

Ferramentas matemáticas

A velocidade, a aceleración, o campo gravitacional, o campo eléctrico, o campo magnético... son vectores. Para traballar con eles, debes coñecer o cálculo vectorial.

E para expresar como varían algunhas magnitudes ao longo do tempo, como a posición, utilízanse o cálculo diferencial e o cálculo integral.

OBXECTIVOS

Ao final desta unidade serás quen de:

- Comprender os conceptos matemáticos e efectuar as operacións necesarias no estudo deste curso.
- Valorar a utilidade das ferramentas matemáticas no estudo da física.

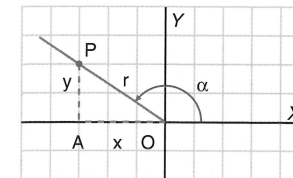
CONTIDOS

1. Trigonometría
2. Cálculo vectorial
3. Cálculo diferencial
4. Cálculo integral
5. Resolución de problemas

1. Trigonometría

Os lados e os ángulos de calquera triángulo relaciónanse a partir das **razóns trigonométricas**. Estas relacións e as funcións que poden derivarse delas utilízanse frecuentemente na física.

Razóns trigonométricas dun ángulo calquera



P : punto calquera do lado extremo do ángulo α

(x, y) : coordenadas do punto P

r : distancia de P á orixe de coordenadas O

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \quad \text{cos } \alpha = \frac{x}{r} \quad \text{tx } \alpha = \frac{y}{x}$$

os seus signos son

relaciónanse con algún ángulo do primeiro cadrante

cumpren as relacións

Signo das razóns trigonométricas

Cuadrante	sen	cos	tx
Primeiro	+	+	+
Segundo	+	-	-
Terceiro	-	-	+
Cuarto	-	+	-

Relacións entre as razóns trigonométricas

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

(teorema fundamental da trigonometría)

$$\text{tx } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

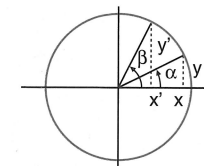
Relación entre as razóns trigonométricas de diferentes ángulos

α e $90^\circ - \alpha$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$y' = x$$

$$x' = y$$



$$\text{sen } (90^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{cos } (90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

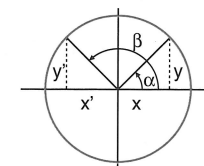
$$\text{tx } (90^\circ - \alpha) = \text{cotx } \alpha$$

α e $180^\circ - \alpha$

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

$$y' = y$$

$$x' = -x$$



$$\text{sen } (180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha$$

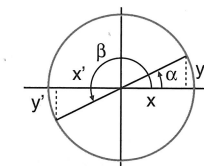
$$\text{tx } (180^\circ - \alpha) = -\text{tx } \alpha$$

α e $180^\circ + \alpha$

$$\beta = 180^\circ + \alpha$$

$$y' = -y$$

$$x' = -x$$



$$\text{sen } (180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (180^\circ + \alpha) = -\text{cos } \alpha$$

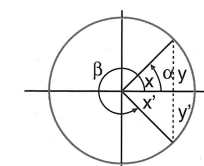
$$\text{tx } (180^\circ + \alpha) = \text{tx } \alpha$$

α e $360^\circ - \alpha$

$$\beta = 360^\circ - \alpha$$

$$y' = -y$$

$$x' = x$$



$$\text{sen } (360^\circ - \alpha) = \text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (360^\circ - \alpha) = \text{cos } (-\alpha) = \text{cos } \alpha$$

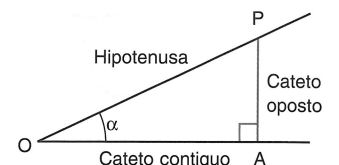
$$\text{tx } (360^\circ - \alpha) = \text{tx } (-\alpha) = -\text{tx } \alpha$$

Razóns trigonométricas dun ángulo agudo

$$\text{sen } \alpha = \frac{AP}{OP}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{OA}{OP}$$

$$\text{tx } \alpha = \frac{AP}{OA}$$



Razóns trigonométricas inversas

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$$

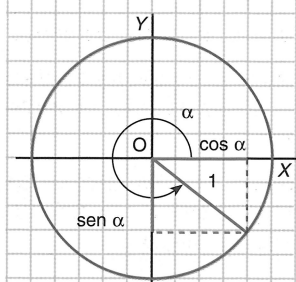
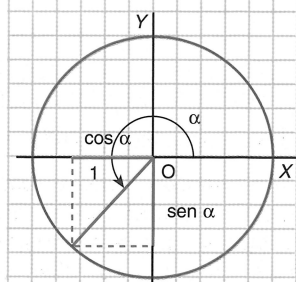
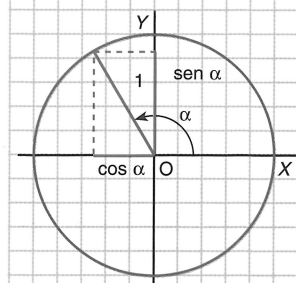
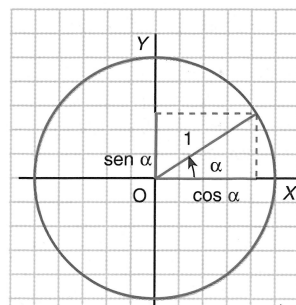
$$\text{cotx } \alpha = \frac{1}{\text{tx } \alpha}$$

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tx	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

■ Razóns trigonométricas dalgúns ángulos característicos.

Circunferencia goniométrica

Circunferencia de raio 1 centrada na orixe O de coordenadas. Utilízase para obter un segmento representativo do valor do seno e do coseno de calquera ángulo.

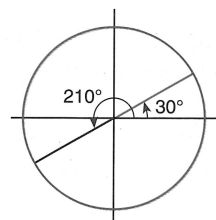


EXEMPLO 1

Calcula as razóns trigonométricas de 1650° .

Reducimos 1650° ao primeiro xiro:

$$\begin{array}{r} 1650 \\ 360 \\ \hline 210 \end{array} \rightarrow 1650^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 210^\circ$$



O ángulo de 1650° equivale ao de 210° . Polo tanto, as razóns trigonométricas de 1650° coincidirán coas de 210° . Para obtelas faremos a correspondente redución ao primeiro cuadrante:

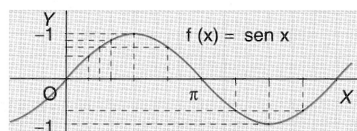
$$\begin{aligned} \text{sen } 1650^\circ &= \text{sen } 210^\circ = \text{sen } (180^\circ + 30^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2} \\ \text{cos } 1650^\circ &= \text{cos } 210^\circ = \text{cos } (180^\circ + 30^\circ) = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{tg } 1650^\circ &= \text{tg } 210^\circ = \text{tg } (180^\circ + 30^\circ) = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Transformación de sumas de razóns trigonométricas en produtos

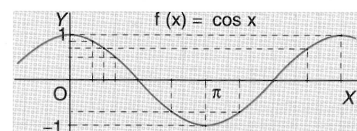
$$\begin{aligned} \text{sen } A + \text{sen } B &= 2 \cdot \text{sen } \frac{A+B}{2} \cdot \text{cos } \frac{A-B}{2} \\ \text{sen } A - \text{sen } B &= 2 \cdot \text{cos } \frac{A+B}{2} \cdot \text{sen } \frac{A-B}{2} \\ \text{cos } A + \text{cos } B &= 2 \cdot \text{cos } \frac{A+B}{2} \cdot \text{cos } \frac{A-B}{2} \\ \text{cos } A - \text{cos } B &= -2 \cdot \text{sen } \frac{A+B}{2} \cdot \text{sen } \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

Funcións trigonométricas

Función seno: asígnalle á variable independente x o valor $f(x) = \text{sen } x$.



Función coseno: asígnalle á variable independente x o valor $f(x) = \text{cos } x$.



Observa que:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \text{sen } \alpha \leq 1 \\ \text{sen } 0 &= \text{sen } \pi = \text{sen } 2\pi = 0 \\ \text{sen } \frac{\pi}{2} &= \text{sen } \frac{5\pi}{2} = \text{sen } \frac{9\pi}{2} = +1 \\ \text{sen } \frac{3\pi}{2} &= \text{sen } \frac{7\pi}{2} = \text{sen } \frac{11\pi}{2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \text{cos } \alpha \leq 1 \\ \text{cos } \frac{\pi}{2} &= \text{cos } \frac{3\pi}{2} = \text{cos } \frac{5\pi}{2} = 0 \\ \text{cos } 0 &= \text{cos } 2\pi = \text{cos } 4\pi = +1 \\ \text{cos } \pi &= \text{cos } 3\pi = \text{cos } 5\pi = -1 \end{aligned}$$

2. Cálculo vectorial

Dous puntos A e B determinan un segmento. Se a este segmento lle asignamos un sentido, obteremos un **vector**.

➔ Dados dous puntos A e B , denomínase **vector fixo de orixe A e extremo B** o par ordenado (A, B) . Representase por $\overrightarrow{AB}$.

Entre todos os vectores fixos que existen, hai uns que teñen a **mesma dirección, o mesmo módulo e o mesmo sentido**. Diremos que estes vectores son **equipolentes**.

Esta relación de equipolencia permite clasificar os vectores do espazo en coleccións de vectores, e cada unha delas constituirá un **vector libre**.

➔ Denomínase **vector libre** o conxunto de vectores equipolentes a un dado.

Cada un dos vectores fixos que compoñen un vector libre é un **representante** deste vector. Xeralmente, un vector libre representase mediante letras minúsculas: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$

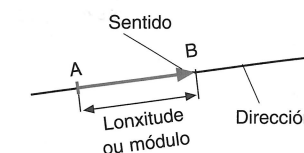
Se se ten un vector libre $\vec{v}$ e un punto calquera do espazo P , existe un único representante de $\vec{v}$ con orixe en P .

A dirección, o módulo e o sentido dun vector libre coinciden coa dirección, o módulo e o sentido dun calquera dos seus representantes.

FÍXATE

Todo vector fixo posúe unha **dirección**, unha **lonxitude** e un **sentido**.

- A **dirección** do vector fixo $\overrightarrow{AB}$ é a da recta que pasa por A e B .
- A **lonxitude** do **módulo** do vector fixo $\overrightarrow{AB}$ é a lonxitude do segmento AB . Representase por $|\overrightarrow{AB}|$.
- O **sentido** do vector fixo $\overrightarrow{AB}$ é o que se define sobre a recta determinada por A e B cando nos trasladamos de A a B .

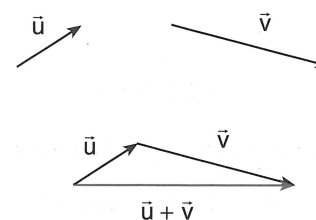


Operacións con vectores libres

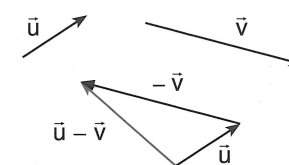
Adición

A **suma de dous vectores libres** $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que representamos por $\vec{u} + \vec{v}$, é o vector libre obtido do seguinte xeito:

- Tomamos representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de xeito que a orixe do representante de $\vec{v}$ coincida co extremo do representante de $\vec{u}$.
- Trazamos o vector que ten de orixe a mesma do representante de $\vec{u}$ e o seu extremo é o do representante de $\vec{v}$ elixidos.

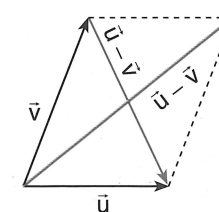


Para obter o vector resta, $\vec{u} - \vec{v}$, basta con construír o vector $-\vec{v}$, o elemento oposto de $\vec{v}$ e sumarllo a $\vec{u}$.



Regra do paralelogramo

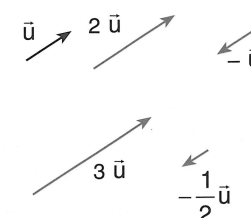
Se colocamos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ con orixe común e completamos o paralelogramo, obtemos facilmente os vectores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.



Multiplicación por un número real

O **produto dun número real k** , chamado **escalar**, por un **vector libre** $\vec{u}$, que representamos por $k \cdot \vec{u}$, é o vector libre que ten:

- Dirección, a mesma que $\vec{u}$.
- Módulo, o módulo de $\vec{u}$ multiplicado polo valor absoluto de k .
- Sentido, o mesmo ca o de $\vec{u}$ se k é positivo, e contrario ao de $\vec{u}$ se k é negativo.



Bases en V_3

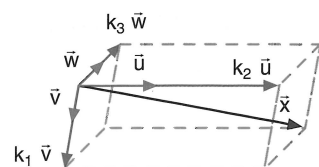
Na física ten especial importancia o conxunto de vectores libres do espazo, que denotamos por V_3 .

Para **representar** calquera vector utilizaremos unha **base**. Unha base de V_3 é un conxunto de tres vectores $\vec{v}, \vec{u}$ e $\vec{w}$, de V_3 , escollidos de xeito que, se temos calquera vector $\vec{x}$ de V_3 , podemos atopar tres escalares k_1, k_2 e k_3 , que cumpren:

$$\vec{x} = k_1 \cdot \vec{v} + k_2 \cdot \vec{u} + k_3 \cdot \vec{w}$$

Os números reais k_1, k_2 e k_3 reciben o nome das **compoñentes** do vector $\vec{x}$ na base formada por $\vec{v}, \vec{u}$ e $\vec{w}$:

$$\vec{x} = (k_1, k_2, k_3) \text{ en } \{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}$$



$$\vec{x} = k_1 \cdot \vec{v} + k_2 \cdot \vec{u} + k_3 \cdot \vec{w}$$

Se os tres vectores da base son ortogonais, é dicir, perpendiculares dous a dous, diremos que se trata dunha **base ortogonal**.

Se ademais de ser perpendiculares son de módulo 1, diremos que se trata dunha **base ortonormal**.

En xeral, no espazo trabállase nunha **base ortonormal** formada polos vectores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, que son perpendiculares dous a dous e de módulo 1.

FIXATE

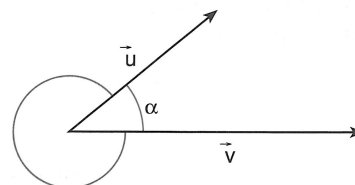
Ao escribir $\vec{v} \perp \vec{u}$, expresamos que os vectores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ son perpendiculares.

2.1. Produto escalar de vectores

O produto escalar é unha operación definida no conxunto dos vectores libres que lle asocia a cada par de vectores un número real. Obtense da seguinte maneira:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

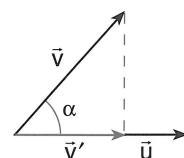
sendo α o menor dos ángulos que forman as semirrectas que conteñen dous representantes concorrentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Da definición dedúcese que o produto escalar de dous vectores calquera perpendiculares é 0, dado que $\cos 90^\circ = 0$.

Interpretación xeométrica do produto escalar

Podemos expresar o coseno do ángulo α como a relación entre a proxección do vector $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, que denominaremos $\vec{v}'$, e o módulo do vector $\vec{v}$.



$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}'|}{|\vec{v}|} \Rightarrow |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = |\vec{v}'|$$

Do anterior, ampliado a calquera ángulo, dedúcese que o valor absoluto do produto escalar de dous vectores é igual ao módulo do primeiro polo módulo da proxección do segundo na dirección do primeiro:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}'|$$

Esta interpretación xeométrica do produto escalar permítenos calcular a **compoñente dun vector nunha dirección determinada**, dado que coincide coa proxección do vector sobre outro que teña esa dirección.

Expresión analítica do produto escalar nunha base ortonormal

Para determinar a expresión analítica do produto escalar, consideraremos a base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, con compoñentes nesta base que son (u_x, u_y, u_z) e (v_x, v_y, v_z) , é dicir:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}; \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Aplicando as propiedades do produto escalar temos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \cdot (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \\ &= u_x v_x \vec{i} \cdot \vec{i} + u_x v_y \vec{i} \cdot \vec{j} + u_x v_z \vec{i} \cdot \vec{k} + u_y v_x \vec{j} \cdot \vec{i} + u_y v_y \vec{j} \cdot \vec{j} + \\ &+ u_y v_z \vec{j} \cdot \vec{k} + u_z v_x \vec{k} \cdot \vec{i} + u_z v_y \vec{k} \cdot \vec{j} + u_z v_z \vec{k} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Pero, como $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é unha base ortonormal, os vectores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ son ortogonais e de módulo 1. Polo tanto:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0; \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

E o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Aplicacións do produto escalar

A definición do produto escalar e a súa expresión analítica nunha base ortonormal permiten obter o **módulo dun vector** e o coseno do **ángulo entre dous vectores** en función das súas compoñentes.

Sexan (u_x, u_y, u_z) e (v_x, v_y, v_z) as compoñentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nunha base ortonormal. Entón:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2; |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(u_x, u_y, u_z) \cdot (u_x, u_y, u_z)}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

Por outro lado:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Ao substituír $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $|\vec{u}|$ e $|\vec{v}|$ pola súa expresión analítica, obtemos:

$$\cos \alpha = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

que é a expresión analítica do ángulo entre dous vectores.

EXEMPLO 2

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$; b) $|\vec{u}|$; c) $|\vec{v}|$; d) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, se $\vec{u} = (1, 3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 5, 4)$.

