,0000073464102067615...$

pero no es posible escribir todas sus cifras.

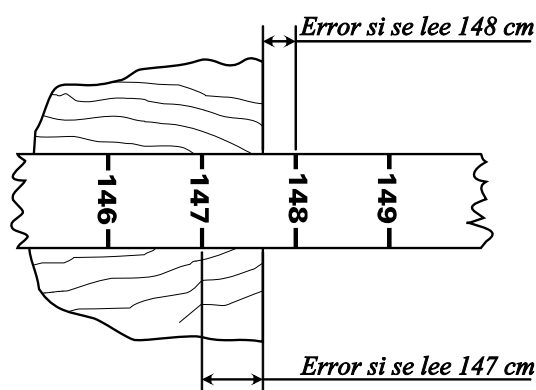
En la mayoría de las situaciones prácticas no se conoce el valor verdadero de las cantidades con las que se trabaja y, en consecuencia, tampoco se conoce con exactitud el error. En estos casos se

suele disponer únicamente de una estimación, más o menos fiable, del orden de magnitud de los errores.

Ejemplos:

Cuando una calculadora nos devuelve el valor $\sqrt{2} \approx 1,4142136$ sólo se sabe que el error es menor que una unidad de la última cifra hacia arriba o hacia abajo.

Cuando medimos la longitud de una mesa con una cinta métrica con divisiones de centímetro en centímetro, en principio sólo podemos asegurar que el valor que leemos en la cinta se diferencia de la longitud real de la mesa en menos de un centímetro (ya que en caso contrario habríamos leído un valor superior o inferior) pero no sabemos exactamente cuánto es esa diferencia.



Para acotar el error que se comete al tomar el valor aproximado x en lugar del verdadero a se pueden emplear dos valores que se denominan respectivamente:

Error absoluto límite (o simplemente error absoluto)

es un valor Δx del que se sabe con una cierta seguridad que es mayor que el valor absoluto de la diferencia entre los valores real y aproximado.

$$|a - x| < \Delta x$$

Ejemplo: si $\pi = 3,14159265\dots$ se aproxima por $p = 3,1416$ se puede tomar como error absoluto límite $\Delta p = 0,000008 > |3,14159265\dots - 3,1416| = 0,00000735\dots$

Error relativo límite (o simplemente error relativo)

es la razón $\varepsilon(x)$ entre el error absoluto límite y el valor absoluto de la cantidad aproximada.

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta x}{|x|}$$

Es una magnitud adimensional. Suele expresarse en tanto por ciento, donde el símbolo % representa el valor numérico 0,01 que multiplica al número que lo precede.

Ejemplo: si se aproxima π por $p = 3,142$ con $\Delta p = 0,0004$ resulta

$$\varepsilon(p) = \frac{\Delta p}{|p|} = \frac{0,0004}{3,142} \approx 1,3 \times 10^{-4} = 0,013 \times 0,01 = 0,013 \%$$

Las cantidades aproximadas se deben expresar junto con su error límite, precedido este por el signo $\pm$. Si el error que se indica es el absoluto, sus unidades son las mismas que las de la cantidad aproximada (si ésta tiene unidades). Si se indica el error relativo, se representa únicamente con su valor numérico, habitualmente expresado en forma de tanto por ciento; cuando la cantidad aproximada es adimensional, esta notación se hace necesaria para distinguir el error relativo del absoluto, ya que éste último también es adimensional en este caso.

Ejemplos:

	<i>Cantidad</i>	<i>Error</i>
$\pi = 3,1416 \pm 0,0001$	adimensional	absoluto
$e = 2,72 (1 \pm 0,4 \%)$	adimensional	relativo
$d = 43 \text{ mm} \pm 1\text{mm}$	dimensional	absoluto
$d = (43 \pm 1) \text{ mm}$	dimensional	absoluto
$d = (43 \pm 1) \times 10^{-3} \text{ m}$	dimensional	absoluto
$d = 43 (1 \pm 5 \%) \text{ mm}$	dimensional	relativo
$d = 43 \times (1 \pm 5 \%) \times 10^{-3} \text{ m}$	dimensional	relativo

Aunque es una práctica no aconsejable, en ocasiones se da la cantidad aproximada sin indicar su incertidumbre queriendo dar a entender que ésta es menor que una unidad de la última cifra escrita (por ejemplo: 0,25 equivaldría a $0,25 \pm 0,01$ y 0,250 equivaldría a $0,250 \pm 0,001$; pero no sabríamos decir si 250 equivale a 250 ± 10 o a 250 ± 1).

Cifras significativas

Son aquellas cuyo orden de magnitud es igual o superior al de las del error absoluto límite.

Ejemplo:

0 , 0 0 2

3 , 1 4 1 5 9 2 ... ± 0 , 0 0 2

Significativa

Significativa

Significativa

Significativa

No Significativa

No Significativa

No Significativa



tiene 4 cifras significativas, mientras que

0 , 0 0 0 7

3 , 1 4 1 5 9 2 ... ± 0 , 0 0 0 7

Significativa

Significativa

Significativa

Significativa

Significativa

No Significativa

No Significativa



tiene 5 cifras significativas.

A la hora de contar el número de cifras significativas no se tienen en cuenta los ceros que están a la izquierda de la primera cifra no nula.

Ejemplo: $3,141592... \pm 0,0001$ tiene cinco cifras significativas

0,041592... $\pm$ 0,0001 tiene sólo tres cifras significativas

1.2 Redondeo de números

Las cantidades aproximadas se redondean de forma que sólo se representan las cifras que son significativas.

Ejemplo: $3,141592... \pm 0,0001$ se redondea a $3,1416 \pm 0,0001$

$3,141592... \pm 0,00002$ se redondea a $3,14159 \pm 0,00002$

$314,1592... \pm 10$ se redondea a 310 ± 10

La eliminación de cifras superfluas (redondeo), siempre que esté justificada, se realiza según el siguiente criterio:

– si la cifra de mayor orden de magnitud que se omite es menor que 5, se elimina sin más,

ejemplo: $3,47\underline{35}$ se redondea a $3,47$

– si la cifra de mayor orden de magnitud eliminada es mayor o igual que 5, se incrementa en una unidad la última cifra retenida,

ejemplo: $5,78\underline{67}$ se redondea a $5,79$

de esta forma, el error que se comete al redondear es siempre menor que la mitad del orden de magnitud de la última cifra retenida.

Ejemplo: $|3,4735 - 3,47| = 0,0035 < 0,005 = \frac{1}{2} \times 0,01$

$|5,7867 - 5,79| = 0,0033 < 0,005 = \frac{1}{2} \times 0,01$

1.3 Notación científica

Cuando un número es muy grande o muy pequeño, se utiliza la notación científica. Compensa emplear esta notación si se utilizan menos dígitos que con la notación normal.

Ejemplo: 3450000 resulta más práctico escribirlo $3,45 \times 10^6$

$0,0025$ se puede escribir como $2,5 \times 10^{-3}$

También se emplea la notación científica para evitar escribir las cifras no significativas de los números que no tienen decimales.

Ejemplo: $314,1592... \pm 10$ se redondea a 310 ± 10 pero el 0 de 310 no es significativo,

escribiéndolo $(3,1 \pm 0,1) \times 10^2$ o $(31 \pm 1) \times 10^1$ se evitan las cifras no significativas.

1.4 Cálculos con cantidades aproximadas

Cuando se realizan cálculos con cantidades aproximadas no todas las cifras del resultado tienen por qué ser significativas. Para evitar calcular cifras innecesarias se han de observar las siguientes recomendaciones.

- 1) En la **suma** y en la **resta**: se conservan tantas **cifras decimales** del resultado como el sumando que menos tenga.
- 2) En el **producto** y en la **división**: se conservan tantas **cifras significativas** del resultado como el factor que menos tenga.

- 3) Potenciación al **cuadrado** o al **cubo**: se conservan tantas **cifras significativas** del resultado como tiene la base (la última cifra es menos exacta que la de la base).
- 4) Extracción de las raíces **cuadrada** o **cúbica**: se conservan tantas **cifras significativas** del resultado como tiene la base (la última cifra es más exacta que la de la base).
- 5) Cálculo de **logaritmos** decimales y neperianos: se conservan tantas **cifras decimales** (de la mantisa) del logaritmo como significativas tiene el argumento.
- 6) Cálculo de **senos, cosenos, arcos seno o arcos coseno**: en general, se conservan tantas **cifras significativas** como tenga el argumento.
- 7) Cuando se realizan operaciones encadenadas, en los resultados intermedios se deja, al menos, una cifra más de las que establece la regla correspondiente (**cifra de seguridad**) que se elimina por redondeo al llegar al resultado final.
- 8) Al aplicar las reglas 1 a 6, si unos datos tienen más cifras decimales o significativas que las que va a tener el resultado, primero se redondean dejando sólo las cifras de seguridad (como indica la regla 7), se opera con las cifras de seguridad y por último, si el resultado es final (no intermedio) se eliminan las cifras de seguridad por redondeo.

Ejemplos:

1) Suma y resta

Operación inicial		Redondeo intermedio		Redondeo final
$\begin{array}{r} 23,456 \\ 3,4 \\ + 123,45 \\ \hline \end{array}$	$\Rightarrow$	$\begin{array}{r} 23,46 \\ 3,4 \\ + 123,45 \\ \hline \end{array}$	$\Rightarrow$	$150,3$
* * * , * Cifras significativas del resultado 5 Cifra de seguridad ...		+ 123,45 150,31 5 1		

2) Multiplicación y división

21,6	×	3,1415926	×	0,083273	=
3 cifras significativas		8 cifras significativas		5 cifras significativas	
				3 cifras significativas	

se redondean a 4 cifras significativas (= 3 cifras significativas que se estima que tendrá el resultado + 1 de seguridad) todos los factores que las excedan

$$21,6 \times \mathbf{3,142} \times \mathbf{0,08327} = \mathbf{*****}$$

se hace el cálculo

$$21,6 \times 3,142 \times 0,08327 = 5,651301744$$

si es un resultado final se redondea a 3 cifras significativas: 5,65

si se va a utilizar en una operación encadenada posterior se redondea a 4 cifras (= 3 cifras significativas + 1 de seguridad): 5,651; pero recordando siempre, sobre todo cuando se vayan a aplicar las reglas 1 a 6 en operaciones sucesivas, que su número estimado de cifras

significativas es 3. Para ello se pueden, por ejemplo, marcar las cifras de seguridad subrayándolas.

3) Potenciación: $21,4^2 = 457,96$ que se redondea a 3 cifras significativas: $21,4^2 = 458$

4) Extracción de la raíz: $\sqrt[3]{0,003897} = 0,1573657$ es el valor que nos devuelve una calculadora de 8 dígitos, pero realmente sólo tiene cuatro cifras significativas y se debe redondear el resultado a

$$\sqrt[3]{0,003897} = 0,1574$$

*Nota: las **cantidades exactas** tienen tantas cifras significativas como se quiera, de modo que cuando se operen cantidades aproximadas con cantidades exactas no se tendrán en cuenta estas últimas para la aplicación de las reglas anteriores.*

Ejemplo:

si se multiplica el número entero 21 por la cantidad aproximada 123,4, el resultado tendrá 4 cifras significativas como esta última: $21 \times 123,4 = 2591$

ahora bien, si 21 es una cantidad aproximada (p. ej 21 ± 1) y se multiplica por 123,4 el resultado tendrá 2 cifras significativas como la primera: $21 \times 123,4 = 26 \times 10^2$.

2 Glosario

2.1 Magnitudes físicas y unidades

Magnitud (física)

Atributo observable y medible de un fenómeno, de un cuerpo o de una sustancia.

Cada atributo se puede distinguir por su naturaleza y se puede expresar como el producto de una unidad de esa misma naturaleza por un valor numérico, de tal manera que:

Valor de una magnitud = valor numérico $\times$ unidad

Ejemplos: 3 km, 2 kg, 5 s, 330 m/s

Las magnitudes que son mutuamente comparables se dice que tienen la misma naturaleza (por ejemplo las magnitudes: radio de una circunferencia, lado de un polígono, distancia del centro de masa de la Tierra al del Sol, longitud de onda, etc. tienen una misma naturaleza denominada «longitud»).

Magnitud de base

Magnitud de un subconjunto elegido por convenio, dentro de un sistema de magnitudes dado, de tal manera que ninguna magnitud del subconjunto pueda ser expresada en función de las otras.