Aplicamos en cada caso a expresión correspondente:

$$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 = -2 + 15 - 4 = 9$$

$$b) |\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$c) |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{45}$$

$$\begin{aligned} d) \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) &= \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \\ &= \frac{1 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 4}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{495}} \end{aligned}$$

EXEMPLO 3

Determina un vector de módulo 1 na dirección do vector $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$.

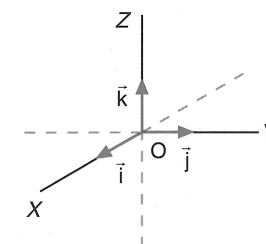
— Dividimos o vector polo seu módulo para determinar o vector unitario:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{unitario}} &= \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 7^2}} (3, 1, 7) = \frac{1}{\sqrt{59}} (3, 1, 7) \\ \vec{v}_{\text{unitario}} &= \frac{3}{\sqrt{59}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{59}} \vec{j} + \frac{7}{\sqrt{59}} \vec{k} \end{aligned}$$

Sistema de referencia

Unha base permítenos representar calquera vector libre $\vec{v}$. Non obstante, para asignarlles coordenadas aos puntos do espazo, necesitamos un **sistema de referencia**. Este é o conxunto formado por un punto fixo do espazo, a **orixe de coordenadas O** e unha **base**.

Así, xeralmente, os vectores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ determinan os tres eixes de coordenadas correspondentes, X, Y e Z. E o punto de intersección dos tres eixes tómasse como orixe de coordenadas, O.



Propiedades do produto escalar

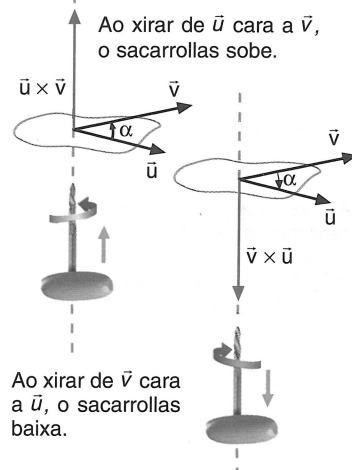
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

FIXATE

Os vectores de **módulo 1** chámanse **unitarios**.

- O vector $\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$ é un vector unitario da mesma dirección e o mesmo sentido ca $\vec{u}$.
- O vector $\frac{-1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$ é un vector unitario da mesma dirección que $\vec{u}$ e sentido contrario.

Dirección e sentido do produto vectorial



2.2. Produto vectorial de dous vectores libres no espazo

O produto vectorial é outra operación definida en V_3 , que lle asocia a cada par de vectores libres do espazo outro vector libre de V_3 .

Chamámolles **produto vectorial** de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V_3 , e representámolo por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vector de V_3 con elementos característicos que son:

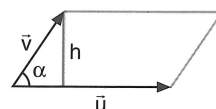
- **Módulo**, $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\widehat{u, v})$.
- **Dirección**, simultaneamente perpendicular ás de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- **Sentido**, o de avance dun sacarrollas que xira de $\vec{u}$ cara a $\vec{v}$ polo camiño máis curto.

Observa que se o vector $\vec{u}$ ou o vector $\vec{v}$ son nulos, ou son linealmente dependentes ($(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$), considérase, por convenio, que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Interpretación xeométrica do produto vectorial

O seno do ángulo α é a relación entre a altura h do paralelogramo e a proxección do vector $\vec{v}$ sobre o vector $\vec{u}$.

$$\sin \alpha = \frac{h}{|\vec{v}|}; h = |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$$



Como a base do paralelogramo é o módulo do vector $|\vec{u}|$ e a súa altura é h , podemos expresar a súa área como:

$$A = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Así, o **módulo do produto vectorial** de dous vectores coincide coa **área do paralelogramo** construído a partir deles.

Expresión analítica do produto vectorial nunha base ortonormal

Consideremos os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, expresados na base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}; \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Aplicando as propiedades do produto vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \times (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \\ &= u_x v_y \vec{i} \times \vec{j} + u_x v_z \vec{i} \times \vec{k} + u_y v_x \vec{j} \times \vec{i} + u_y v_z \vec{j} \times \vec{k} + \\ &+ u_z v_x \vec{k} \times \vec{i} + u_z v_y \vec{k} \times \vec{j} + u_z v_z \vec{k} \times \vec{k} \end{aligned}$$

E dado que os vectores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ son ortonormais, cumpren:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}; \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}; \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{aligned}$$

O produto vectorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} - (u_x v_z - u_z v_x) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k}$$

EXEMPLO 4

Busca o vector $\vec{u} \times \vec{v}$, si $\vec{u} = (1, -2, 5)$ e $\vec{v} = (2, -1, 3)$ na base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

— Aplicamos a expresión analítica do produto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} - (u_x v_z - u_z v_x) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-6 + 5) \vec{i} - (3 - 10) \vec{j} + (-1 + 4) \vec{k} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k} = (-1, 7, 3)$$

Aplicacións do produto vectorial

A definición do produto vectorial e a súa expresión analítica nunha base ortonormal permítenos determinar o **momento dun vector respecto dun punto**, con respecto dun eixe, obter un vector perpendicular a dous dados e calcular a área de paralelogramos e triángulos.

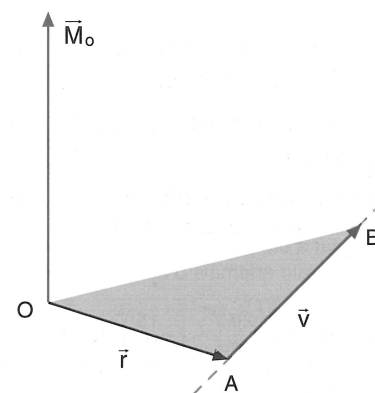
FÍXATE

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Momento dun vector respecto dun punto

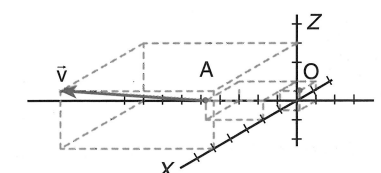
O momento dun vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ respecto dun punto O é o produto vectorial do vector de posición $\vec{r}$ da orixe (A) do vector respecto de O , polo propio vector:

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} = \vec{r} \times \vec{v}$$



EXEMPLO 5

Calcula o momento do vector $\vec{v} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$, aplicado no punto $A = (2, -3, 1)$ respecto do punto $O = (1, 1, 1)$.



— Calculamos o vector $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ e aplicamos a definición do momento dun vector:

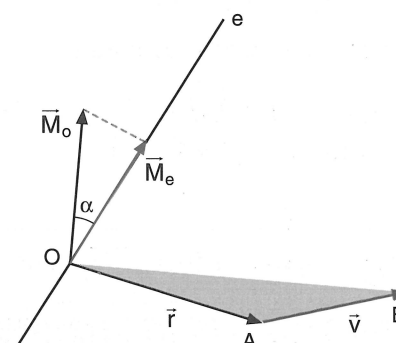
$$\begin{aligned} \vec{r} &= \overrightarrow{OA} = (2, -3, 1) - (1, 1, 1) = \vec{i} - 4\vec{j} \\ \vec{M}_O &= \overrightarrow{OA} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} = (\vec{i} - 4\vec{j}) \times (3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}) \\ &= (-8 + 0)\vec{i} - (2 - 0)\vec{j} + (-5 - (-12))\vec{k} \\ \vec{M}_O &= -8\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k} \end{aligned}$$

Momento dun vector respecto dun eixe

O momento dun vector $\vec{v}$ respecto dun eixe e é a proxección sobre ese eixe do momento de $\vec{v}$ respecto dun punto O calquera do eixe:

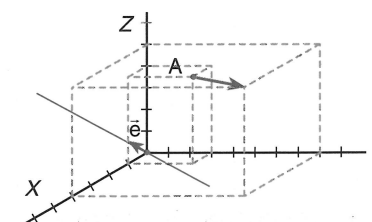
$$\vec{M}_e = \text{proxección sobre } e \text{ de } \vec{M}_O \quad (\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{v})$$

$$|\vec{M}_e| = |\vec{M}_O| \cdot \cos \alpha$$



EXEMPLO 6

Determina o momento do vector $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, aplicado no punto $A = (1, 3, 4)$, respecto dun eixe coa dirección do vector $\vec{e} = \vec{i} + \vec{k}$ e que pasa polo punto $O = (0, 0, 0)$.



— Calculamos o vector $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ e aplicamos a definición do momento dun vector para determinar o valor do seu módulo:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \overrightarrow{OA} = (1, 3, 4) - (0, 0, 0) = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{M}_O &= \overrightarrow{OA} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} = (\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \times (3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}) = \\ &= (3 - 20)\vec{i} - (1 - 12)\vec{j} + (5 - 9)\vec{k} = -17\vec{i} + 11\vec{j} - 4\vec{k} \\ |\vec{M}_O| &= \sqrt{(-17)^2 + (11)^2 + (-4)^2} = \sqrt{426} = 20,64 \end{aligned}$$

— Utilizamos o produto escalar para determinar o coseno de α , o ángulo entre o vector $\vec{v}$ e o eixe e , e así determinar $|\vec{M}_e|$:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{|\vec{e}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(1, 0, 1) \cdot (3, 5, 1)}{|(1, 0, 1)| \cdot |(3, 5, 1)|} = \frac{3 + 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{35}} = 0,48 \\ |\vec{M}_e| &= |\vec{M}_O| \cdot \cos \alpha = 20,64 \cdot 0,48 = 9,91 \end{aligned}$$

Vector perpendicular a dous vectores dados

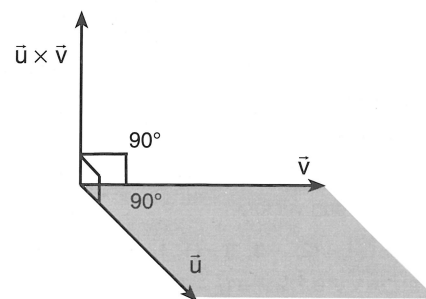
Para determinar un vector perpendicular a dous vectores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, debemos lembrar que o vector produto vectorial de $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é perpendicular simultaneamente aos dous vectores.

Polo tanto, $\vec{v} \times \vec{u}$ é perpendicular a $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

Se queremos un vector cun módulo que sexa m , temos que multiplicar o vector $\vec{v} \times \vec{u}$ por m e dividilo polo seu módulo, $|\vec{v} \times \vec{u}|$.

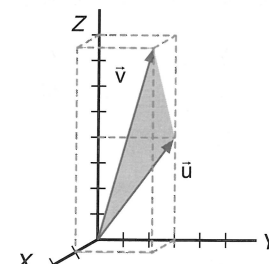
Vector perpendicular a $\vec{v}$ e $\vec{u}$, de módulo m :

$$\left(\frac{m}{|\vec{v} \times \vec{u}|} \right) \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$$



EXEMPLO 7

Determina as compoñentes dun vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (0, 3, 4)$ e a $\vec{v} = (1, 3, 8)$, que teña módulo 5.



— Calculamos $\vec{u} \times \vec{v}$ e o seu módulo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = 12\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{12^2 + 4^2 + (-3)^2} = 13$$

— Determinamos o vector $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \left(\frac{5}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{5}{13} \cdot (12, 4, -3)$$

$$\vec{w} = \left(\frac{60}{13}, \frac{20}{13}, -\frac{15}{13} \right)$$

É perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ por ser un múltiplo de $\vec{u} \times \vec{v}$. Comprobamos que ademais o seu módulo é 5:

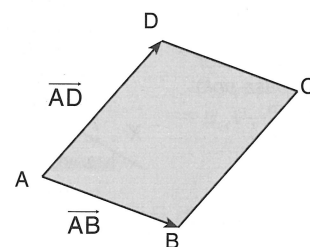
$$|\vec{w}| = \sqrt{\left(\frac{60}{13}\right)^2 + \left(\frac{20}{13}\right)^2 + \left(-\frac{15}{13}\right)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Área dun paralelogramo ou dun triángulo

Segundo a interpretación xeométrica do produto vectorial, o módulo do produto vectorial de dous vectores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é igual á área do paralelogramo que determinan.

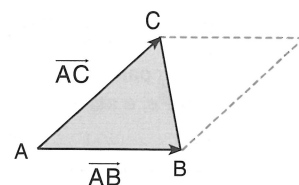
Por iso, se temos o paralelogramo da figura, a súa área será:

$$A = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$



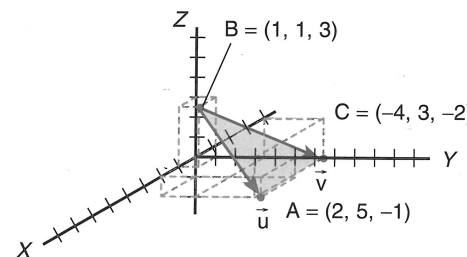
E se temos o triángulo da figura, a súa área será:

$$A = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$



EXEMPLO 8

Calcula a área do paralelogramo e do triángulo ABC da figura.



— Para obter a área do paralelogramo, determinamos o vector $\vec{u} = [\vec{BA}]$ e $\vec{v} = [\vec{BC}]$. Así, a área buscada coincide con $|\vec{u} \times \vec{v}|$:

$$\vec{u} = [\vec{BA}] = (1, 4, -4); \vec{v} = [\vec{BC}] = (-5, 2, -5)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-20 + 80)\vec{i} - (-5 - 20)\vec{j} + (2 + 20)\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -12\vec{i} + 25\vec{j} + 22\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-12)^2 + 25^2 + 22^2} = \sqrt{1253} \approx 35,4 \text{ u}^2$$

— A área que ocupa o triángulo é a metade da área do paralelogramo. Por iso, coincide coa metade de $|\vec{u} \times \vec{v}|$:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1253} \approx 17,7 \text{ u}^2$$

3. Cálculo diferencial

Algunhas das magnitudes máis importantes na física relaciónanse a través do cálculo diferencial.

Chamámolles **derivada** da función f no punto de abscisa $x = a$ ao límite, se existe:

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se este límite existe, representámolo por $f'(a)$ e dicimos que a función f é **derivable** no punto a . Se lle chamamos h á diferenza $b - a$, tamén podemos escribir o seguinte:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se consideramos unha función, f' , que lle asigne a cada punto de abscisa x o valor da derivada de f neste punto, obteremos a **función derivada** de f ou, simplemente, a **derivada**:

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Deseguido presentámosche as derivadas das principais funcións, así como as regras que permiten derivar funcións conseguidas ao operar con outras funcións.

Función	Función derivada
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

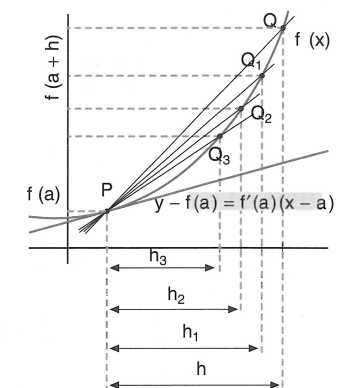
■ Táboa 1.

Interpretación xeométrica da derivada

A **derivada** da función f no punto de abscisa $x = a$ é a **pendente** da recta **tanxente** á gráfica da función no punto $(a, f(a))$.

Por iso, a **ecuación** da recta **tanxente** á gráfica de f no punto $(a, f(a))$ é:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



FÍXATE

O cálculo da función derivada dunha función f simplifica o proceso de cálculo do valor da derivada de f en diferentes puntos. Así, para calcular $f'(0)$, $f'(-1)$ e $f'(2)$, bastará con substituír x por 0, -1 e 2 na función derivada f' .

Derivada da función suma	$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$
Derivada do produto dunha constante por unha función	$f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$
Derivada da función produto	$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
Derivada da función cociente	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
Derivada da función composta: regra da cadea	$f(x) = (g \circ h)(x) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

■ Táboa 2.

Combinando as regras da táboa 2 coas derivadas das funcións que aparecen na táboa 1, podemos derivar multitude de funcións.

EXEMPLO 9

Calcula a función derivada de $f(x) = x^2$ e a derivada desta función en $x = 0$, $x = -1$ e en $x = 2$.

— Aplicamos a fórmula da derivada dunha potencia:

$$f'(x) = 2x$$

— Substituímos x por 0, -1 e 2 na función derivada f' :

$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

EXEMPLO 10

Calcula a derivada das seguintes funcións:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ c) $q(x) = \cos 2x$

b) $p(x) = x^3 \cdot \cos x$ d) $m(x) = \sin^2 x$

a) Derivamos cada un dos sumandos:

$$f_1(x) = x^3 \Rightarrow f_1'(x) = 3x^2$$

$$f_2(x) = -2x^2 \Rightarrow f_2'(x) = -2 \cdot (x^2)' = -2 \cdot 2x = -4x$$

$$f_3(x) = 1 \Rightarrow f_3'(x) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

b) A función p é un produto de dúas funcións, x^3 e $\cos x$:

$$g(x) = x^3; g'(x) = 3x^2; h(x) = \cos x$$

$$h'(x) = -\sin x; p(x) = g(x) \cdot h(x)$$

$$p'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$p'(x) = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x)$$

$$p'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

c) A función q é a composición de dúas funcións, $2x$ e $\cos x$:

$$j(x) = 2x; j'(x) = 2; k(x) = \cos x; k'(x) = -\sin x$$

— Aplicamos a regra da cadea:

$$q(x) = (k \circ j)(x) = k(j(x))$$

$$q'(x) = k'(j(x)) \cdot j'(x) = -\sin 2x \cdot 2 = -2 \sin 2x$$

d) A función m é a composición de dúas funcións, $\sin x$ e x^2 , porque $\sin^2 x = (\sin x)^2$:

$$n(x) = \sin x; n'(x) = \cos x; r(x) = x^2; r'(x) = 2x$$

— Aplicamos a regra da cadea:

$$m(x) = r(n(x)); m'(x) = r'(n(x)) \cdot n'(x)$$

$$m'(x) = 2 \sin x (\cos x) = 2 \sin x \cos x$$

3.1. Derivada dunha función vectorial respecto dun escalar

Na física é moi común o traballo con vectores de V_3 que deben derivarse. Para iso, o primeiro é ter en conta que as regras de derivación son as mesmas, aínda que en ocasións a notación cambia para destacar a variable respecto da que se deriva.