Dimensión de una magnitud

Expresión de la dependencia de una magnitud en términos de las magnitudes de base, dentro de un sistema de magnitudes, como el producto de potencias de factores correspondientes a dichas magnitudes de base, omitiendo cualquier factor numérico.

La dimensión de una magnitud Q se expresa como $\dim Q$.

Los símbolos de las dimensiones de las magnitudes de base del Sistema Internacional se recogen en la tabla 2.1 de forma que la dimensión de una magnitud Q se expresa por $\dim Q = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\varepsilon N^\zeta J^\eta$, donde los exponentes dimensionales α , β , γ , δ , ε , ζ y η pueden ser positivos, negativos o nulos.

Por ejemplo: la dimensión de fuerza es $\dim F = L M T^{-2}$ y la dimensión de densidad de masa es $\dim \rho = L^{-3} M$.

En un sistema de magnitudes dado:

- las magnitudes de la misma naturaleza tienen la misma dimensión,
- las magnitudes de dimensiones diferentes son siempre de naturaleza diferente,
- las magnitudes que tienen la misma dimensión no son necesariamente de la misma naturaleza (p. ej., capacidad térmica y entropía o momento de una fuerza y energía).

Unidad de medida

Magnitud cuyo valor numérico se admite convencionalmente como uno. Sirve para medir las magnitudes de su misma naturaleza.

Existen diversos sistemas de unidades de medida, el de uso legal en España es el Sistema Internacional de Unidades (SI). Los nombres y símbolos de las unidades de base del SI se presentan en la tabla 2.1. Una descripción y explicación muy completas de dicho sistema puede encontrarse en la última edición del folleto sobre el SI, publicado por el *Bureau international des poids et mesures* (BIPM) y disponible en su página de internet (vea las referencias). La norma UNE 82103:1996 proporciona una descripción más breve.

Tabla 2.1

Magnitud de base		Unidad de base	
Nombre	Dimensión	Nombre	Símbolo
longitud	L	metro	m
masa	M	kilogramo	kg
tiempo	T	segundo	s
corriente eléctrica	I	amperio	A
temperatura termodinámica	Θ	kelvin	K
cantidad de sustancia	N	mol	mol
intensidad luminosa	J	candela	cd

2.2 Mediciones

Medir

Comparar una magnitud con su unidad con el fin de averiguar cuantas veces la primera contiene a la segunda. Ese número de veces es el valor de la magnitud.

En la práctica el número que se obtiene está afectado de error, por lo que dicho valor de la magnitud no se conoce si no es asociado con una incertidumbre que, por consiguiente, debe incluirse en el resultado.

Mensurando

Magnitud que se mide.

Medición

Acción y efecto de medir. El conjunto de operaciones que tienen por objeto el determinar experimentalmente el valor de una magnitud física.

Resultado de una medida

Conjunto de valores de una magnitud que se atribuyen a un mensurando como consecuencia de una medición, acompañados de cualquier otra información relevante disponible.

El resultado de medida de una magnitud Q se expresa, generalmente, como un valor medido de la magnitud q único y una incertidumbre de medida.

Por ejemplo: «el radio de una circunferencia dada A es $r_A = 500,0 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$ ».

Medida analógica

La que se presenta en forma continua, traduciendo de alguna manera la magnitud a medir en otra más directamente perceptible por nuestros sentidos (desviación de una aguja, lectura de una regla graduada, etc.)

Medida digital

La que se presenta en forma discontinua, mediante una serie de cifras.

Método de medida

Conjunto de operaciones prácticas y teóricas que se llevan a cabo en la obtención de una medida.

Método de medida directo

El que consiste en comparar una magnitud con otra de la misma naturaleza elegida como patrón o con un instrumento considerado como patrón.

Ejemplo: medida de una masa frente a otra con una balanza.

Método de medida indirecto

Aquél en que el valor del mensurando se obtiene a partir de mediciones de otras magnitudes ligadas funcionalmente a ella.

Ejemplo: medida de la aceleración a partir de mediciones de la velocidad y del tiempo.

Principio de medida

Fenómeno físico en el que se basa un método de medida.

Ejemplos:

- Equilibrio de pares de fuerza en las balanzas de brazos iguales.
- Efecto termoeléctrico en la medida de la temperatura con termopares.
- Efecto Doppler en la medida de velocidades con radar.

Valor verdadero de una magnitud

Valor de una magnitud compatible con la definición de la magnitud.

En el enfoque en torno al concepto de error, el valor verdadero de la magnitud se considera único aunque, en la práctica, imposible de conocer en la descripción de la medición.

En el enfoque en torno al concepto de incertidumbre, se reconoce que no existe un único valor verdadero compatible con la definición de la magnitud, sino más bien un conjunto de valores verdaderos, que también es, en principio, imposible de conocer en la práctica. Sin embargo, cuando la incertidumbre debida a la definición del mensurando sea despreciable con respecto a las otras componentes de la incertidumbre de medida, puede considerarse que el mensurando tiene un valor verdadero «esencialmente único».

Valor convencional de una magnitud

Valor asignado a una magnitud, mediante un acuerdo, para un determinado propósito.

Ejemplos:

- Valor convencional de la aceleración de caída libre (antes llamada aceleración normal debida a la gravedad), $g_n = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$.
- Valor convencional de un patrón de masa dado, $m = 100,00347 \text{ g}$.

Error de medida

Diferencia entre un valor medido de una magnitud y un valor de referencia.

El concepto de error de medida puede emplearse cuando el valor de referencia está bien definido:

- a) cuando existe un valor de referencia único y conocido (p. ej., si el valor de referencia es un valor medido de un patrón cuya incertidumbre de medida es despreciable o cuando se toma como valor de referencia un valor convencional). En este caso el error es conocido.
- b) cuando el mensurando se supone representado por un valor verdadero único o por un conjunto de valores verdaderos, de amplitud despreciable, en cuyo caso el error es desconocido.

No existen reglas generales y unívocas para calcular un error total que caracterice un resultado de medida. En general, solo es posible estimar un límite superior del valor absoluto del error.

Cuando un resultado de medida ha sido corregido para compensar todos los efectos sistemáticos relevantes, el valor absoluto del error de medida se puede acotar o estimar empleando la incertidumbre de medida, que sí es un concepto cuantificable según reglas generales y precisas.

Ejemplo:

- Un patrón de masa, con valor convencional $m_n = 100,00354 \text{ g}$, se mide con una balanza y resulta como valor medido $m = 100,00458 \text{ g}$. El error de medida sería de $0,00104 \text{ g}$ si se toma como referencia el valor convencional m_n . El error de medida sería desconocido si se tomase como referencia el valor verdadero de la masa del patrón de masa pero podría acotarse empleando la incertidumbre de medida, en particular, la incertidumbre instrumental de la balanza.

Error sistemático de medida

Componente del error de medida que, en mediciones repetidas, permanece constante o varía de manera predecible.

Se manifiesta en el hecho de que mediciones realizadas en condiciones prácticamente idénticas presentan desviaciones constantes o previsibles respecto al valor de referencia.

El error sistemático y sus causas pueden ser conocidas o no. Para compensar un error sistemático de causas conocidas puede aplicarse una corrección. Aún así, el valor estimado de un cierto error sistemático (denominado sesgo) estará en general sujeto a su vez a un error desconocido. Puede haber también errores sistemáticos que queden sin estimar por ser debidos a procesos desconocidos.

Error aleatorio de medida

Componente del error de medida que, en mediciones repetidas, varía de manera impredecible.

Se manifiesta en que mediciones realizadas en condiciones prácticamente idénticas presentan desviaciones imprevisibles respecto del valor de referencia del mensurando (que en este caso sería la media de un número infinito de mediciones repetidas del mismo mensurando).

Sus causas bien son desconocidas o bien su estudio es tan complejo que no se justifica una acotación a priori de esta componente del error. En su lugar el orden de magnitud del error aleatorio se estima repitiendo muchas veces la medición en condiciones similares y aplicando técnicas estadísticas a los propios resultados obtenidos.

Obviamente, la cota del error aleatorio así calculada no se puede utilizar para realizar una corrección en los resultados de medida.

Incertidumbre de medida

Estimación del intervalo de valores dentro del cual se encuentra el verdadero valor de la magnitud medida.

Caracteriza la bondad de la medida.

Se expresa por los valores límite del intervalo, generalmente simétricos respecto del valor convencionalmente verdadero.

Una medida debe expresarse por el valor medido seguido de la incertidumbre (bien en forma absoluta o en forma relativa) precedida por el símbolo $\pm$

Ejemplos: $5,25 \text{ mm} \pm 0,01 \text{ mm}$

$25,72 \times (1 \pm 0,3 \%) \text{ g}$

$(3,28 \pm 0,01) \times 10^3 \text{ rad/s}$

La incertidumbre de medida está constituida, en general, por varias componentes. Algunas de estas se pueden estimar mediante la distribución estadística de una serie de medidas repetidas y expresarse mediante su desviación típica. Las demás componentes sólo pueden estimarse basándose en la experiencia o en otro tipo de informaciones.

Exactitud de medida

Proximidad entre un valor medido y un valor verdadero de un mensurando.

Así, decimos que una medida es tanto más exacta cuanto menor es el error de medida.

Repetibilidad de medida

Grado de concordancia entre los resultados de mediciones sucesivas de la misma magnitud, obtenidos con el mismo método, por el mismo observador, con los mismos instrumentos de medida, en el mismo lugar y a intervalos de tiempo suficientemente cortos.

Reproducibilidad de medida

Grado de concordancia entre los resultados de mediciones aisladas de la misma magnitud y con el mismo método, pero en condiciones diferentes, por ejemplo: con diferentes instrumentos de medida, por diferentes observadores, en diferentes lugares, a intervalos de tiempo grandes comparados con la duración de una medición, en diferentes condiciones de empleo de los instrumentos de medida, etc.

2.3 Instrumentos de medida

Instrumento de medida

Dispositivo utilizado para realizar mediciones solo o asociado a uno o varios dispositivos suplementarios.

Escala

Conjunto ordenado de signos en el dispositivo indicador de un instrumento que representan valores de la magnitud medida.

División de la escala

Intervalo entre dos valores sucesivos de la escala.

Intervalo de medida (campo de medida o rango de medida)

Conjunto de los valores de magnitudes de una misma naturaleza que un instrumento o sistema de medida puede medir con una incertidumbre instrumental inferior a un valor preestablecido.

El intervalo de medida se define por sus límites inferior y superior, salvo en el caso que empiece en cero en que basta con especificar el límite superior o alcance.

Alcance de un instrumento de medida

Valor máximo del campo de medida.

Indicación

Valor proporcionado por un instrumento o sistema de medida.

La indicación puede presentarse en forma visual o acústica, o puede transferirse a otro dispositivo. Frecuentemente viene dada por la posición de una aguja en un cuadrante, como una salida analógica, por un número visualizado o impreso, como una salida digital, por un código, como salidas codificadas, o por el valor asignado, en el caso de medidas materializadas (p. ej., la indicación de una pesa patrón es su valor asignado).

Resolución

Mínima variación de la magnitud medida que da lugar a una variación perceptible de la indicación correspondiente.

Incertidumbre instrumental

Contribución del instrumento a la incertidumbre de medida.

Es el valor mínimo de la incertidumbre de medida que puede obtenerse utilizando correctamente el instrumento.

La información relativa a la incertidumbre instrumental puede aparecer en las especificaciones del instrumento de medida.

3 Presentación de los resultados de medida

1) Todo resultado de medida ha de expresarse indicando:

- el valor medido de la magnitud, que incluye el valor numérico y una referencia (típicamente la unidad empleada)
- la incertidumbre o una acotación del valor absoluto del error (que por economía de lenguaje denominaremos simplemente error) que incluye también el valor numérico (no negativo) y la unidad empleada. Si se expresa como incertidumbre absoluta o error absoluto tendrá las mismas unidades que el valor medido. Si se expresa como un valor relativo será adimensional.

2) El valor numérico ha de redondearse en función del error o la incertidumbre de forma que sólo se escriban las cifras que son significativas.

3) El valor del error o de la incertidumbre, cuando es calculado, ha de redondearse siempre por exceso en los resultados finales (no así en los cálculos intermedios) para que sólo queden sus cifras significativas. Si no se conoce con exactitud el número de cifras significativas de este error o incertidumbre, se redondeará por exceso para que resulte una sola cifra significativa.