Para calcular a derivada do vector $\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}$ con respecto do tempo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k})}{dt} = \frac{d(r_x\vec{i})}{dt} + \frac{d(r_y\vec{j})}{dt} + \frac{d(r_z\vec{k})}{dt}$$

Aplicamos a derivada da función produto e, como os vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ son constantes, obtemos:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dr_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dr_z(t)}{dt}\vec{k}$$

FÍXATE

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t)$$

EXEMPLO 11

Calcula a función derivada do vector $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = (5t^2 - 3t)\vec{i} + (7t^3 - 3)\vec{j} + (7t^2 + 9)\vec{k}$$

— Derivamos cada compoñente do vector:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dr_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dr_z(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (10t - 3)\vec{i} + 21t^2\vec{j} + 14t\vec{k}$$

EXEMPLO 12

Calcula a función derivada do vector $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = (4t \cdot \sin t)\vec{i} + (7t^2 - 8t + 9)\vec{j} + (-2t^3 + 7t + 10)\vec{k}$$

— Derivamos cada compoñente do vector:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t)$$

$$\vec{r}'(t) = (4 \sin t + 4t \cdot \cos t)\vec{i} + (14t - 8)\vec{j} + (-6t^2 + 7)\vec{k}$$

4. Cálculo integral

Acabamos de ver como obter a función derivada dunha función f . Agora formularémonos o problema inverso: dada unha función f , como determinar outra función F cunha derivada que sexa f . A función F recibe o nome de *primitiva* de f .



Unha función F é unha **primitiva** de f se e só se $F'(x) = f(x)$.

Por exemplo, se $f(x) = 3x^2$, unha primitiva de f sería $F(x) = x^3$, xa que $F'(x) = f(x)$. Pero fíxate en que $F_1(x) = x^3 - 3$, $F_2(x) = x^3 + 5$ e $F_3(x) = x^3 - 11$ tamén son primitivas de $f(x) = 3x^2$, xa que a derivada de todas elas é $3x^2$.

4.1. Integrais indefinidas

Xa vimos que unha función non ten unha única primitiva e que a diferenza entre dúas calquera é unha constante. O conxunto formado por todas as primitivas dunha función f recibe o nome de **integral indefinida** e denótase por:

$$\int f(x) dx$$

Esta expresión lese: *integral de f diferencial de x*.

Así, se F é unha primitiva de f , escribiremos:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é unha constante chamada **constante de integración**.

A partir da táboa 1 (páx. 13) podemos obter de xeito inmediato as seguintes integrais indefinidas:

$$\bullet \int 0 dx = C$$

$$\bullet \int k dx = kx + C$$

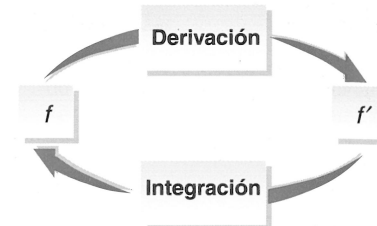
$$\bullet \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\bullet \int e^x dx = e^x + C$$

$$\bullet \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\bullet \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\bullet \int \cos x dx = \sin x + C$$



Propiedades das integrais indefinidas

Do comportamento da derivada respecto da suma de funcións e do produto dunha función por unha constante, obtéñense as seguintes propiedades das integrais indefinidas:

$$1. \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

EXEMPLO 13

Calcula as integrais indefinidas seguintes:

a) $\int x^3 dx$; b) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$; c) $\int 8x dx$; d) $\int (3x + e^x) dx$

$$a) \int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

$$b) \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$$

$$c) \int 8x dx = 8 \int x dx = 8 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 4x^2 + C$$

$$d) \int (3x + e^x) dx = \int 3x dx + \int e^x dx$$

$$\int 3x dx = 3 \int x dx = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{3x^2}{2} + C_1$$

$$\int e^x dx = e^x + C_2$$

$$\int (3x + e^x) dx = \frac{3x^2}{2} + e^x + C$$

4.2. Integrais definidas

Unha das aplicacións máis importantes das integrais é o cálculo da área baixo unha curva, é dicir, da área da superficie comprendida entre unha curva e o eixe de abscisas. A relación entre esta área e a integral da función que define a curva vén dada polo **teorema de Barrow**.

Se f é unha función continua e positiva en $[a, b]$ e F é unha primitiva de f , a **área** A , limitada pola curva $y = f(x)$, o eixe de abscisas e as rectas $x = a$ e $x = b$, é igual a $F(b) - F(a)$.

FÍXATE

Se $f(x) \leq 0$ en $[a, b]$, $F(b) - F(a)$ será negativa, e polo tanto, a área coincidirá co **valor absoluto** desta diferenza.

A diferenza $F(b) - F(a)$ recibe o nome de **integral definida** de f entre a e b , e denótase por $\int_a^b f(x) dx$.

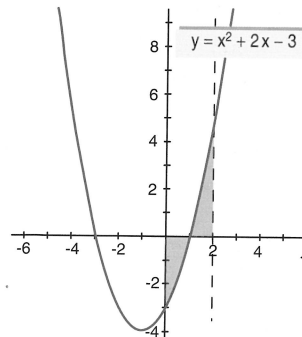
Con esta notación podemos escribir o resultado anterior do xeito seguinte:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

EXEMPLO 14

Calcula a área da superficie limitada pola curva $f(x) = x^2 + 2x - 3$, o eixe de abscisas e as rectas $x = 0$ e $x = 2$.

Se observamos a figura, vemos que $f(x)$ non ten signo constante no intervalo $[0, 2]$.



- No intervalo $[0, 1]$ a función é negativa.
- No intervalo $(1, 2]$ a función é positiva.

Polo tanto, debemos fraccionar o cálculo da área en dous subintervalos:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 (x^2 + 2x - 3) dx \right| + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx = \\ &= \left| \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right]_0^1 \right| + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right]_1^2 = \\ &= \left| \frac{-5}{3} \right| + \frac{7}{3} = \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

4.3. Integral dunha función vectorial respecto dun escalar

FÍXATE

Ao efectuar a integral indefinida dun vector de V_3 , obteremos tres constantes de integración, C_x , C_y e C_z , cada unha delas correspondente a unha das compoñentes do vector.

Do mesmo xeito que os vectores poden derivarse, tamén poden integrarse, sexa mediante unha integral indefinida ou mediante unha integral definida entre dous puntos.

O xeito de levalo a cabo coincide co xeito de derivalas: se se coñecen as compoñentes do vector, as compoñentes da integral son as integrais de cada unha delas na forma habitual.

Vexamos a integración do vector $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$ con respecto do tempo.

$$\vec{V}(t) = \vec{i} \int v_x(t) dt + \vec{j} \int v_y(t) dt + \vec{k} \int v_z(t) dt$$

EXEMPLO 15

Calcula o valor da integral, $\vec{A}$, entre $t = 1$ e $t = 4$, do vector $\vec{a}(t) = (3t - 3)\vec{i} + (6t^2 - 1)\vec{j} + 2\vec{k}$.

— Integramos cada compoñente do vector:

$$\begin{aligned} \int_1^4 (\vec{a}(t)) dt &= \int_1^4 ((3t - 3)\vec{i} + (6t^2 - 1)\vec{j} + 2\vec{k}) dt = \\ &= \vec{i} \int_1^4 (3t - 3) dt + \vec{j} \int_1^4 (6t^2 - 1) dt + \vec{k} \int_1^4 2 dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \vec{i} \left[\frac{3}{2}t^2 - 3t \right]_1^4 + \vec{j} \left[\frac{6}{3}t^3 - t \right]_1^4 + \vec{k} [2t]_1^4 = \\ &= \vec{i} [12 - (-1,5)] + \vec{j} [124 - 1] + \vec{k} [8 - 2] \\ \vec{A} &= 13,5\vec{i} + 123\vec{j} + 6\vec{k} \end{aligned}$$

5. Resolución de problemas

Un aspecto importante neste curso de Física é a resolución de problemas. Aínda que non existe un método universal para resolvelos, presentámosche un que che pode servir de pauta para moitos dos que debas resolver.

Comprensión do enunciado

Antes de abordar a resolución dun problema é imprescindible entender o seu enunciado.

- Le atentamente o enunciado e asegúrate de que entendes o que se explica e o que se pide.
- Anota os datos do problema e o que se pide concretamente.
- Cando sexa apropiado, debuxa un esquema da situación e anota nel os datos.

Planificación

Nesta fase tes que buscar unha forma de resolver o problema, xa sexa directamente ou a través dunha serie de pasos intermedios. Non perdas nunca de vista a onde queres chegar, é dicir, que se pregunta.

- Determina que leis físicas actúan e cales son as súas expresións matemáticas.
- Deseña un xeito de utilizar estes principios para, a partir dos datos que tes, encontrar o que se pide.
- En ocasións pode ser conveniente utilizar unha estratexia de resolución: resolución gráfica, ensaio-erro, razoamento inverso...

Execución

Agora debes resolver o problema empregando a estratexia que deseñaches.

- Simplifica as expresións matemáticas. Leva a cabo o maior número posible de manipulacións alxébricas antes de substituír polos valores reais.
- Comproba que as unidades estean todas no mesmo sistema e que sexan coherentes. Se é necesario, efectúa a conversión de unidades adecuada.
- Substitúe as cantidades dadas nas ecuacións e leva a cabo os cálculos. Dá o resultado coas unidades e o número de cifras significativas apropiadas.

Revisión do resultado

Finalmente, debes comprobar se a solución obtida coincide co que se pedía.

- Comproba se a resposta ten unha magnitude apropiada.
- Razona se o valor obtido é posible.

LEMBRA

Para coñecer a validez dun resultado experimental, debe determinarse o erro cometido ao efectuar a medida.

Erro absoluto:

$$E_a = |a - x|$$

E_a = erro absoluto

a = valor aproximado obtido na medición

x = valor verdadeiro ou exacto da medida

Erro relativo:

$$E_r = \frac{E_a}{x}$$

E_r = erro relativo

E_a = erro absoluto

x = valor verdadeiro ou exacto da medida

LEMBRA

Toda medida experimental presenta certo erro. Por iso, só expresaremos as medidas coas súas **cifras significativas**.

Son **significativas** todas as cifras dunha medida que se coñecen con certeza, mais unha dubidosa.

O **cero non é significativo** cando se utiliza para indicar a **situación da coma decimal**.

- Cando se **suman** ou **restan** cantidades, redondéase o resultado de xeito que teña o **mesmo número de cifras** despois da coma decimal que o número da serie que ten o **menor número** de cifras decimais.

- Cando se **multiplican** ou **dividen** cantidades, redondéase o resultado de xeito que teña o **mesmo número de cifras** significativas que o factor de **menor número** de cifras significativas.

MECÁNICA



Os seres humanos de todas as épocas deleitáronse contemplando o ceo estrelado, a ondada do mar, o voo das aves, o amencer e moitos outros aspectos da natureza. Entusiasmados por tanta beleza e estimulados pola curiosidade, desde os tempos máis remotos os humanos formuláronse multitude de preguntas para chegar a coñecer por que e como suceden os fenómenos naturais.

O científico non estuda a natureza porque sexa útil; estúdaa porque se deleita nela, e deleítase nela porque é fermosa. Se a natureza non fose bela, non valería a pena coñecela.

Henri Poincaré (1854-1912)

Unha das cuestións que lles interesaron aos científicos de todas as épocas é o coñecemento das forzas que interveñen nas diversas formas naturais de movemento.

Na Antigüidade, o filósofo grego **Aristóteles** (384-322 a. C.) propuxo unha mecánica que intentaba xustificar o movemento dos corpos pola existencia de catro elementos fundamentais na materia: a terra, a auga, o aire e o lume. Se estes elementos se deixan libres, moveranse cara ao seu lugar natural no cosmos. A terra ocupa o centro, a auga atópase por

encima desta, o aire por encima da auga e o lume por encima de todos. Así, unha rocha cae cando se suspende no aire, as burbullas de aire na auga móvense cara a arriba e unha rocha pesada cae máis rapidamente ca outra máis lixeira porque tende con máis forza ao seu lugar natural. Na Terra, os corpos en repouso só poden moverse se actúa sobre eles unha forza externa; non obstante, os corpos celestes, coma o Sol, os planetas e as estrelas, están sometidos a outras leis naturais distintas, son mantidos no espazo por esferas transparentes de cristal e móvense sen necesidade de forzas que actúen sobre eles.

Ao mesmo tempo, os nosos antepasados, os sabios exipcios, gregos e os doutras culturas, idearon máquinas que acrecentaban a forza humana ou permitían un mellor uso dela. Nesta tarefa destacaron célebres personaxes, como **Estratón, Arquímedes** (287-212 a. C.), a quen debemos as primeiras leis da estática, e **Herón de Alexandria**.

A visión aristotélica sobre a dinámica do Universo mantívose practicamente inalterada durante moitos séculos. Aristóteles era a última palabra en ciencia. Durante os 15 primeiros séculos da nosa era realizáronse moi poucos progresos en física, e particularmente en dinámica.

O filósofo francés **J. Buridan** (1300-1385) modificou a teoría de Aristóteles para explicar a causa do movemento dos proxectís. Segundo Aristóteles, un obxecto en movemento necesita a acción dunha forza impulsora en todo momento: o *impetus*. Pola contra, Buridan defendía que o ímpeto inicial é suficiente e que o seu efecto se mantén indefinidamente sen necesidade de que a forza continúe actuando. Ao longo dos séculos xv e xvi a *teoría do impetus* foi obxecto de modificacións, ao tempo que nacía a preocupación por dotar a física dunha formulación matemática adecuada e se cuestionaban as ideas aristotélicas.

A finais do Renacemento, xurdiu unha das figuras míticas da historia da física, o astrónomo e físico italiano **Galileo Galilei** (1564-1642), que pode considerarse o iniciador da ciencia da *dinámica*. Galileo dedicoulle a súa atención a temas moi variados. Destaca o seu interese pola experimentación como método habitual de traballo e pola formulación matemática dos fenómenos científicos («A natureza está escrita en linguaxe matemática», afirmou Galileo). Son célebres os seus estudos sobre a caída libre, o movemento do péndulo e o movemento dos proxectís. Resolveu este último problema baseándose no principio de inercia,

a combinación dos movementos e a independencia dos efectos das forzas. En contra das ideas de Aristóteles de que un corpo se detén se non actúa algunha forza sobre el, Galileo sostivo que, ao que un corpo está en movemento, seguirá movéndose ata que unha forza o deteña.

Galileo non chegou a identificar a natureza da forza da gravidade, tarefa que correspondeu a Newton. No seu *Diálogo sobre os dous máximos sistemas do mundo* (1632), podemos ler este diálogo:

Simplicio. —A causa do movemento descendente de todas as partes da Terra, como se sabe ben, é a gravidade.

Salviati. —Equivócaste, Simplicio. O que deberías dicir é: ninguén ignora que esa causa recibe o nome de gravidade. Pero non che estou preguntando o nome, senón a esencia desa cousa.

Excepto o nome imposto á cousa, e que se fixo familiar polo uso, non comprendemos nada da cousa, nin da virtude que fai baixar unha pedra, nin da que empuxa unha pedra proxectada cara a arriba, nin da que move a Lúa na súa órbita.

O astrónomo alemán **J. Kepler** (1571-1630) seguiu a doutrina de **Copérnico** (1473-1543), quen explicou de forma máis simple o movemento dos planetas, ao supoñer que estes, incluída a Terra, daban voltas ao redor do Sol, fronte á hipótese de **Ptolomeo** (século II) e **Hiparco** (190-120 a. C.) de que o Sol e os planetas xiraban ao redor da Terra. Kepler, a partir das observacións do astrónomo danés **T. Brahe** (1546-1601), enunciou as súas célebres leis quizais sen decatarse da súa auténtica importancia. Pode dicirse que a concepción dinámica de Kepler estaba a medio camiño entre Galileo e Newton, achegándose ao descubrimento das forzas gravitacionais.

O científico e matemático inglés **I. Newton** (1642-1727), considerado

A natureza e as súas leis permanecían ocultas na noite. Deus dixo: «Que se faga Newton!». E fíxose a luz.

Alexander Pope (1688-1744), poeta

como un dos máis prestixiosos científicos de todos os tempos, continuou o traballo de Kepler, Galileo e outros científicos da época.

É célebre a súa obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), na que presenta as leis dinámicas fundamentais que gobernan o movemento dos corpos, describe a intervención das forzas no movemento e enuncia a súa teoría sobre a natureza das forzas gravitacionais. Aclara ademais conceptos como o peso, a inercia, a forza de rozamento, o impulso, a cantidade de movemento, a forza centrípeta...

Como para Galileo, para Newton as matemáticas son a linguaxe da física. Mediante esta linguaxe expresou as leis xerais do movemento e da gravitación universal.