Ejemplos:

$$d = 43,50 \text{ cm} \pm 0,05 \text{ cm}$$

$$a = (43,2 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$$

$$\omega = (43 \pm 1) \times 10^2 \text{ rad/s} = (43 \pm 1) 10^2 \text{ rad/s}$$

$$R = 43 \times (1 \pm 5 \%) \text{ k}\Omega = 43 (1 \pm 5 \%) \text{ k}\Omega$$

$$m = 43 \times (1 \pm 5 \%) \times 10^{-3} \text{ g} = 43 (1 \pm 5 \%) 10^{-3} \text{ g}$$

4 Estimación de errores de medida

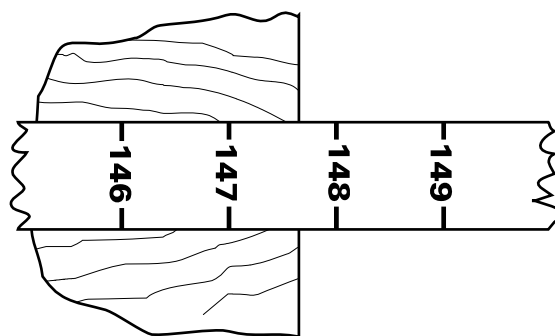
4.1 Medidas directas realizadas una sola vez

Se toma como valor del error de medida la incertidumbre instrumental. En principio, no se puede acotar el error aleatorio con una sola medida.

En los instrumentos más simples (reglas, calibres, balanzas, termómetros de mercurio, etc.) se puede considerar que la incertidumbre instrumental es de una división de la escala.

Ejemplo: se mide la longitud l de una mesa con la cinta métrica de la figura, que está dividida en centímetros. Podemos considerar que la incertidumbre instrumental es de $\Delta l = 1$ cm. La indicación del instrumento será $l = 148$ cm que es la división más próxima a la longitud que se quiere medir, y la medida resulta:

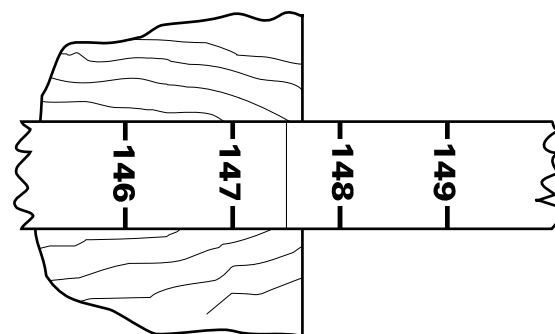
$$l = (148 \pm 1) \text{ cm}$$



Si las divisiones de la escala están suficientemente separadas y es razonable estimar «a ojo» cual es la posición de las medias divisiones o de los cuartos de división se puede leer la escala como si estas subdivisiones estuviesen presentes y tomar como valor de la incertidumbre instrumental la mitad o un cuarto respectivamente de una división de la escala.

Ejemplo: si en la misma situación del ejemplo anterior se considerase aceptable estimar «a ojo» la posición de las medias divisiones. Se tomará entonces $\Delta l = 0,5$ cm. Como la longitud de la mesa parece estar más próxima al centro de la división que a cualquiera de sus extremos, la indicación será $l = 147,5$ cm. La medida resulta finalmente:

$$l = (147,5 \pm 0,5) \text{ cm}$$



En los instrumentos más complejos (polímetros, termómetros digitales, frecuencímetros, cronómetros, etc.) la incertidumbre instrumental depende del alcance en que se está trabajando, del tipo de medida que se realiza de entre todas las que proporciona el instrumento e incluso del valor de la indicación del instrumento. En estos casos el error se acota utilizando las fórmulas que figuran en las especificaciones del instrumento.

4.2 Medidas directas repetidas numerosas veces en condiciones prácticamente idénticas

Cuando se repite una medida varias veces en condiciones idénticas, se observa una variabilidad de los resultados que es independiente de lo cuidadosamente que se hayan realizado las medidas. A esta variabilidad se le llama dispersión de las medidas y es la manifestación de la componente aleatoria del error.

Para estimar el error Δx de este tipo de medidas tomaremos la **suma** de dos componentes: la **sistemática** Δx_s y la **aleatoria** Δx_a :

$$\Delta x = \Delta x_s + \Delta x_a \quad (4.1)$$

- La **componente sistemática** del error (o, simplemente, el error sistemático) se estima en base a la incertidumbre instrumental y, en su caso, aplicando la técnica de propagación de errores, tal y como se explicará en el apartado siguiente.
- La **componente aleatoria** del error (o, simplemente, el error aleatorio) se acota, con un cierto margen de confianza, mediante técnicas estadísticas.

Ambas componentes se consideran como cantidades no negativas.

Consideremos que se han realizado n medidas directas de un cierto mensurando x en condiciones prácticamente idénticas, de las que ha resultado un conjunto de valores:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\} \quad (4.2)$$

muy próximos pero diferentes entre sí.

Estas pequeñas diferencias son la manifestación del error aleatorio, cuya naturaleza impredecible hace que ninguna de las medidas individuales se pueda considerar más o menos representativa que las demás. Puede considerarse que los n valores numéricos de (4.2) son una muestra de la población constituida por los posibles valores medidos de la magnitud x obtenidos en las mismas condiciones de medida. En consecuencia, se toma como valor medido de la magnitud la media aritmética de todas las medidas individuales:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.3)$$

que tiene mayor probabilidad de parecerse al valor de referencia del mensurando (la media de dicha población) que cualquiera de las medidas individuales ya que, según las leyes de la estadística, los errores aleatorios tienden a cancelarse al promediar.

Para acotar el valor del error aleatorio Δx_{ia} que se comete al tomar unas de las medidas x_i como valor medido de la magnitud se emplea un parámetro estadístico denominado **desviación típica muestral**, $s(x_i)$

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)} \quad (4.4)$$

que proporciona una cota para el error aleatorio de cada una de las medidas del conjunto (4.2), de forma que tomamos

$$\Delta x_{ia} = s(x_i) \quad (4.5)$$

Para acotar el error aleatorio $\Delta \bar{x}_a$ que se comete al tomar $\bar{x}$ como valor medido se emplea la **desviación típica de la media** $s(\bar{x})$. Un teorema de la estadística establece que esta desviación típica es menor que la desviación típica muestral en un factor $\sqrt{n}$:

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)} \quad (4.6)$$

y se toma

$$\Delta \bar{x}_a = s(\bar{x}) \quad (4.7)$$

Por tanto, cuantas más medidas se realicen, menor error aleatorio tendrá su valor medio.