Quixera poder deducir (...) os fenómenos da natureza de principios mecánicos porque (...) poden depender de certas forzas polas que as partículas dos corpos, por algunha causa aínda descoñecida, son impulsados (...). Os filósofos intentaron en van ata agora a investigación da natureza pero espero que os principios aquí formulados dean algunha luz.

Newton (1642-1727)

Newton propuxo unha interpretación mecanicista dos fenómenos físicos que dominaron o pensamento científico ata principios do século xx, cando irromperon no mundo da física a *teoría da relatividade* e a *teoría cuántica*.

Na Antigüidade, os seres humanos xa contemplaban coa mesma curiosidade que hoxe as ondas formadas

na superficie da auga ao lanzar sobre ela unha pedra e como unha folla de árbore situada nesa superficie vibra ao paso da onda sen cambiar practicamente de posición. Pero os fenómenos ondulatorios, como os denominamos, tan frecuentes na natureza, só foron debidamente interpretados e formulados a partir do século xvii.

Por outra parte, é comunmente observado que moitos obxectos vibran, como sucede ao pulsar unha corda tensa ou ao golpear unha lámina metálica. Xa advertira o matemático grego **Euclides** (século III a. C.) que estas vibracións, transmitidas ao aire, son a orixe do son.

Hoxe en día coñecemos a íntima relación que existe entre os fenómenos de vibración e os movementos ondulatorios. As ondas sonoras, as ondas luminosas, as ondas en cordas, as ondas sísmicas, as ondas na auga... teñen a súa orixe nalguna fonte de vibración. A noción de onda e a de propagación dun fenómeno mediante un movemento ondulatorio foron tomando corpo lentamente. O físico e astrónomo holandés **Ch. Huygens** (1629-1695) no seu *Tratado da luz* (1690) expón estes conceptos que xa propuxeran dalgún xeito outros científicos anteriores.

Durante o século xviii fixéronse medidas precisas da velocidade do son no aire, nos líquidos e nos sólidos. Por entón, a natureza ondulatoria do son quedaba suficientemente aclarada como para orientar a investigación cara a temas de maior complexidade, como os fenómenos de difracción, superposición e interferencia, as ondas estacionarias, a resonancia, a percepción do son polo oído humano, a medida da intensidade sonora... Estas cuestións, xunto co seu tratamento matemático, abordáronse durante os séculos xix e xx, e chegaron a constituír unha nova ciencia, a *acústica*.

1 Dinámica de translación e de rotación



«Dádeme un punto fixo e moverei o mundo.»
Arquímedes de Siracusa

Os científicos teñen observado a imposibilidade de encontrar na natureza algo que non se mova. Aínda que ás veces non o pareza, móvese todo: o Sol, a Terra, os electróns, os fotóns...

O estudo do movemento sen ter en conta as causas que o producen (cinemática) ou téndoas en conta (dinámica) converteuse nun estudo de primeira necesidade.

OBXECTIVOS

Ao final desta unidade serás quen de:

- Coñecer o método matemático de describir os movementos que se producen na natureza.
- Identificar as causas do movemento e explicar de que xeito inflúen sobre el.
- Comprender a importancia do movemento de rotación e a utilidade do seu coñecemento físico.
- Valorar as aplicacións da física na vida diaria e noutros ámbitos da ciencia e da enxeñaría.

CONTIDOS

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. Descrición do movemento | 1.1. Magnitudes do movemento
1.2. Estudo dalgúns movementos |
| 2. Causas do movemento | 2.1. Leis de Newton
2.2. Aplicacións das leis de Newton |
| 3. Movemento de rotación | 3.1. Momento de inercia
3.2. Momento cinético ou angular |

PREPARACIÓN DA UNIDADE

Lembra

- A **forza resultante**, $\vec{R}$, dun sistema de forzas que actúa sobre un corpo é a suma vectorial de todas as forzas do sistema.
- A **forza normal**, $\vec{N}$, é a que exerce a superficie de apoio dun corpo sobre el. É unha forza de reacción á que o corpo exerce sobre a superficie.
- A **forza de rozamento**, $\vec{F}_r$, é a forza que aparece na superficie de contacto dos corpos, opoñéndose ao movemento destes.

Forzas de rozamento sobre corpos en movemento

O módulo da forza de rozamento é proporcional á forza normal que actúa sobre o corpo.

$$|\vec{F}_r| = \mu_c N$$

A súa dirección é paralela á superficie de esvaramento e o seu sentido é contrario á velocidade.

Forzas de rozamento sobre corpos en repouso

O módulo da forza de rozamento ten exactamente o mesmo valor que a compoñente tanxencial da forza $\vec{F}$ aplicada ao corpo. Ao aumentar esta compoñente, tamén aumenta a forza de rozamento, ata un valor máximo:

$$|\vec{F}_r| = \mu_e N$$

A súa dirección é paralela á superficie de contacto e o seu sentido, contrario á compoñente tanxencial da forza $\vec{F}$.

- O **peso** dun corpo é a forza con que a Terra o atrae. É un vector dirixido cara ao centro da Terra e de módulo $|\vec{p}| = mg$.

Actividades

- Explica a diferenza entre magnitudes escalares e magnitudes vectoriais. Pon exemplos dos dous tipos de magnitudes.
- Efectúa as seguintes derivadas:
a) $\frac{d(5t)}{dt}$ b) $\frac{d(3t^2)}{dt}$ c) $\frac{d(2t^3)}{dt}$
d) $\frac{d(3t^2 - 4t + 1)}{dt}$ e) $\frac{d(t^3 + 8t^2 - 3)}{dt}$
- Explica a diferenza entre un movemento de translación e un movemento de rotación.
- Representa graficamente as seguintes forzas e calcula a súa resultante:

$$\vec{F}_1 = (7\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = (-6\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ N}$$

- Un móbil puntual móvese ao longo dunha traxectoria circular de raio $R = 40$ cm de xeito que o ángulo percorrido en cada momento é $\phi = 2t + 0,5t^2$, en unidades SI. Calcula: a) a súa velocidade e a súa aceleración angulares; b) a súa velocidade lineal e a súa aceleración tanxencial; c) a súa aceleración normal e a súa aceleración total para $t = 5$ s.

1. Descripción do movement

Ás veces resulta difícil saber se un corpo está en movement ou non. Así, imaxina que Ana e Berta viaxan en autobús mentres os seus amigos Carlos e Daniel as saúdan desde a rúa. Desde o punto de vista de Ana, Carlos parecerá moverse, en cambio Berta estará en repouso. Pero para Daniel, Carlos permanece en repouso e Berta está en movement.

FÍXATE

Móbil: corpo en movemento respecto dun determinado sistema de referencia.

Para saber se un corpo está en movement ou non e, se o está, determinar que tipo de movement describe, necesitamos fixar un *sistema de referencia*.

Un **sistema de referencia** é un punto ou un conxunto de puntos respecto do cal describimos o movement dun corpo.

Un obxecto atópase en **movement** con respecto dun determinado sistema de referencia cando a súa **posición** respecto deste sistema **varía co tempo**; en **caso contrario**, dicimos que está en **repouso**.

1.1. Magnitudes do movement

No estudo de calquera movement é necesario definir previamente as magnitudes *traxectoria*, *posición*, *desprazamento*, *velocidade* e *aceleración*.

Vector de posición, $\vec{r}$: vector que vai da orixe de coordenadas O ao punto P onde está o móbil.

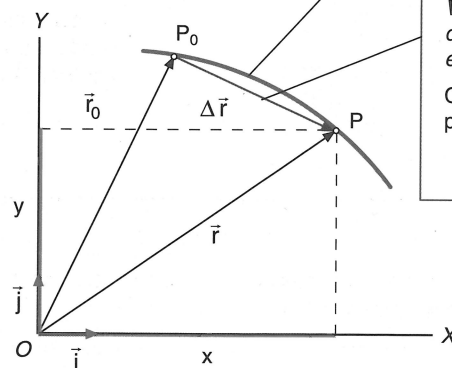
En xeral, varía co tempo, $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Traxectoria: curva descrita polos puntos polos que pasou o móbil.

Vector desprazamento, $\Delta\vec{r}$, entre dous puntos P_0 e P: vector con orixe en P_0 e extremo en P.

Calcúlase restándolle ao vector de posición $\vec{r}$ o vector de posición $\vec{r}_0$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$$



Ecuación do movement: describe a posición do móbil ao longo do tempo.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

$x(t)$ e $y(t)$ son as ecuacións paramétricas da traxectoria.

EXEMPLO 1

O vector de posición dun móbil é $\vec{r}(t) = 5t\vec{i} - 3t^2\vec{j}$, en unidades SI. Determina: a) a posición do móbil nos instantes $t = 2$ s e $t = 5$ s; b) o vector desprazamento entre os instantes $t = 2$ s e $t = 5$ s, e o seu módulo; c) a ecuación da traxectoria, débuxaa aproximadamente.

— Datos: $\vec{r}(t) = 5t\vec{i} - 3t^2\vec{j}$, en unidades SI

a) Os vectores de posición obtéñense substituíndo o valor correspondente de t na expresión de $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(2s) = 5 \cdot 2\vec{i} - 3 \cdot 2^2\vec{j} = (10\vec{i} - 12\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{r}(5s) = 5 \cdot 5\vec{i} - 3 \cdot 5^2\vec{j} = (25\vec{i} - 75\vec{j})\text{m}$$

b) Para calcular o vector desprazamento entre os instantes $t = 2$ s e $t = 5$ s, restamos os vectores de posición neses instantes:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(5s) - \vec{r}(2s)$$

$$\Delta\vec{r} = (25\vec{i} - 75\vec{j})\text{m} - (10\vec{i} - 12\vec{j})\text{m} = (15\vec{i} - 63\vec{j})\text{m}$$

O seu módulo é:

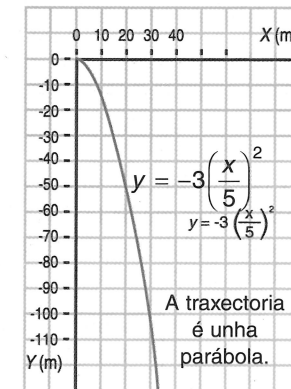
$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(15\text{ m})^2 + (-63\text{ m})^2} = 64,8\text{ m}$$

c) Determinamos a ecuación da traxectoria a partir das ecuacións paramétricas do movement:

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 3t^2 \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{5}$$

$$y = -3\left(\frac{x}{5}\right)^2 = -3\frac{x^2}{25}$$



EXEMPLO 2

O vector de posición dun móbil é $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (6t + 5)\vec{j}$, en unidades SI. Determina: a) a ecuación da traxectoria; b) o vector desprazamento entre os instantes $t = 1$ s e $t = 4$ s, e o seu módulo; c) a distancia percorrida polo móbil.

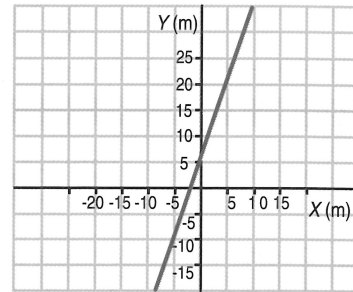
— Datos: $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (6t + 5)\vec{j}$, en unidades SI

a) Determinamos a ecuación da traxectoria a partir das ecuacións paramétricas do movement:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 6t + 5 \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{2}$$

$$y = 3x + 5$$



■ A traxectoria é unha recta.

b) Para calcular o vector desprazamento entre os instantes $t = 1$ s e $t = 4$ s, restamos os vectores de posición neses instantes:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(4s) - \vec{r}(1s)$$

$$\Delta\vec{r} = (2 \cdot 4\vec{i} + (6 \cdot 4 + 5)\vec{j}) - (2 \cdot 1\vec{i} + (6 \cdot 1 + 5)\vec{j})$$

$$\Delta\vec{r} = (6\vec{i} + 18\vec{j})\text{m}$$

O módulo do vector desprazamento é:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(6\text{ m})^2 + (18\text{ m})^2} = 19,0\text{ m}$$

c) A distancia percorrida polo móbil coincide co módulo do vector desprazamento porque a traxectoria é rectilínea:

$$\Delta s = |\Delta\vec{r}| = 19,0\text{ m}$$

ACTIVIDADES

1. Debuxa un sistema de referencia nunha dimensión, outro en dúas e un terceiro en tres dimensións, e representa sobre eles a posición dun punto.

2. O vector de posición dun móbil vén dado pola expresión $\vec{r}(t) = (4t + 2)\vec{i} + (t^2 - 2t)\vec{j}$, en unidades SI. Determina:

- A posición do móbil para $t = 1$ s e para $t = 3$ s.
- O vector desprazamento entre estes instantes e o seu módulo.
- A ecuación da traxectoria.

Sol.: a) $(6\vec{i} - \vec{j})\text{ m}$, $(14\vec{i} + 3\vec{j})\text{ m}$;

b) $(8\vec{i} + 4\vec{j})\text{ m}$, 8,9 m; c) $y = (x^2 - 12x + 20) / 16$

3. O vector de posición dun móbil vén dado pola expresión $\vec{r}(t) = (t - 3)\vec{i} + 8t\vec{j}$, en unidades SI.

- Determina a ecuación da traxectoria e debuxa esta última aproximadamente entre $t = 0$ s e $t = 10$ s.
- Determina os vectores de posición para $t = 2$ s e $t = 5$ s.
- Calcula o vector desprazamento entre estes instantes.
- Calcula a distancia percorrida.

Sol.: a) $y = 8x + 24$;

b) $(-\vec{i} + 16\vec{j})\text{ m}$, $(2\vec{i} + 40\vec{j})\text{ m}$;

c) $(3\vec{i} + 24\vec{j})\text{ m}$; d) 24,2 m

Velocidade

Vector velocidade media

É o cociente entre o vector desprazamento, $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, e o intervalo de tempo transcorrido, $\Delta t = t - t_0$.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{(t - t_0)}$$

Vector velocidade instantánea

É o vector ao que tende o vector velocidade media cando o intervalo de tempo transcorrido, Δt , tende a cero ($\Delta t \rightarrow 0$). É dicir, é a derivada do vector de posición respecto do tempo.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

A unidade da velocidade no SI é o metro por segundo (m/s).

EXEMPLO 3

O vector de posición dun móbil é $\vec{r}(t) = (t^2 - 2)\vec{i} + 5t\vec{j}$, en unidades SI. Determina:

- O vector velocidade media entre $t = 0$ s e $t = 2$ s.
- O vector velocidade instantánea en función do tempo.

— Datos: $\vec{r}(t) = (t^2 - 2)\vec{i} + 5t\vec{j}$, en unidades SI

- Calculamos os vectores de posición en $t = 0$ s e $t = 2$ s:

$$\vec{r}(0s) = (0^2 - 2)\vec{i} + 5 \cdot 0\vec{j} = -2\vec{i} \text{ m}$$

$$\vec{r}(2s) = (2^2 - 2)\vec{i} + 5 \cdot 2\vec{j} = (2\vec{i} + 10\vec{j}) \text{ m}$$

Aplicamos a definición do vector velocidade media:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} = \frac{\vec{r}(2s) - \vec{r}(0s)}{(2s - 0s)} = \frac{(2\vec{i} + 10\vec{j}) - (-2\vec{i})}{2s}$$

$$\vec{v}_m = \frac{(4\vec{i} + 10\vec{j}) \text{ m}}{2s} = (2\vec{i} + 5\vec{j}) \text{ m/s}$$

- Para obter a velocidade instantánea derivamos o vector de posición:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (2t\vec{i} + 5\vec{j}), \text{ en unidades SI}$$

Aceleración

Vector aceleración media

É o cociente entre a variación do vector velocidade instantánea, $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, e o intervalo de tempo transcorrido, $\Delta t = t - t_0$.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{(\vec{v} - \vec{v}_0)}{(t - t_0)}$$

Vector aceleración instantánea

É o vector ao que tende o vector aceleración media cando o intervalo de tempo transcorrido, Δt , tende a cero ($\Delta t \rightarrow 0$). É dicir, é a derivada do vector velocidade respecto do tempo.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

A unidade da aceleración no SI é o metro por segundo ao cadrado (m/s²).

EXEMPLO 4

A velocidade dun móbil é $\vec{v}(t) = 6t\vec{i} - (t + 2)\vec{j}$, en unidades SI. Determina:

- O vector aceleración media entre $t = 0$ s e $t = 3$ s.
- O vector aceleración instantánea en función do tempo.

— Datos: $\vec{v}(t) = 6t\vec{i} - (t + 2)\vec{j}$, en unidades SI

- Calculamos os vectores velocidade en $t = 0$ s e $t = 3$ s:

$$\vec{v}(0s) = 6 \cdot 0\vec{i} - (0 + 2)\vec{j} = -2\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}(3s) = 6 \cdot 3\vec{i} - (3 + 2)\vec{j} = (18\vec{i} - 5\vec{j}) \text{ m/s}$$

Aplicamos a definición do vector aceleración media:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\vec{v}(3s) - \vec{v}(0s)}{3s - 0s} = (6\vec{i} - \vec{j}) \text{ m/s}^2$$

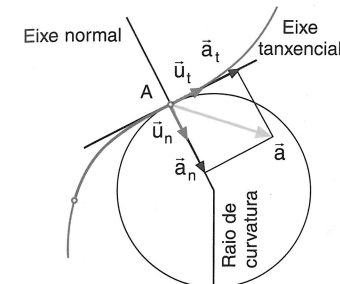
- Para obter a aceleración instantánea derivamos o vector velocidade:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (6\vec{i} - \vec{j}) \text{ m/s}^2$$

Compoñentes intrínsecas da aceleración

Compoñente tanxencial: expresa a variación do módulo da velocidade.

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Rightarrow \vec{a} = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n$$

Compoñente normal: expresa a variación da dirección da velocidade.

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

EXEMPLO 5

Un automóbil toma unha curva de 142 m de raio cunha velocidade que ten un módulo que aumenta no tempo segundo a ecuación $v(t) = 2,5t + 5$, en unidades SI. Calcula a aceleración tanxencial e a aceleración normal no instante $t = 3$ s.

— Datos: $R = 142$ m $v(t) = 2,5t + 5$, en unidades SI

— A aceleración tanxencial é a derivada do módulo da velocidade:

$$a_t = \frac{dv(t)}{dt} = 2,5 \text{ m/s}^2. \text{ Non varía co tempo.}$$

— Determinamos o módulo da velocidade e a aceleración normal en $t = 3$ s.

$$v(3s) = 2,5 \cdot 3 + 5 = 12,5 \text{ m/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(12,5 \text{ m/s})^2}{142 \text{ m}} = 1,1 \text{ m/s}^2$$

Dedución da velocidade e do vector de posición

Se coñecemos o vector aceleración e as condicións iniciais do movemento, podemos determinar a velocidade; e tras coñecela, determinar o vector de posición.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a} dt \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} dt$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v} dt \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt$$

EXEMPLO 6

A aceleración dun movemento rectilíneo vén dada pola ecuación $\vec{a} = 2t\vec{i}$. Calcula as ecuacións da velocidade e da posición en función do tempo, sabendo que no instante inicial $\vec{v}_0 = -\vec{i}$ m/s e $\vec{r}_0 = 6\vec{i}$ m.

— Datos: $\vec{a} = 2t\vec{i}$; $\vec{v}_0 = -\vec{i}$ m/s; $\vec{r}_0 = 6\vec{i}$ m

— Integraremos a ecuación da aceleración para obter a velocidade:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} dt = -\vec{i} + \int_0^t 2t\vec{i} dt = \left(-1 + 2 \frac{t^2}{2}\right)\vec{i}$$

A ecuación da velocidade é $\vec{v}(t) = (t^2 - 1)\vec{i}$, en unidades SI.

— Integraremos a ecuación da velocidade para obter a ecuación da posición:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt = 6\vec{i} + \int_0^t (t^2 - 1)\vec{i} dt = \left(6 + \frac{t^3}{3} - t\right)\vec{i}$$

A ecuación do vector de posición é:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3} - t + 6\right)\vec{i}, \text{ en unidades SI}$$

ACTIVIDADES

4. Lembra o concepto de celeridade e defíneo.

5. Di se o vector velocidade ten unha compoñente tanxencial e unha compoñente normal. Razoa a túa resposta.

6. O vector de posición dun móbil é $\vec{r}(t) = 2t^3\vec{i} + t^2\vec{j}$, en unidades SI. Calcula: a) a velocidade media entre os instantes $t = 0$ s e $t = 3$ s; b) a velocidade instantánea; c) a aceleración media entre os instantes $t = 0$ s e $t = 3$ s; d) a aceleración instantánea; e) a velocidade e a aceleración no instante $t = 1$ s.

Sol.: a) $(18\vec{i} + 3\vec{j})$ m/s; b) $(6t^2\vec{i} + 2t\vec{j})$ m/s; c) $(18\vec{i} + 2\vec{j})$ m/s²; d) $(12t\vec{i} + 2\vec{j})$ m/s²; e) $(6\vec{i} + 2\vec{j})$ m/s, $(12\vec{i} + 2\vec{j})$ m/s²

7. Dado o vector velocidade $\vec{v}(t) = 3t\vec{i} + t\vec{j}$, en unidades SI, calcula: a) o vector aceleración instantánea para $t = 2$ s e o seu módulo; b) a compoñente tanxencial e a normal da aceleración en $t = 2$ s.

Sol.: a) $(3\vec{i} + \vec{j})$ m/s², $\sqrt{10}$ m/s²; b) $\sqrt{10}$ m/s², 0 m/s²

8. A aceleración dun movemento rectilíneo vén dada pola ecuación $\vec{a} = 3t\vec{i}$. Calcula as ecuacións da velocidade e da posición en función do tempo, sabendo que no instante inicial $\vec{v}_0 = 0,5\vec{i}$ m/s e $\vec{r}_0 = 4\vec{i}$ m.

Sol.: $\vec{v}(t) = \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)\vec{i}$ m/s; $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t}{2} + 4\right)\vec{i}$ m

LEMBRA

Repasa o cálculo das integrais definidas en *Ferramentas matemáticas* (páx. 18).

1.2. Estudo dalgúns movementos

Dependendo da traxectoria que describe o móbil distinguimos diversos tipos de movementos. Imos estudar os máis sinxelos.

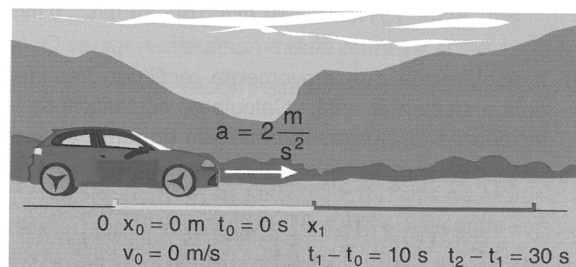
Movementos rectilíneos

No estudo destes movementos tomaremos o eixe OX na dirección do movemento. Así, os vectores $\vec{a}$, $\vec{v}$ e $\vec{r}$ terán unha soa compoñente e expresáremoslos en forma escalar.

	Movemento rectilíneo uniforme (MRU)	Movemento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)
Descrición	É aquel en que un móbil se despraza sobre unha traxectoria rectilínea mantendo a velocidade constante .	É aquel en que un móbil se despraza sobre unha traxectoria rectilínea mantendo a aceleración constante .
Aceleración	$a = 0$	$a = \text{constante}$
Ecuación da velocidade	$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt = v_0 + 0$ $v = v_0 = \text{constante}$	$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt$ $v = v_0 + a(t - t_0)$
Ecuación da posición	$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt$ $x = x_0 + v(t - t_0)$	$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt$ $x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$
Gráficas		

EXEMPLO 7

Un automóbil parte do repouso cunha aceleración de 2 m/s^2 , que mantén durante 10 s. Despois, mantén a velocidade constante durante medio minuto. Calcula a distancia total percorrida.



Primeira etapa: MRUA. Determinamos a posición e a velocidade ao final desta etapa:

$$x_1 = x_0 + v_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2} a(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10 \text{ s})^2 = 100 \text{ m}$$

$$v_1 = v_0 + a(t_1 - t_0) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ s} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Segunda etapa: MRU. Establecemos a posición final do automóbil, que coincide coa distancia total percorrida:

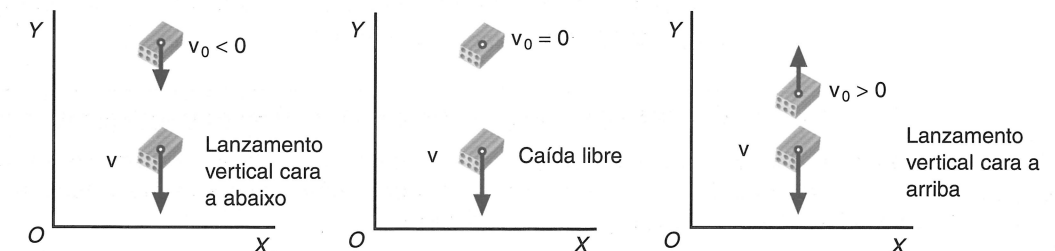
$$x_2 = x_1 + v_1(t_2 - t_1) = 100 \text{ m} + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 30 \text{ s} = 700 \text{ m}$$

Movementos rectilíneos

É un movemento rectilíneo uniformemente acelerado, cunha aceleración constante que é a da gravidade, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. As ecuacións deste movemento para o sistema de referencia da figura son as do MRUA para unha compoñente negativa da aceleración $a = -g$:

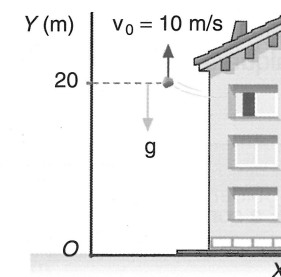
$$y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 \quad v = v_0 - g(t - t_0)$$

Segundo o valor de v_0 podemos ter tres casos:



EXEMPLO 8

Desde unha fiestra que está a 20 m do chan lánzase verticalmente cara a arriba unha pedra cunha velocidade de 10 m/s. Calcula: a) a altura máxima que alcanza e o tempo que tarda en alcanzala; b) o tempo total que está no aire.



As ecuacións do movemento da pedra son:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2; y = 20 \text{ m} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

$$v = v_0 - g t; v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t$$

a) No instante en que a pedra alcanza a altura máxima, a súa velocidade é cero:

$$0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t \Rightarrow t = 1,02 \text{ s}$$

Para determinar a altura máxima substituímos este valor do tempo na ecuación da posición:

$$y = 20 \text{ m} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,02 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1,02 \text{ s})^2 = 25,1 \text{ m}$$

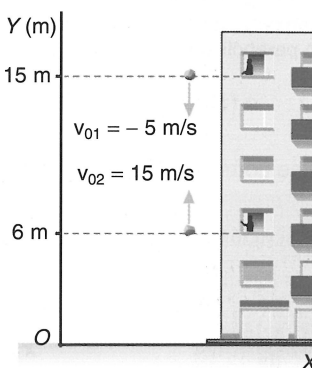
b) A pedra está no aire ata que chega ao chan. Nese momento, $y = 0$.

$$0 = 20 \text{ m} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

A solución positiva da ecuación é $t = 3,28 \text{ s}$.

EXEMPLO 9

Desde unha fiestra dun quinto piso lánzase unha pedra verticalmente cara a abaixo cunha velocidade de 5 m/s. Ao mesmo tempo, lánzase outra pedra desde o segundo piso na mesma vertical e cara a arriba cunha velocidade de 15 m/s. Se cada piso ten unha altura de 3 m, calcula en que momento e a que altura se encontran as dúas pedras.



As ecuacións da posición para cada pedra son:

$$y_1 = y_{01} + v_{01} t - \frac{1}{2} g t^2; y_1 = 15 \text{ m} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

$$y_2 = y_{02} + v_{02} t - \frac{1}{2} g t^2; y_2 = 6 \text{ m} + 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

Ambas as pedras encontraranse cando as súas posicións coincidan:

$$y_1 = y_2$$

$$15 - 5t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 t^2 = 6 + 15t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 t^2; 15 - 5t = 6 + 15t$$

De onde resulta $t = 0,45 \text{ s}$.

Para calcular a que altura se encontran, substituímos este valor de t na ecuación dunha das pedras:

$$y_1 = 15 \text{ m} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,45 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0,45 \text{ s})^2 = 11,8 \text{ m}$$

ACTIVIDADES

9. Unha moto arrinca nunha pista rectilínea cunha aceleración de 3 m/s^2 , que mantén durante 25 s. Deseguido conserva a velocidade adquirida durante 1 min. Calcula a distancia total percorrida.

Sol.: 5 437,5 m

10. Déixase caer unha bóla desde unha altura de 200 m. Calcula: a) o tempo que tarda en chegar ao chan; b) a velocidade nese momento; c) a velocidade aos 2 s de deixala caer.

Sol.: a) 6,4 s; b) 62,7 m/s; c) 19,6 m/s

Composición de movimientos

Na natureza existen movementos en dúas dimensións, que son a combinación de dous movementos simples. Para estudar estes movementos compostos debemos:

- Distinguir claramente a natureza de cada un dos movementos simples compoñentes.
- Aplicar a cada movemento compoñente as súas propias ecuacións.
- Calcular as ecuacións do movemento composto sabendo que:
 - O vector de posición do móbil obtense sumando vectorialmente os vectores de posición dos movementos compoñentes, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. O seu módulo é $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
 - A velocidade obtense sumando vectorialmente os vectores velocidade dos movementos compoñentes $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$. O módulo é $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.
- O tempo empregado no movemento composto é igual ao tempo empregado en calquera dos movementos compoñentes.

FÍXATE

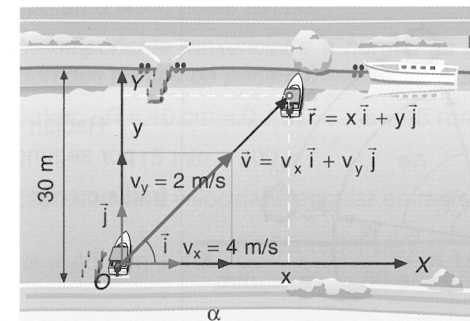
Lanzamento horizontal: movemento parabólico coa $a = 0$ ($v_{0y} = 0$).

	Composición de dous MRU perpendiculares	Movemento parabólico
Descrición	É a composición dun MRU sobre o eixe X e outro MRU sobre o eixe Y.	É a composición dun MRU sobre o eixe X e un MRUA coa aceleración da gravidade, $a = -g$, sobre o eixe Y.
Ecuacións da posición e da velocidade	Eixe X: MRU $x = x_0 + v_x(t - t_0)$ Eixe Y: MRU $y = y_0 + v_y(t - t_0)$	Eixe X: MRU $x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$; $v_x = v_{0x} = \text{constante}$ Eixe Y: MRUA $y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$ $v_y = v_{0y} - g(t - t_0)$ Onde $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$; $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$
Ecuación da traxectoria	Despexamos $t - t_0$ na ecuación de x e substituímos o seu valor na ecuación de y : $t - t_0 = \frac{x - x_0}{v_x}$; $y = y_0 + \frac{v_y}{v_x}(x - x_0)$ $y = y_0 + k(x - x_0)$	Despexamos $t - t_0$ na ecuación de x e substituímos o seu valor na ecuación de y : $t - t_0 = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$; $y = y_0 + \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} (x - x_0)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} (x - x_0)$ $y = y_0 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2$
Gráfica da traxectoria	Movemento dunha barca sometida á corrente dun río.	Lanzamento dun proxectil cun certo ángulo de inclinación.

EXEMPLO 10

Unha barca cruza un río de 30 m de anchura. Se a velocidade da corrente é de 4 m/s e a barca desenvolve unha velocidade de 2 m/s perpendicular á corrente, calcula:

- O tempo que tarda a barca en cruzar o río.
- A distancia que percorre.
- A ecuación da súa traxectoria.



- Determinamos o tempo que tarda a barca en cruzar o río a partir da ecuación da coordenada y :

$$y = v_y t; \quad t = \frac{y}{v_y} = \frac{30 \text{ m}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 15 \text{ s}$$

- Calculamos o desprazamento da barca debido á corrente:

$$x = v_x t; \quad x = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15 \text{ s} = 60 \text{ m}$$

O desprazamento perpendicular á corrente é $y = 30 \text{ m}$. Polo tanto, a distancia percorrida é:

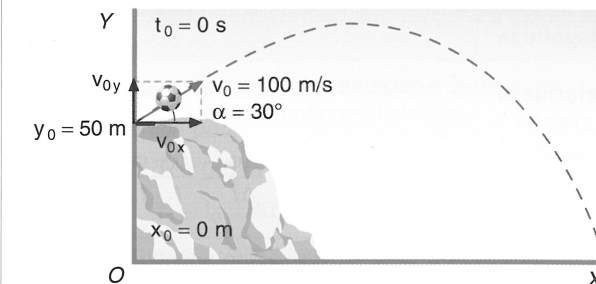
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(60 \text{ m})^2 + (30 \text{ m})^2} = 67,1 \text{ m}$$

- Para determinar a ecuación da traxectoria despeixamos o tempo da coordenada x e substituímos na coordenada y :

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{4} \\ y = 2 \cdot \frac{x}{4} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

EXEMPLO 11

Lánzase un balón desde un montículo de 50 m de altura, cunha velocidade de 100 m/s que forma un ángulo de 30° coa horizontal. Calcula: a) a altura máxima; b) o tempo de movemento e o alcance.



Calculamos as compoñentes da velocidade inicial:

$$v_{0x} = 100 \cos 30^\circ = 86,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad v_{0y} = 100 \sin 30^\circ = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- No punto de altura máxima cúmprese que $v_y = 0$:

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ t &= \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{50 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 5,1 \text{ s} \end{aligned}$$

Para determinar a altura máxima substituímos este valor de t na ecuación da coordenada y :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ y_{\text{max}} &= 50 \text{ m} + 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5,1 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5,1 \text{ s})^2 = 177,5 \text{ m} \end{aligned}$$

- Cando o balón chega ao chan, $y = 0$:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 &= 50 + 50t - \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2; \quad 4,9t^2 - 50t - 50 = 0 \end{aligned}$$

O tempo de movemento é $t = 11,1 \text{ s}$.

Para determinar o alcance substituímos este valor de t na ecuación da coordenada x :

$$x = x_0 + v_{0x}t = 86,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 11,1 \text{ s} = 961,3 \text{ m}$$

ACTIVIDADES

- Un barqueiro desexa cruzar un río de 100 m de ancho cunha barca que desenvolve unha velocidade de 36 km/h en dirección perpendicular a unha corrente de 2 m/s. Determina: a) o tempo que tarda en cruzar o río; b) a distancia que percorre a barca; c) a ecuación da traxectoria.