El error sistemático Δx_{is} de una de las medidas x_i de la muestra se estima en base a la incertidumbre instrumental como en el caso de una medida directa aislada (véase el apartado anterior). El error sistemático $\Delta \bar{x}_s$ de la media $\bar{x}$ se evalúa empleando la técnica de propagación de errores (descrita en el apartado siguiente) y resulta

$$\Delta \bar{x}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_{is} \quad (4.8)$$

Para obtener el error total, sumaremos los errores aleatorio y sistemático en cada caso.

La expresión final del resultado de medida es para cada dato aislado de la muestra

$$x = x_i \pm (\Delta x_{is} + \Delta x_{ia}) = x_i \pm [\Delta x_{is} + s(x_i)] \quad (4.9)$$

y para la media

$$x = \bar{x} \pm (\Delta \bar{x}_s + \Delta \bar{x}_a) = \bar{x} \pm [\Delta \bar{x}_s + s(\bar{x})] \quad (4.10)$$

4.3 Medidas indirectas y propagación de errores.

Se dice que una medida es indirecta cuando el valor del mensurando no se obtiene directamente de la lectura de un instrumento, sino que se calcula a partir de la lectura de uno o varios instrumentos que miden otras magnitudes relacionadas de alguna manera con la que se está determinando.

Cada una de estas medidas directas originales tendrá asociado un error como los que hemos tratado en los dos apartados anteriores. El resultado de realizar operaciones matemáticas con estas cantidades tendrá también, por tanto, un error que dependerá de los errores de entrada y de la naturaleza de las operaciones que se hayan realizado con ellas.

Para entender cómo se puede estimar el error de las medidas indirectas consideremos una cierta magnitud de salida u que se calcula en función de otras magnitudes de entrada $x, y, z \dots$ a través de una relación matemática que se denomina **modelo de medición**. Podremos escribir entonces que

$$u = u(x, y, z \dots) \quad (4.11)$$

Las medidas directas y sus errores respectivos se habrán determinado como se ha indicado en los apartados anteriores, de modo que serán conocidas

$$x \pm \Delta x, \quad y \pm \Delta y, \quad z \pm \Delta z, \quad K \quad (4.12)$$

y lo que se pretende determinar es el valor de u y su error Δu

$$u \pm \Delta u \quad (4.13)$$

El valor de u se calcula simplemente sustituyendo en su expresión (4.11) los valores medidos de $x, y, z \dots$

Para determinar el valor del error Δu , tendremos en cuenta que el cambio que experimenta el valor de u cuando el valor de x cambia en Δx es, en aproximación de primer orden, $\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$. Si el valor medido de x se desvía como máximo Δx de su valor verdadero, siendo Δx relativamente pequeño, entonces u se desviará del suyo como máximo

$$\Delta u_x = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \Delta x = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \Delta x \quad (4.14)$$

donde todos los errores $\Delta(\cdot)$ son, como en los apartados precedentes, cotas superiores de error y se les asignan valores no negativos.

Lo mismo se puede decir para las componentes del error de u relacionadas con las magnitudes y , z ...

$$\Delta u_y = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \Delta y, \quad \Delta u_z = \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \Delta z, \quad K \quad (4.15)$$

En el peor de los casos, la máxima desviación del valor que se ha calculado para u con respecto a su valor verdadero, es decir, el error de la medida indirecta será:

$$\Delta u = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \Delta z + L \quad (4.16)$$

Ejemplo 4.1:

En una fuente, se ha llenado completamente de agua un recipiente de base cuadrada de lado l y altura h en un tiempo t y se quiere determinar el caudal medio q que mana de la fuente. Los valores medidos han sido:

$$l = (22,4 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$h = (53,5 \pm 0,5) \text{ cm}$$

$$t = (323,2 \pm 0,3) \text{ s}$$

El caudal medio se calcula dividiendo el volumen total de agua por el tiempo que ha tardado en llenarse el recipiente

$$q = \frac{l^2 h}{t} = q(l, h, t)$$

Para estimar el error asociado a este valor calculado del caudal es necesario derivar parcialmente esta expresión de q respecto de l , h y t ; esto es, calcular la derivada respecto de cada una de las variables considerando que las demás son constantes. Así, para derivar parcialmente respecto de l se tratan h y t como si fuesen constantes

$$\frac{\partial q}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{l^2 h}{t} \right) = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{h}{t} l^2 \right) = \frac{h}{t} \frac{\partial}{\partial l} (l^2) = \frac{h}{t} 2l = \frac{2lh}{t}$$

y se procede de forma análoga para derivar parcialmente respecto de h y de t

$$\frac{\partial q}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{l^2 h}{t} \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{l^2}{t} h \right) = \frac{l^2}{t} \frac{\partial}{\partial h} (h) = \frac{l^2}{t}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{l^2 h}{t} \right) = l^2 h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \right) = l^2 h \left(-\frac{1}{t^2} \right) = -\frac{l^2 h}{t^2}$$

El error de q responderá pues a la expresión

$$\Delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial l} \right| \Delta l + \left| \frac{\partial q}{\partial h} \right| \Delta h + \left| \frac{\partial q}{\partial t} \right| \Delta t = \left| \frac{2lh}{t} \right| \Delta l + \left| \frac{l^2}{t} \right| \Delta h + \left| \frac{l^2 h}{t^2} \right| \Delta t$$

teniendo en cuenta que l , h y t son siempre valores positivos, se puede escribir

$$\Delta q = \frac{2lh}{t} \Delta l + \frac{l^2}{t} \Delta h + \frac{l^2 h}{t^2} \Delta t$$

Al particularizar estas dos expresiones para los valores que se hayan medido se obtiene la medida indirecta del caudal con su error.

$$q = \frac{l^2 h}{t} = \frac{(22,4 \text{ cm})^2 \times 53,5 \text{ cm}}{323,2 \text{ s}} = 83,06 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

NÓTESE que la cuarta cifra del resultado es de seguridad.

$$\begin{aligned} \Delta q &= \frac{2lh}{t} \Delta l + \frac{l^2}{t} \Delta h + \frac{l^2 h}{t^2} \Delta t \\ &= \frac{2 \times 22,4 \text{ cm} \times 53,5 \text{ cm}}{323,2 \text{ s}} \times 0,1 \text{ cm} + \frac{(22,4 \text{ cm})^2}{323,2 \text{ s}} \times 0,5 \text{ cm} + \frac{(22,4 \text{ cm})^2 \times 53,5 \text{ cm}}{(323,2 \text{ s})^2} \times 0,3 \text{ s} \\ &= 0,74 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} + 0,78 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} + 0,077 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} = 1,60 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \approx 1,6 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

NÓTESE que:

- El error calculado por propagación de errores tiene las mismas unidades que el valor calculado del mensurando.
- Todas las componentes del error se suman entre sí, nunca se restan.