Sol.: a) 10 s; b) 102,0 m; c) $y = 5x$

- Lánzase un proxectil desde o cumio dunha montaña de 200 m de altura, cunha velocidade de 50 m/s e un ángulo de inclinación de 45° . Calcula: a) a altura máxima que alcanza; b) a velocidade no punto máis alto; c) o alcance.

Sol.: a) 263,8 m; b) 35,4 m/s; c) 387,2 m

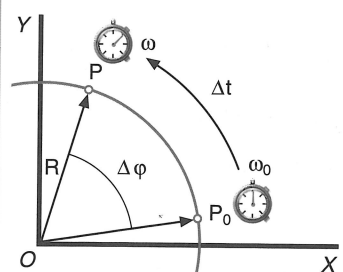
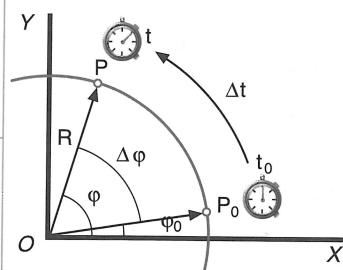
Comproba os resultados da actividade 12 coa seguinte simulación de tiro parabólico:

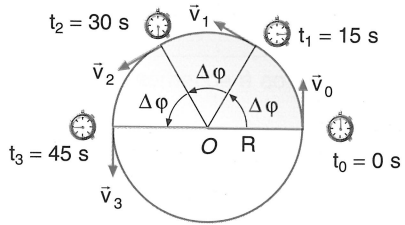
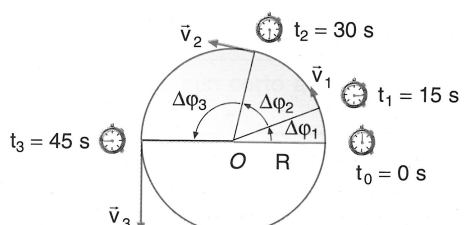
www.walter-fendt.de/ph11s/projectile_s.htm

Movemento circular

É aquel que ten como traxectoria unha circunferencia. Para o seu estudo introdúcense as *magnitudes angulares*.

Magnitudes angulares		
Magnitude	Definición	Unidade SI
Velocidade angular media ω_m	É o cociente entre o ángulo xirado, $\Delta\varphi$, e o intervalo de tempo transcorrido. $\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}$	Radián por segundo (rad/s ou rad · s ⁻¹)
Velocidade angular instantánea ω	É o valor da velocidade angular media cando o intervalo de tempo transcorrido tende a cero ($\Delta t \rightarrow 0$). É dicir, é a derivada da posición angular respecto do tempo. $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	
Aceleración angular media α_m	É o cociente entre a variación da velocidade angular e o intervalo de tempo transcorrido. $\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$	Radián por segundo ao cadrado (rad/s ² ou rad · s ⁻²)
Aceleración angular instantánea α	É o valor da aceleración angular media cando o intervalo de tempo transcorrido tende a cero ($\Delta t \rightarrow 0$). É dicir, é a derivada da velocidade angular respecto do tempo. $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	



	Movemento circular uniforme (MCU)	Movemento circular uniformemente acelerado (MCUA)
Descrición	O móbil describe unha traxectoria circular con velocidade angular constante ($a_t = 0$, $a_n = \omega^2 R$). 	O móbil describe unha traxectoria circular con aceleración angular constante ($a_t = \alpha R$ constante, $a_n = \omega^2 R$). 
Aceleración angular	$\alpha = 0$	$\alpha = \text{constante}$
Velocidade angular	$\omega = \text{constante}$	$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$
Posición angular	$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$

EXEMPLO 12

Un disco de 10 cm de raio xira cunha velocidade angular de 45 rpm. Calcula:

- A súa velocidade angular en rad/s.
- A velocidade lineal dos puntos da periferia do disco.
- O ángulo descrito en 15 min e o número de voltas que dá o disco neste tempo.
- A compoñente tanxencial e a normal da aceleración dos puntos da periferia.

— Datos: $R = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ $\omega = 45 \text{ rpm}$
 $t = 15 \text{ min} = 900 \text{ s}$

- Expresamos a velocidade angular en rad/s:

$$\omega = 45 \text{ rpm} = 45 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1,5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- Os puntos da periferia do disco atópanse a unha distancia do centro igual ao raio. Calculamos a súa velocidade lineal:

$$v = \omega R = 1,5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,1 \text{ m} = 0,47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Calculamos o ángulo descrito en 15 minutos:

$$\varphi = \omega t = 1,5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 900 \text{ s} = 1350\pi \text{ rad}$$

Expresamos este ángulo en revolucións (ou voltas):

$$1350\pi \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} = 675 \text{ voltas}$$

- Non existe aceleración tanxencial por tratarse dun MCU.

Calculamos a aceleración normal dos puntos da periferia:

$$a_n = \omega^2 R = \left(1,5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 0,1 \text{ m} = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

EXEMPLO 13

As rodas dunha bicicleta, de 50 cm de raio, xiran a partir do repouso durante 40 s cunha aceleración angular de 2 rad/s^2 . Despois manteñen a velocidade adquirida durante un minuto. Calcula:

- A velocidade angular final das rodas e a velocidade final da bicicleta.
- O número de voltas efectuadas por unha roda.
- A distancia percorrida pola bicicleta.

— Datos: $R = 0,5 \text{ m}$ $\omega_0 = 0 \text{ rad/s}$ $\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$
 $t_1 - t_0 = 40 \text{ s}$ $t_2 - t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

- Calculamos a velocidade angular ao cabo de 40 s:

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t_1 - t_0) = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 40 \text{ s} = 80 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A velocidade da bicicleta coincide coa velocidade lineal dos puntos da periferia da roda:

$$v = \omega R = 80 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,5 \text{ m} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Calculamos o ángulo xirado nos primeiros 40 s:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (40 \text{ s})^2 = 1600 \text{ rad}$$

$$1600 \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} = 254,6 \text{ voltas}$$

Calculamos agora o ángulo total:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \omega t = 1600 \text{ rad} + 80 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} = 6400 \text{ rad}$$

$$6400 \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} = 1018,6 \text{ voltas}$$

- A distancia percorrida pola bicicleta é igual ao arco descrito por unha roda:

$$\Delta s = \varphi R = 6400 \text{ rad} \cdot 0,5 \text{ m} = 3200 \text{ m}$$

ACTIVIDADES

- Unha roda de 30 cm de raio xira a 10 rpm. Calcula: a) a velocidade angular en rad/s; b) a velocidade lineal dos puntos da periferia da roda e dos que están a 10 cm do seu eixe; c) o ángulo descrito en 2 min e o número de voltas dadas neste tempo; d) os valores da compoñente tanxencial e da normal da aceleración dos puntos da periferia.

Sol.: a) $\pi/3 \text{ rad/s}$; b) $0,31 \text{ m/s}$, $0,10 \text{ m/s}$; c) $40\pi \text{ rad}$, 20 voltas;
d) $a_t = 0 \text{ m/s}^2$, $a_n = 0,33 \text{ m/s}^2$

- Un volante de 25 cm de raio xira media volta por segundo. Se frea uniformemente ata deterse en 40 s, calcula: a) a velocidade angular inicial; b) o número de voltas que dá ata deterse; c) as compoñentes intrínsecas da aceleración dun punto da periferia no instante en que a roda comeza a frear.

Sol.: a) $\pi \text{ rad/s}$; b) 10 voltas; c) $a_t = -0,02 \text{ m/s}^2$, $a_n = 2,5 \text{ m/s}^2$

Relación entre magnitudes lineais e angulares

Distancia percorrida	$\Delta s = \varphi R$
Velocidade	$v = \omega R$
Aceleración tanxencial	$a_t = \alpha R$
Aceleración normal	$a_n = \omega^2 R$

2. Causas do movement

Unha pelota de golf que está inicialmente en repouso ponse en movement cando un xogador a golpea co seu pau. Esta pelota detense cando é interceptada por un obxecto na súa traxectoria, como por exemplo unha sebe.

A pelota tamén pode cambiar a dirección do seu movement cando choca cun valado ou co pau da bandeirola.

Toda **modificación do movement** dun corpo débese á acción dunha ou de varias **forzas**.

2.1. Leis de Newton

Primeira lei ou lei de inercia

Un corpo permanece no seu estado de **repouso** ou de **movemento rectilíneo uniforme** se non actúa ningunha forza sobre el, ou se a **resultante** das forzas que actúan é **nula**.

- Sobre un corpo sempre actúa algunha forza (o seu peso, o rozamento...). Non obstante, se a resultante de todas as forzas que actúan sobre o corpo é nula, a situación equivale a que non actúe ningunha forza sobre el.
- Para que un corpo se manteña en MRU debe actuar sobre el unha forza que se opoña á do rozamento e que a neutralice.

Segunda lei ou lei fundamental da dinámica

Se sobre un corpo actúa unha forza resultante, $\vec{F}$, este adquire unha **aceleración**, $\vec{a}$, **directamente proporcional á forza aplicada**, sendo a masa, m , do corpo a constante de proporcionalidade.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- Se a forza resultante sobre o corpo é cero, a súa aceleración tamén será cero e este permanecerá en repouso ou en MRU como afirma a primeira lei.
- Se a forza resultante é diferente de cero, a aceleración ten a mesma dirección e sentido que a forza resultante.

EXEMPLO 14

Calcula a forza que se lle debe comunicar a un corpo de 300 kg de masa para que esvare polo chan cunha velocidade constante se o coeficiente de rozamento cinético é de 0,3.

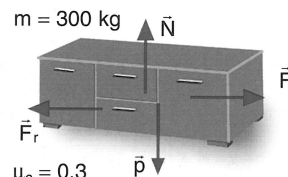
A resultante debe valer cero para que o corpo se mova a velocidade constante:

$$R = F - F_r = 0 \Rightarrow F = F_r$$

Calculamos a forza de rozamento:

$$F_r = \mu_c N = \mu_c p = \mu_c mg = 0,3 \cdot 300 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 882 \text{ N}$$

Polo tanto, $F = 882 \text{ N}$



EXEMPLO 15

Calcula a aceleración dun paquete de 2 kg que ascende verticalmente atado a unha corda que ten unha tensión de 30 N.

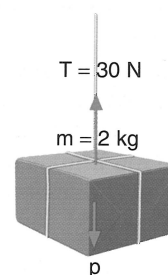
Calculamos a resultante:

$$F = T - p = T - mg$$

$$F = 30 \text{ N} - 2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 0,4 \text{ N}$$

Calculamos a aceleración:

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{0,4 \text{ N}}{2 \text{ kg}} = 0,2 \text{ m/s}^2$$



Terceira lei ou principio de acción e reacción

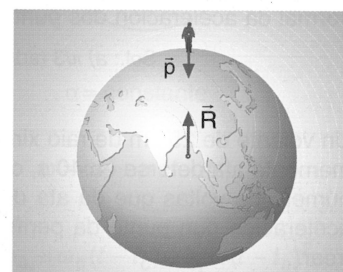
Se un corpo exerce unha **forza** $\vec{F}_{12}$ sobre outro corpo, este á vez exerce sobre o primeiro unha **forza** $\vec{F}_{21}$ co **mesmo módulo e dirección**, pero de **sentido contrario**:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- As dúas forzas $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$, chamadas de acción e reacción, son simultáneas.
- Aínda que ambas as forzas son opostas, non se anulan mutuamente, debido a que se exercen sobre corpos distintos.

EXEMPLO 16

Debuxa a forza peso dunha persoa e a súa forza de reacción e indica sobre que corpos están aplicadas.



Momento lineal ou cantidade de movemento

Para un corpo

- A cantidade de movemento dun corpo representa unha medida da dificultade de deter o seu movemento. Así, é máis difícil deter un camión canto maiores son a súa carga e a súa velocidade.

➡ O **momento lineal** ou **cantidade de movemento**, $\vec{p}$, dun corpo é o produto da súa masa pola súa velocidade.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

É unha magnitude vectorial que ten a mesma dirección e o mesmo sentido que a velocidade.

- A partir da segunda lei de Newton podemos relacionar a cantidade de movemento dun corpo coa forza resultante que actúa sobre el.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}; \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

➡ A **forza resultante** que actúa sobre un corpo é igual á **derivada** da súa **cantidade de movemento** respecto do tempo.

Para un sistema de partículas

- A cantidade de movemento total do sistema é o vector suma das cantidades de movemento das partículas individuais: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots$

- Sexan dous corpos que poden interactuar entre si, pero que están illados dos seus arredores (é dicir, cada corpo pode exercer unha forza sobre o outro, pero **non hai forzas exteriores**). As forzas que se exercen entre si son de acción e reacción, $\vec{F}_{21}$ e $\vec{F}_{12}$, e cúmprese:

$$\vec{F}_{21} = m_1\vec{a}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt}; \vec{F}_{12} = m_2\vec{a}_2 = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\text{Como } \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0: \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0; \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0$$

En consecuencia, a cantidade de movemento total do sistema permanece constante:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constante}; m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{constante}$$

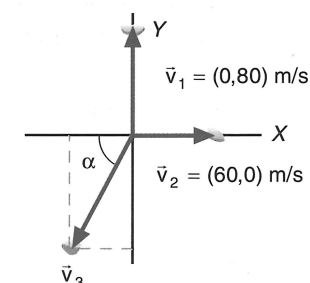
Esta expresión constitúe o teorema de conservación da cantidade de movemento:

➡ Se a **resultante das forzas exteriores** sobre un sistema é **nula**, a **cantidade de movemento** deste permanece **constante**.

$$\text{Si } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constante}$$

EXEMPLO 17

Unha rocha, inicialmente en repouso, tras ser dinamitada estoupou dividíndose en tres anacos iguais. Dous deles saen con velocidades de 80 m/s e 60 m/s cara ao norte e o leste, respectivamente. Calcula a velocidade e a dirección do terceiro fragmento.



Ao non actuar ningunha forza exterior ao sistema, conservarase a cantidade de movemento. Como o sistema está en repouso inicialmente:

$$0 = \vec{p}; 0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

$$0 = m 80\vec{j} + m 60\vec{i} + m\vec{v}_3, \text{ en unidades SI}$$

$$0 = m (80\vec{j} + 60\vec{i} + \vec{v}_3)$$

De onde obtemos: $\vec{v}_3 = -60\vec{i} - 80\vec{j}$
Calculamos o módulo da velocidade:

$$|\vec{v}_3| = \sqrt{(-60 \text{ m/s})^2 + (-80 \text{ m/s})^2} = 100 \text{ m/s}$$

Para determinar a dirección da velocidade calculamos o valor do ángulo α que forma $\vec{v}_3$ co eixe OX:

$$\tan \alpha = \frac{|v_{3y}|}{|v_{3x}|} = \frac{80 \text{ m/s}}{60 \text{ m/s}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53,1^\circ$$

ACTIVIDADES

- Se deixamos caer unha pedra desde certa altura, esta non se move con velocidade constante, senón que se acelera. Xustifica este feito a partir das leis de Newton.
- Calcula con que forza temos que empuxar unha mesa de 20 kg para que se desprace a velocidade constante se o coeficiente de rozamento cinético co chan é de 0,1.

Sol.: 19,6 N

- Calcula a aceleración que adquire un corpo de 10 kg sobre o que se aplican dúas forzas de 34 N e 52 N na mesma dirección e sentidos contrarios.
Sol.: 1,8 m/s²
- Dúas bólas de 2 kg e 5 kg móvense na mesma dirección e sentidos contrarios con velocidades respectivas de 3 m/s e 4 m/s, chocan e quedan unidas. Calcula a velocidade do sistema despois do choque.
Sol.: 2 m/s

FIXATE

Para aplicar as leis de Newton:

1. Debuxamos un esquema con todas as forzas que actúan sobre cada corpo do problema.
2. Eliximos un sistema de coordenadas conveniente para cada corpo e determinamos as compoñentes das forzas ao longo destes eixes.
3. Aplicamos a segunda lei de Newton en forma de compoñentes.
4. Resolvemos as ecuacións ou os sistemas de ecuacións resultantes.
5. Comprobamos o resultado.

2.2. Aplicacións das leis de Newton

As leis de Newton permitirannos resolver os problemas de dinámica.

Nas páxinas seguintes estudaremos algúns exemplos simples de movementos baixo a acción de forzas constantes para ilustrar as aplicacións destas leis.

Dinámica do movemento rectilíneo

Neste tipo de problemas debemos tomar o eixe OX na dirección do movemento. Deste xeito, os vectores $\vec{a}$, $\vec{v}$ e $\vec{r}$ teñen unha soa compoñente e pódense expresar en forma escalar.

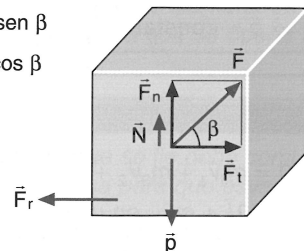
Deseguido estudaremos o movemento dun corpo sometido a forzas constantes que esvara sobre un plano e o movemento dun sistema de dous corpos unidos por unha corda.