Hemos realizado las operaciones intermedias guardando una cifra de seguridad como se indica en las recomendaciones para la realización de cálculos con cantidades aproximadas y al sumar todas las componentes del error hemos encontrado que su valor tiene probablemente dos cifras significativas. Podríamos, entonces, expresar el resultado como

$$q = (83,1 \pm 1,6) \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

pero, como no sabemos con seguridad cuán exacto es el valor del error calculado, redondeamos este valor por exceso a una sola cifra significativa ($\Delta q \approx 2 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$) y resulta finalmente

$$q = (83 \pm 2) \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

4.3.1 Propagación de errores en las operaciones más comunes

La aplicación de la técnica de propagación de errores —ecuación (4.16)— a las operaciones más habituales resulta en las expresiones del error del resultado que se recogen en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1

Operación	Error	Operación	Error
$\left. \begin{array}{l} u = x + y \\ u = x - y \end{array} \right\}$	$\Delta u = \Delta x + \Delta y$	$u = \sin \theta$	$\Delta u = \cos \theta \Delta \theta$ ($\Delta \theta$ en radianes)
$\left. \begin{array}{l} u = x \cdot y \\ u = \frac{x}{y} \end{array} \right\}$	$\Delta u = \left(\frac{\Delta x}{ x } + \frac{\Delta y}{ y } \right) \cdot u $	$\theta = \arcsin x$	$\Delta \theta = \left \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right \Delta x$ (θ y $\Delta \theta$ en radianes)
$u = a \cdot x$	$\Delta u = a \cdot \Delta x$	$u = e^x$	$\Delta u = \Delta x \cdot u $
$u = x^a$	$\Delta u = a \cdot \frac{\Delta x}{ x } \cdot u $	$u = \ln x$	$\Delta u = \frac{\Delta x}{ x }$

donde x , y y θ son cantidades aproximadas y a es una cantidad exacta.

5 Tratamiento gráfico de datos experimentales y ajuste de rectas a los datos.

5.1 Indicaciones para construir una gráfica

El propósito principal de una gráfica es dar una impresión visual de los resultados obtenidos en un experimento; debe ser, por tanto, lo más clara posible.

A la hora de realizar una gráfica hay que tener en cuenta los siguientes puntos:

- 1.- Al construir la gráfica, se debe poner un título especificando el experimento realizado e indicando qué tabla de valores se representa.
- 2.- Se ha de escoger un tipo de ejes (lineales, logarítmicos, etc.) que permitan observar fácilmente las características de las distribuciones de puntos que se esperan obtener (p. ej. que hagan que los puntos aparezcan más o menos alineados sobre una recta).
- 3.- Los ejes deben ser divididos de la forma más sencilla posible y de modo que al representar los puntos éstos no queden ni demasiado juntos ni demasiado dispersos. La división de la escala ha de ser sencilla y de fácil lectura (p.ej. una división por cada unidad).
- 4.- Se ha de indicar de forma clara las magnitudes y unidades que corresponden a cada eje. Si se utiliza notación científica, hay que especificar la potencia de 10 por la que se deben multiplicar los valores representados en los ejes.
- 5.- Se deben marcar los puntos correspondientes a las medidas de forma que resalten con claridad, con cruces, aspás, círculos, etc. Es conveniente hacer los primeros intentos a lápiz por si es necesario corregir.
- 6.- Cuando haya que representar en un mismo sistema de ejes los puntos pertenecientes a diferentes gráficas, éstos deben ser identificados de forma diferente; p.ej. +, ×, ●, ○, ■, □, ◆, ◇, etc. Si la gráfica se hace demasiado confusa, es preferible repartirla en gráficas separadas.

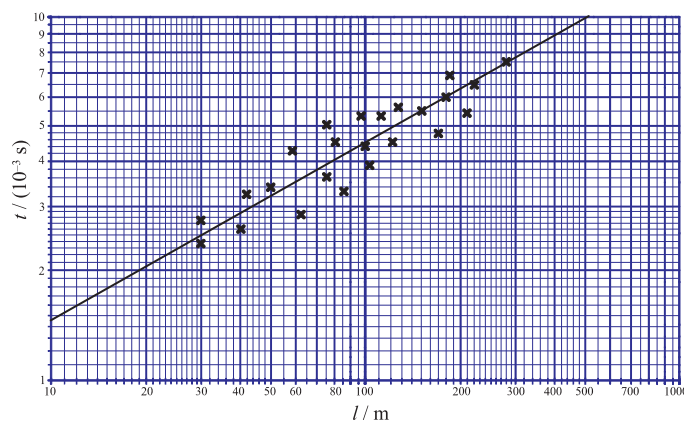


Figura 5.1. Tiempo de caída frente a distancia recorrida.

- 7.- Las curvas experimentales se deben trazar a través de la nube de puntos de la forma más aproximada posible a su forma teórica. No tienen que pasar necesariamente por todos los puntos, siquiera es necesario que pasen por alguno de ellos; sólo se ha de tener cuidado de que queden más o menos tantos puntos por encima como por debajo de la curva trazada. Los puntos experimentales **no se borran** una vez trazada la curva.

5.2 Ajustes de rectas por el método de los mínimos cuadrados

Uno de los problemas más frecuentes que se presentan al experimentador es el de la regresión, esto es, encontrar una relación matemática entre dos magnitudes (x e y) que se ajuste de la mejor forma posible a una serie de valores obtenidos experimentalmente.