Movemento nun plano horizontal

O corpo da figura esvara sobre unha superficie horizontal por acción da forza $\vec{F}$. Representamos todas as forzas que actúan sobre o corpo e calculamos a súa aceleración.

$$F_n = F \sin \beta$$

$$F_t = F \cos \beta$$



Eixe tanxencial: $F_t - F_r = ma \rightarrow F \cos \beta - F_r = ma$ [1]

Eixe normal: $N + F_n - p = 0 \rightarrow N = p - F_n = mg - F \sin \beta$

A forza de rozamento é:

$$F_r = \mu_c N = \mu_c (mg - F \sin \beta)$$

Substituímos en [1]:

$$F \cos \beta - \mu_c (mg - F \sin \beta) = ma$$

$$a = \frac{F \cos \beta - \mu_c (mg - F \sin \beta)}{m}$$

EXEMPLO 18

Calcula a aceleración do bloque da figura superior se $F = 20 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$, $m = 2 \text{ kg}$ e $\mu_c = 0,1$.

Substituímos os datos do problema na expresión da aceleración:

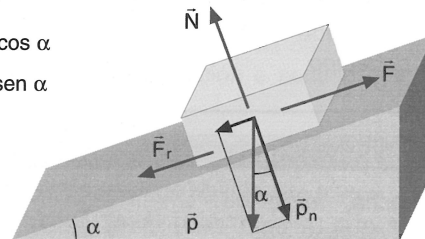
$$a = \frac{20 \cos 30^\circ - 0,1(2 \cdot 9,8 - 20 \cdot \sin 30^\circ)}{2} = 8,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Movemento nun plano inclinado

O corpo da figura ascende polo plano inclinado por acción da forza $\vec{F}$. Representamos todas as forzas que actúan sobre o corpo e calculamos a súa aceleración.

$$p_n = p \cos \alpha$$

$$p_t = p \sin \alpha$$



Eixe tanxencial:

$$F - p_t - F_r = ma \rightarrow F - mg \sin \alpha - F_r = ma$$
 [1]

Eixe normal:

$$N - p_n = 0 \rightarrow N = p_n = p \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

A forza de rozamento é:

$$F_r = \mu_c N = \mu_c mg \cos \alpha$$

Substituímos en [1]:

$$F - mg \sin \alpha - \mu_c mg \cos \alpha = ma$$

$$a = \frac{F - mg(\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha)}{m}$$

EXEMPLO 19

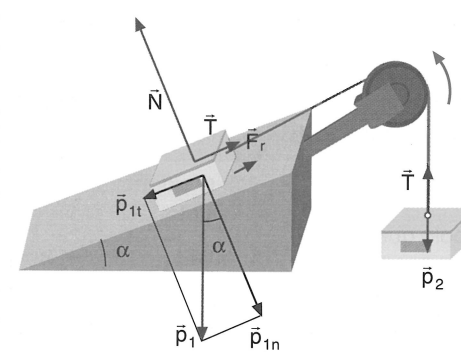
Calcula a aceleración do bloque da figura superior se $F = 50 \text{ N}$, $\alpha = 45^\circ$, $m = 3 \text{ kg}$ e $\mu_c = 0,1$.

Substituímos os datos do problema na expresión da aceleración:

$$a = \frac{50 - 3 \cdot 9,8(\sin 45^\circ + 0,1 \cdot \cos 45^\circ)}{3} = 9,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Movemento de corpos enlazados

Os dous corpos da figura móvense conxuntamente ao estaren unidos por unha corda. Supoñeremos que o sistema se moverá cara á esquerda. É dicir, o corpo 1 descenderá polo plano mentres que o corpo 2 ascenderá.



Se o módulo da aceleración resultase negativo, significaría que o sentido escollido non é o correcto e deberíamos refacer o problema escollendo o sentido oposto. Se neste caso o resultado tamén fose negativo, significaría que o corpo se mantén en repouso.

Representamos todas as forzas que actúan sobre ambos os corpos e calculamos a súa aceleración:

Corpo 1: $p_{1t} - T - F_r = m_1 a$

Corpo 2: $T - p_2 = m_2 a$

Suma: $p_{1t} - F_r - p_2 = (m_1 + m_2) a$

$$a = \frac{p_{1t} - F_r - p_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 g \sin \alpha - \mu_c m_1 g \cos \alpha - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

Despexamos a tensión da ecuación do corpo 2:

$$T = m_2 a + p_2 = m_2 (g + a)$$

EXEMPLO 20

Calcula a aceleración do sistema da figura superior e a tensión da corda se: $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $\alpha = 45^\circ$ e $\mu_c = 0,2$.

$$a = \frac{10 \cdot 9,8 \cdot \sin 45^\circ - 0,2 \cdot 10 \cdot 9,8 \cdot \cos 45^\circ - 3 \cdot 9,8}{10 + 3} = 2,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$T = 3(9,8 + 2,0) = 35,4 \text{ N}$$

ACTIVIDADES

19. Un bloque de 3,5 kg de masa é arrastrado polo chan cunha velocidade constante mediante unha corda horizontal cunha tensión de 6 N.

a) Debuxa un esquema das forzas que actúan sobre o bloque.

b) Calcula a forza de rozamento e o coeficiente cinético de rozamento.

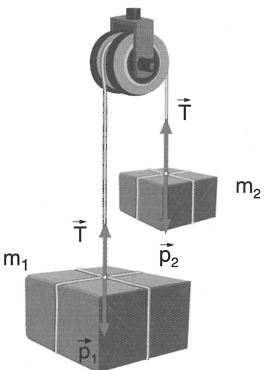
c) A corda inclínase cara a arriba ata formar un ángulo de 45° coa horizontal. Explica como se moverá o bloque e calcula a súa aceleración.

Sol.: b) 6 N, 0,17; c) $-0,26 \text{ m/s}^2$

20. Explica razoadamente se é certa a seguinte afirmación: A forza de rozamento estática entre un corpo e unha superficie é sempre igual a $\mu_e N$.

Máquina de Atwood

Consta dunha polia e un fío inextensible e de masa desprezable que pasa pola súa gorxa. De cada un dos extremos do fío pódese colgar un corpo.



Se unha das masas é maior ca a outra, por exemplo $m_1 > m_2$, os dous corpos móvense aceleradamente, o de máis masa cara a abaixo e o outro cara a arriba.

A aceleración do sistema é:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$$

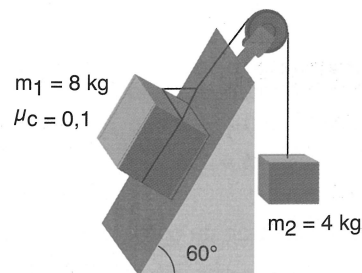
Comproba a influencia do coeficiente de rozamento no descenso dun corpo por un plano inclinado mediante a seguinte simulación:

www.ngsir.netfirms.com/englishhtm/Incline.htm

21. Unha caixa baixa con velocidade constante por unha superficie inclinada 14° respecto da horizontal. Calcula o coeficiente de rozamento cinético.

Sol.: 0,25

22. Calcula a aceleración e a tensión que ten a corda para o sistema da figura.



Sol.: $2,1 \text{ m/s}^2$, 47,6 N

Dinámica do movemento circular

Para describir este tipo de movemento precisamos as compoñentes intrínsecas da aceleración e as magnitudes angulares.

Movementos de corpos enlazados

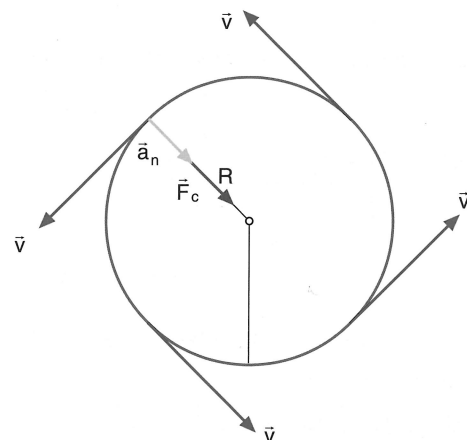
Este movementos ten as seguintes características:

- O módulo da velocidade é constante, polo que non existe aceleración tanxencial, a_t .
- A dirección da velocidade varía constantemente, polo que existe aceleración normal ou centrípeta, a_n .

En consecuencia, debe existir unha forza resultante que produza tal aceleración. Esta forza ten a dirección normal á traxectoria e chámase **forza centrípeta**.

$$F_c = m a_n; F_c = m \frac{v^2}{R}$$

$$F_c = m \omega^2 R$$

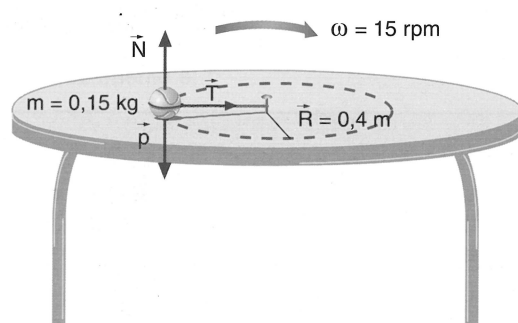


EXEMPLO 21

Unha bóla de 150 g, atada ao extremo dunha corda de 40 cm de lonxitude, xira apoiándose sobre unha mesa horizontal sen rozamento a razón de 15 voltas por minuto. Calcula:

- A velocidade angular en rad/s.
- A tensión da corda.

— Datos:



- Calculamos a velocidade angular en rad/s:

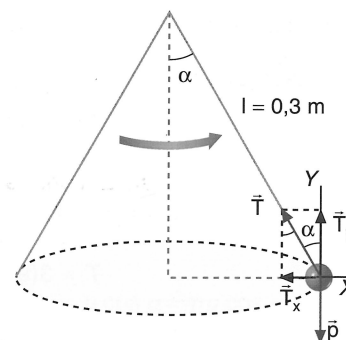
$$\omega = 15 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- A tensión da corda é a forza centrípeta:

$$T = m \omega^2 R = 0,15 \text{ kg} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 0,4 \text{ m} = 0,15 \text{ N}$$

EXEMPLO 22

A bóla da figura xira no aire con MCU a razón dunha volta por segundo. Se a lonxitude da corda é de 0,3 m e a masa da bóla é de 100 g, calcula: a) a tensión da corda; b) o ángulo que forma a corda coa vertical.



Aplicamos a segunda lei de Newton tendo en conta que a forza resultante na dirección radial é a forza centrípeta:

$$\text{Eixe X: } T_x = F_c; T \sin \alpha = m \omega^2 R$$

$$\text{Eixe Y: } T_y = p; T \cos \alpha = mg$$

- Da primeira ecuación obtemos a tensión da corda. Tendo en conta que $R = l \sin \alpha$:

$$T \sin \alpha = m \omega^2 l \sin \alpha$$

$$T = m \omega^2 l = 0,1 \text{ kg} \cdot (2\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 0,3 \text{ m} = 1,2 \text{ N}$$

- Da segunda ecuación obtemos o ángulo α :

$$\cos \alpha = \frac{mg}{T} = \frac{0,1 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{1,2 \text{ N}} = 0,82$$

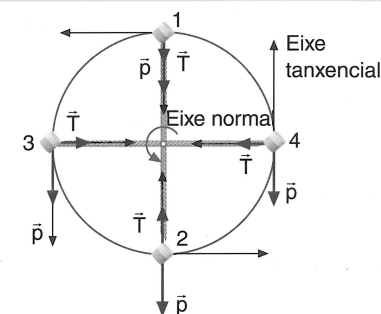
De onde deducimos que $\alpha = 34,9^\circ$.

Movementos circular nun plano vertical

A figura representa un obxecto que xira nun plano vertical atado ao extremo dunha corda.

As forzas que actúan sobre o obxecto son o seu peso e a tensión da corda. Pódese apreciar que en cada punto a resultante destas forzas é distinta. Polo tanto, trátase dun movemento circular con velocidade variable e aceleración non-constante.

Vexamos cal é o valor da resultante en catro puntos do percorrido.



Punto 1 (arriba)	Punto 2 (abaixo)	Punto 3 (esquerda)	Punto 4 (dereita)
Eixe normal: $F_c = T_1 + p$	Eixe normal: $F_c = T_2 - p$	Eixe normal: $F_c = T_3$	Eixe normal: $F_c = T_4$
$T_1 + p = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R$	$T_2 - p = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R$	$T_3 = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R$	$T_4 = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R$
Eixe tanxencial: $F_t = 0$	Eixe tanxencial: $F_t = 0$	Eixe tanxencial: $F_t = p$	Eixe tanxencial: $F_t = -p$

EXEMPLO 23

Unha pedra de 100 g de masa xira nun plano vertical atada ao extremo dunha corda de 50 cm de lonxitude. Calcula a velocidade mínima que debe ter a pedra no punto superior da súa traxectoria para que a corda se manteña tensa.

— Datos: $m = 0,1 \text{ kg}$ $R = 0,5 \text{ m}$

No punto superior:

$$T + p = m \frac{v^2}{R}$$

A corda mantense tensa mentres existe unha tensión $T \geq 0$. O límite correspondente á velocidade mínima é $T = 0$:

$$0 + mg = m \frac{v_{\min}^2}{R}; v_{\min} = \sqrt{gR}$$

$$\text{Neste caso: } v_{\min} = \sqrt{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5 \text{ m}} = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Observamos que o resultado é independente da masa da pedra.

EXEMPLO 24

Unha pedra de 100 g de masa xira nun plano vertical atada ao extremo dun fío de 50 cm de lonxitude. Auméntase a velocidade da pedra ata que o fío rompe por non poder aguantar a tensión. Se o límite de resistencia do fío é de 7,5 N, calcula a velocidade con que sairá disparada a pedra e di que tipo de traxectoria seguirá.

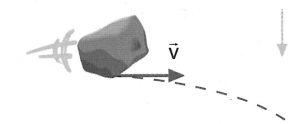
— Datos: $m = 0,1 \text{ kg}$ $R = 0,5 \text{ m}$ $T_{\max} = 7,5 \text{ N}$

O fío romperá no punto inferior da traxectoria, onde a tensión é máxima:

$$T_{\max} - p = \frac{mv^2}{R}; v = \sqrt{\frac{R(T_{\max} - mg)}{m}}$$

$$v = \sqrt{0,5 \text{ m} \cdot \frac{7,5 \text{ N} - 0,1 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{0,1 \text{ kg}}} = 5,7 \text{ m/s}$$

A pedra seguirá un movemento parabólico correspondente a un tiro horizontal con velocidade inicial de 5,7 m/s.



ACTIVIDADES

- Unha bóla atada ao extremo dunha corda de 0,5 m de lonxitude xira no aire cunha velocidade constante en módulo. Se a corda forma un ángulo de $11,5^\circ$ coa vertical, calcula o módulo da velocidade.

Sol.: 0,45 m/s

- Unha bóla xira verticalmente atada ao extremo dunha corda. Explica por que a bóla non cae no punto máis alto da traxectoria, malia que actúa sobre ela a forza do peso. En que se emprega esta forza?

- Unha pedra de 150 g de masa xira nun plano vertical atada ao extremo dun fío de 80 cm de lonxitude. Auméntase a velocidade da pedra ata superar o límite de resistencia do fío, que é de 10 N.

- Calcula a velocidade con que sairá disparada a pedra.
- Di en que punto da traxectoria ocorrerá isto. Xustifica a túa resposta.

Sol.: a) 6,7 m/s

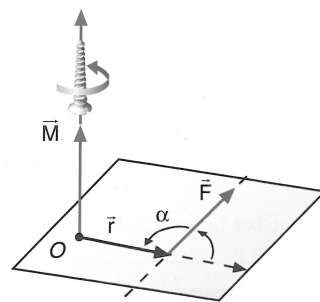
LEMBRA

O momento $\vec{M}$ dunha forza $\vec{F}$ respecto dun punto O é un vector coas seguintes características:

Módulo: $M = F \cdot r \cdot \sin \alpha$

Dirección: perpendicular ao plano que forman os vectores $\vec{M}$ e $\vec{F}$.

Sentido: o de avance dun sacarroilas ou un parafuso que xirase aproximando $\vec{r}$ a $\vec{F}$ polo camiño máis curto (regra do sacarroilas).

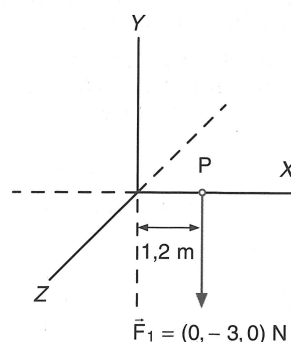


FÍXATE

Podes revisar a operación matemática produto vectorial en Ferramentas matemáticas (páx. 12).

EXEMPLO 25

Determina o momento da forza $\vec{F}_1$ da figura respecto do punto P. Despois, calcula o momento resultante se existe ademais unha forza $\vec{F}_2 = (1, 0, 0)$ N aplicada no punto $(0, 1, 2)$ m. *aplicada no respecto á orixe de coord. respecto á orixe*



— Datos: $\vec{r}_1 = (1, 2, 0)$ m; $\vec{F}_1 = (0, -3, 0)$ N; $\vec{r}_2 = (0, 1, 2)$ m; $\vec{F}_2 = (1, 0, 0)$ N

— Calculamos o momento da forza $\vec{F}_1$:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (1, 2, 0) \text{ m} \times (0, -3, 0) \text{ N}$$

$$\vec{M}_1 = [1, 2 \vec{i} \times (-3 \vec{j})] \text{ N} \cdot \text{m} = -3,6 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

— Calculamos o momento da forza $\vec{F}_2$ e sumámolo ao momento da forza $\vec{F}_1$ para determinar o momento total:

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (0, 1, 2) \text{ m} \times (1, 0, 0) \text{ N}$$

$$\vec{M}_2 = (1, 2 \vec{j} \times \vec{i}) \text{ N} \cdot \text{m} = -1,2 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = -3,6 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m} + (-1,2 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}) = -4,8 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

ACTIVIDADES

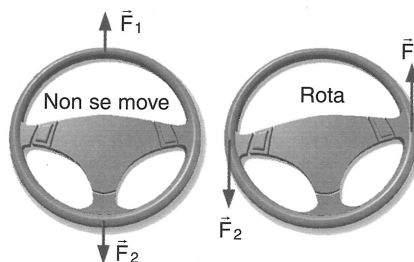
26. Di que tipo de movemento terá un corpo sometido a unha forza resultante nula e a un momento das forzas non-nulo. E un corpo sometido a unha forza resultante non-nula?