El caso más sencillo se tiene cuando existe una relación lineal entre las magnitudes x e y . Esta relación puede ser conocida *a priori* o bien establecerse a la vista de que al representar el conjunto de n pares de valores experimentales (x_i, y_i) su distribución se aproxima a una recta.

En general, una recta en el plano XY puede escribirse de la forma:

$$y = b \cdot x + a \quad (5.1)$$

Para estimar los valores de los parámetros b (pendiente) y a (intercepción u ordenada en el origen) que hacen que la recta se ajuste lo mejor posible a una cierta distribución de puntos medidos (x_i, y_i) se suele utilizar el método de los mínimos cuadrados, que consiste en buscar los valores de a y b que minimizan el valor de la expresión

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (b \cdot x_i + a)]^2 \quad (5.2)$$

De las condiciones de mínimo se obtiene que

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (5.3)$$

↓

↓

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \quad a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (5.4)$$

Cuyos errores asociados son, respectivamente

$$\Delta b = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n (y_i - b x_i - a)^2}{(n-2) \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}} \quad \Delta a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n (y_i - b x_i - a)^2}{(n-2) \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}} \quad (5.5)$$

↓

↓

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - b x_i - a)^2}{(n-2) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right)}} \quad \Delta a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n (y_i - b x_i - a)^2}{n(n-2) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right)}} = \Delta b \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \quad (5.6)$$

A la cantidad

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2\right)}}} \quad (5.7)$$

se le llama coeficiente de correlación. Este coeficiente puede tomar valores comprendidos entre -1 y 1 , y se puede interpretar como una medida del grado de linealidad de la nube de puntos (x_i, y_i) ya que cuanto más próximo sea su valor absoluto a 1 , mejor será el ajuste de los datos experimentales a la recta de regresión.

5.3 Representación gráfica de una recta de regresión

Una vez calculada la recta de regresión puede representarse sobre la misma gráfica que las medidas experimentales o en una gráfica independiente con ejes similares a los de la primera.

Para trazar la recta se calcularán dos puntos utilizando la expresión

$$y = b \cdot x + a$$

tomando valores de la coordenada x lo más separados posible dentro de los límites de la escala de la gráfica. Se dibujan estos dos puntos y se unen con una recta.

Si además se quiere representar la región de incertidumbre, en la que se encuentran todas las rectas que podrían ajustarse a la distribución original de puntos, se trazan de la misma manera las cuatro rectas que la limitan:

$$\left. \begin{aligned} y &= (b + \Delta b) \cdot x + (a + \Delta a) \\ y &= (b - \Delta b) \cdot x + (a - \Delta a) \end{aligned} \right\} \text{para } x \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} y &= (b - \Delta b) \cdot x + (a + \Delta a) \\ y &= (b + \Delta b) \cdot x + (a - \Delta a) \end{aligned} \right\} \text{para } x < 0 \quad (5.8)$$

5.4 Ajustes de rectas «a ojo»

El procedimiento de ajuste por mínimos cuadrados es objetivo pero laborioso y en muchos casos resulta de interés trazar «a ojo» sobre la gráfica con los datos experimentales líneas de tendencia que permitan visualizar su comportamiento de manera rápida y semi-cuantitativa, aunque con un cierto grado de subjetividad. En particular, si los datos tienen un comportamiento lineal se puede trazar «a ojo» la recta de mejor ajuste y evaluar gráficamente su pendiente y ordenada en el origen.

6 Bibliografía

1. Bronshtein I. y Semendiaev K. *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*. MIR, Moscú (1982) pp. 127–131
2. Spiridonov V.P. y Lopatkin A.A. *Tratamiento matemático de datos físico-químicos*. MIR, Moscú (1983) pp. 53–96
3. UNE 82103:1996 (ISO 1000:1992), *Unidades SI y recomendaciones para el empleo de sus múltiplos y submúltiplos y de algunas otras unidades*.

4. UNE 82100-0:1996 (ISO 31-0:1992), *Magnitudes y unidades. Parte 0: Principios generales*.
5. *Glosario de términos empleados en Metrología*. Asociación española para el control de calidad. Enero 1987
6. *Vocabulario Internacional de Metrología (VIM)*, 3ª edición en español 2008, traducción de la 3ª edición del VIM 2008, Centro Español de Metrología, 2008.
7. <http://www.bipm.org> (página web del *Bureau International des Poids et Mesures* en la que se pueden consultar las versiones oficiales del Sistema Internacional de Unidades y del VIM).
8. <http://www.cem.es> (página web del Centro Español de Metrología en la que se pueden consultar las traducciones al castellano del Sistema Internacional de Unidades y del VIM).

Fórmulas para el tratamiento de datos experimentales.

Media

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Desviación típica muestral

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Desviación típica de la media

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Propagación de errores:

$$u = u(x, y, z, K) \Rightarrow \Delta u = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \Delta z + L$$

Operación	Error	Operación	Error
$\left. \begin{aligned} u &= x + y \\ u &= x - y \end{aligned} \right\}$	$\Delta u = \Delta x + \Delta y$	$u = \sin \theta$	$\Delta u = \cos \theta \Delta \theta$ ($\Delta \theta$ en radianes)
$\left. \begin{aligned} u &= x \cdot y \\ u &= \frac{x}{y} \end{aligned} \right\}$	$\Delta u = \left(\frac{\Delta x}{ x } + \frac{\Delta y}{ y } \right) \cdot u $	$\theta = \arcsin x$	$\Delta \theta = \left \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right \Delta x$ (θ y $\Delta \theta$ en radianes)
$u = a \cdot x$	$\Delta u = a \cdot \Delta x$	$u = e^x$	$\Delta u = \Delta x \cdot u $
$u = x^a$	$\Delta u = a \cdot \frac{\Delta x}{ x } \cdot u $	$u = \ln x$	$\Delta u = \frac{\Delta x}{ x }$

Regresión lineal:

$$y = bx + a$$

$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$	$a = y - b \cdot x$	con $\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$
$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i - a)^2}{(n-2) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right)}}$	$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i - a)^2}{n(n-2) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right)}} = \Delta b \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$	
$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)}}$		

Código de colores de resistencias

Negro	Marrón	Rojo	Naranja	Amarillo	Verde	Azul	Violeta	Gris	Blanco	Oro	Plata
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
	1%	2%								5%	10%