27. Calcula o momento da forza $\vec{F}_1 = (3, 5, 1)$ N aplicada no punto $(1, 2, 1)$ m respecto da orixe de coordenadas.

Sol.: $\vec{M} = (-3 \vec{i} + 2 \vec{j} - \vec{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$

3. Movemento de rotación

Os volantes da figura están sometidos á acción dun par de forzas.



Aínda que a forza resultante é nula en ambos os dous casos, o volante da esquerda permanece en repouso, mentres que o da dereita se pon en movemento.

A diferenza entre ambos os dous casos atópase no momento das forzas: nulo no primeiro caso pero non no segundo. As características do momento dunha forza $\vec{F}$ permítenos definilo como o produto vectorial do vector de posición $\vec{r}$ pola forza $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

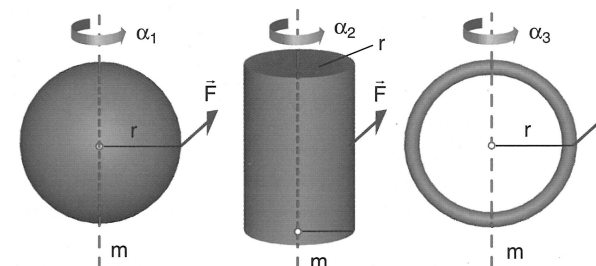
Con esta magnitude podemos coñecer a eficacia dunha forza para producir rotación ao redor dun eixe que pasa por un punto O . En ocasións, pódese calcular directamente respecto dun eixe, por exemplo, se se trata dun eixe de simetría do corpo. A súa unidade no SI é o newton metro, N·m.

Se sobre un corpo actúan simultaneamente varias forzas externas, o momento resultante é igual á suma vectorial dos momentos de cada unha das forzas:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

3.1. Momento de inercia

Os tres corpos da figura teñen a mesma masa e o mesmo raio. Se lles aplicamos a mesma forza $\vec{F}$, perpendicular ao raio e na súa periferia, proporcionaremoslles o mesmo momento da forza.



Os tres corpos empezarán a xirar con aceleracións angulares diferentes, é dicir, cada corpo responderá de xeito diferente ás forzas aplicadas.

A relación entre o momento da forza aplicada a un corpo e a aceleración angular producida exprésase mediante a segunda lei de Newton para a rotación ou ecuación fundamental da dinámica de rotación:

$$\vec{M} = I \vec{\alpha}$$

onde I é a constante de proporcionalidade, denominada momento de inercia, e calcúlase respecto do mesmo eixe que o momento da forza.

O momento de inercia I dunha partícula respecto dun eixe é o produto da súa masa m polo cadrado da distancia ao eixe de xiro r .

$$I = mr^2$$

A súa unidade no SI é o $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Como esta magnitude ten en conta a posición da masa respecto do eixe de rotación, o seu valor depende do eixe de xiro escollido.

FÍXATE

Un sólido ríxido é calquera sistema formado por partículas tales que as distancias entre elas permanecen constantes mesmo baixo a acción de forzas.

Sólido ríxido discreto

Consta dun número finito de partículas, cada unha cunha masa m_i . Utilizaremos o subíndice i para referirnos a unha calquera das partículas.

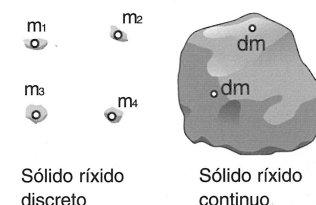
$$M = \sum_i m_i \quad (M: \text{masa total})$$

Sólido ríxido continuo

Consta dun número infinito de partículas, de modo que están infinitamente próximas entre elas.

Unha partícula calquera será un diferencial de masa, dm .

$$M = \int dm \quad (M: \text{masa total})$$



FÍXATE

A ecuación fundamental da dinámica de rotación, $\vec{M} = I \vec{\alpha}$, é similar á ecuación fundamental da dinámica de translación, $\vec{F} = m \vec{a}$.

Segundo esta ecuación, a aceleración angular é un vector paralelo a $\vec{M}$ e do mesmo sentido.

Momento de inercia dun sólido ríxido discreto

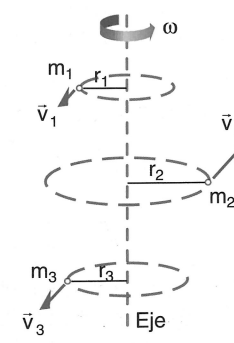
Se temos un sistema de n partículas que describen circunferencias de raios $r_1, r_2, \dots$, o seu momento de inercia é:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$$

$$I = \sum m_i r_i^2$$

E a ecuación fundamental da dinámica de rotación:

$$\vec{M} = I \vec{\alpha} = \sum m_i r_i^2 \vec{\alpha}$$



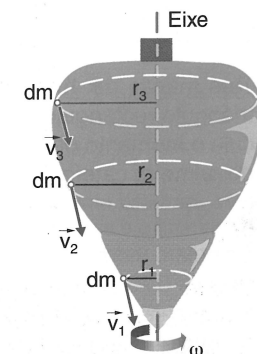
Momento de inercia dun sólido ríxido continuo

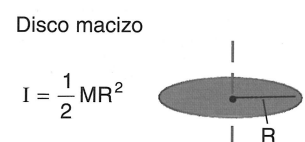
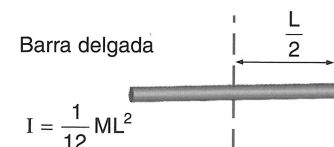
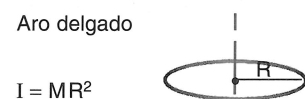
Se temos un corpo de masa M dividido en dm , cada un a unha distancia r do eixe de rotación, o seu momento de inercia é:

$$I = \int_M r^2 dm$$

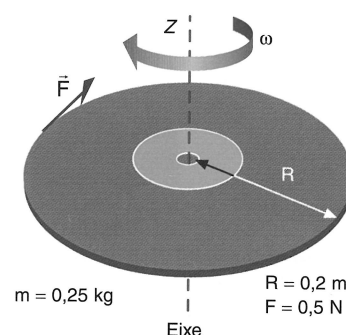
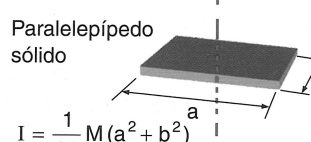
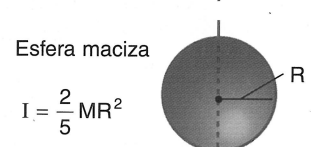
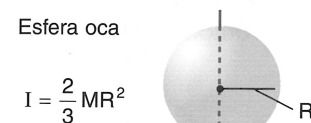
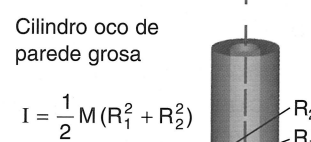
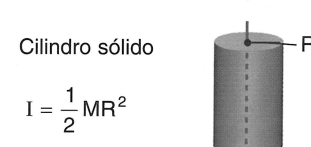
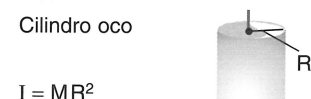
E a ecuación fundamental da dinámica de rotación:

$$\vec{M} = I \vec{\alpha} = \int_M r^2 dm \vec{\alpha}$$





No seguinte cadro aparecen as fórmulas dos momentos de inercia dalgúns corpos de composición homoxénea respecto dos eixes sinalados.



Ata o de agora, os problemas de cinemática e de dinámica que resolviches só incluían translacións de partículas. Agora, imos observar nun exemplo como se utilizan as magnitudes e se aplican as leis propias dos movementos de rotación.

EXEMPLO 26

Un disco de 20 cm de raio e 250 g de masa xira ao redor dun eixe perpendicular a el e que pasa polo seu centro. Calcula: a) a súa aceleración angular se é sometido a unha forza de 0,5 N tanxente nun punto da súa periferia; b) a súa velocidade angular pasados 10 s.

a) Calculamos o momento da forza e o momento de inercia do disco para poder aplicar a ecuación fundamental da dinámica de rotación:

• Ao ser a forza tanxente ao disco, $\vec{F}$ e R son perpendiculares:

$$|\vec{M}| = FR = 0,5 \text{ N} \cdot 0,2 \text{ m} = 0,1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Segundo o sistema de coordenadas escollido:

$$\vec{M} = -0,1 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

• O momento de inercia do disco é:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,25 \text{ kg} \cdot (0,2 \text{ m})^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\vec{M} = I \vec{\alpha}; \vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{I} = \frac{-0,1 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = -20 \hat{k} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Aplicamos as ecuacións do MCUA:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (-20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot 10 \text{ s} = -200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

ACTIVIDADES

28. O momento de inercia dunha partícula, depende do eixe elixido? E o dun sistema discreto de partículas? Por que?

29. Tres masas de 1 kg cada unha sitúanse nos vértices dun triángulo rectángulo cuns catetos que miden 3 m e 4 m. Calcula o momento de inercia do sistema segundo xire ao redor do primeiro cateto ou do segundo.

Sol.: 16 kg · m²; 9 kg · m²

30. Calcula o momento de inercia dun cilindro macizo de 1 kg de masa e 0,25 m de raio que xira ao redor do seu eixe de simetría. E se fose unha esfera maciza de 1 kg de masa e 0,25 m de raio que xira ao redor dun dos seus diámetros?

Sol.: 0,031 kg · m²; 0,025 kg · m²

31. Comproba que ao dividir as unidades do momento da forza entre as do momento de inercia resultan as da aceleración angular.

32. Relaciona a dirección e o sentido da aceleración angular dun corpo co momento resultante sobre ese corpo.

33. Un disco de 30 cm de raio e 100 g de masa xira ao redor dun eixe que pasa polo seu centro, sometido a unha forza de 1,5 N tanxente na súa periferia. Calcula a aceleración angular que experimenta.

Sol.: 100 rad · s⁻² $\hat{k}$

3.2. Momento cinético ou angular

Xa vimos que un corpo en movemento caracterízase pola magnitude *cantidade de movemento*. Se o corpo xira ao redor dun eixe (movemento de rotación) caracterízase ademais por outra magnitude chamada *momento cinético ou angular*.

O **momento cinético ou angular**, $\vec{L}$, dunha partícula respecto dun punto O é o produto vectorial da súa posición, $\vec{r}$, respecto dese punto pola súa cantidade de movemento, $\vec{p}$.

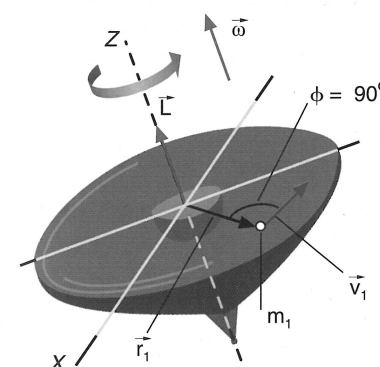
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

A unidade do momento angular no SI é o kg · m² · s⁻¹.

Se temos un sistema de n partículas ou un sólido ríxido, o **momento angular resultante** é igual á **suma vectorial** dos momentos angulares de cada partícula, referidos ao mesmo punto.

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Se o **eixe de xiro** do sólido ríxido é un **eixe de simetría fixo** ou que **se mantén paralelo a si mesmo** durante o movemento, o cálculo do momento cinético simplifícase. Ademais, nestes casos, o seu valor non depende do punto do eixe considerado.



Supoñamos que o eixe de rotación coincide co eixe Z do sistema de coordenadas.

Deste xeito, cada partícula xira sempre no plano XY, ao redor do eixe Z, con velocidade angular ω .

Como o movemento de cada partícula é circular, o seu momento cinético será:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$L_i = m_i r_i v_i \sin \phi = m_i r_i v_i \sin 90^\circ = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega = m_i r_i^2 \omega$$

Se sumamos os momentos cinéticos de todas as partículas do sólido ou integramos no caso dun sólido continuo, teremos:

$$L = \sum L_i = \sum m_i r_i^2 \omega = I \omega$$

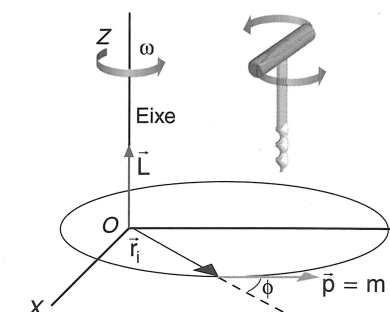
$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Esta ecuación é válida tanto para sólidos ríxidos discretos coma para sólidos ríxidos continuos, sempre que o eixe de xiro sexa un eixe de simetría fixo ou que se manteña paralelo a si mesmo. Esta condición tamén é necesaria para que se cumpra a expresión $\vec{M} = I \vec{\alpha}$.

LEMBRA

Momento lineal ou **cantidade de movemento**, $\vec{p}$, dun corpo: produto da súa masa pola súa velocidade.

$$\vec{p} = m \vec{v}$$



FÍXATE

A relación:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

é análoga á da cantidade de movemento:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Pero coa seguinte diferenza importante entre a masa e o momento de inercia: mentres que a masa m dun obxecto é constante en calquera circunstancia, o momento de inercia I depende do eixe respecto do cal se calcula, xeralmente, o eixe de xiro.

Relación entre o movemento rectilíneo e o circular

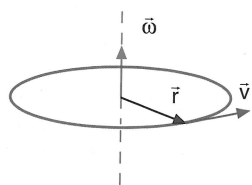
Do mesmo xeito que a ecuación fundamental da dinámica de rotación lle asigna un carácter vectorial á aceleración angular, a relación entre o momento angular e a velocidade angular dálle un carácter vectorial a esta.

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

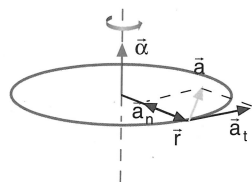
A velocidade angular $\vec{\omega}$ é un vector paralelo ao eixe de xiro e ao vector $\vec{L}$, e do mesmo sentido ca $\vec{L}$.

Deste xeito, podemos volver definir as relacións entre algunhas magnitudes lineais e angulares:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

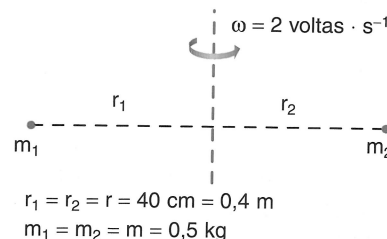


$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$



EXEMPLO 27

Calcula o momento angular do sistema de dúas masas puntuais da figura se xiran ao redor do eixe sinalado cunha velocidade angular de dúas voltas por segundo.



— Expresamos a velocidade angular en unidades do SI:

$$\omega = \frac{2 \text{ voltas}}{1 \text{ s}} \cdot \frac{2 \pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} = 4 \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

— Obtemos o momento de inercia para calcular logo o momento angular:

$$I = mr^2 + mr^2 = 2mr^2 = 2 \cdot 0,5 \text{ kg} (0,4 \text{ m})^2 = 0,16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$L = I\omega = 0,16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 4 \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 0,64 \pi \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Se eliximos como eixe Z o propio eixe de xiro temos: $\vec{L} = 0,64 \pi \vec{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

EXEMPLO 28

Supón que a Terra é unha esfera de $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ de masa e 6370 km de raio, e calcula o seu momento angular debido ao xiro ao redor do seu eixe.

— Datos: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$;

$$I \text{ (esfera sólida que xira ao redor dun diámetro)} = \frac{2}{5} MR^2$$

— Determinamos o momento de inercia da Terra e a súa velocidade angular para calcular o momento angular:

$$I = \frac{2}{5} MR^2 = \frac{2}{5} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 = 9,7 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Se temos en conta que a Terra dá unha volta en 24 horas:

$$\omega = \frac{1 \text{ volta}}{24 \text{ h}} \cdot \frac{2 \pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$L = I\omega = 9,7 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 7,1 \cdot 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Se consideramos que o eixe de xiro é o eixe Z, $\vec{L} = 0,64 \pi \vec{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

ACTIVIDADES

34. Explica por que os vectores momento angular de todas as partículas dun sólido ríxido son paralelos e do mesmo sentido se o eixe de rotación é fixo.

35. Calcula o momento angular de dúas masas de $1,5 \text{ kg}$ cada unha, separadas por 1 m e que xiran cunha velocidade angular de catro voltas por segundo ao redor dun eixe perpendicular que pasa polo centro da distancia que as separa.

$$\text{Sol.: } 6 \pi \vec{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

36. Supón que a Lúa é unha esfera de $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ de masa e $1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$ de raio, e calcula o seu momento angular debido ao xiro ao redor do seu eixe, de período 28 días.

$$\text{Sol.: } 2,31 \cdot 10^{29} \vec{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

37. Calcula o momento angular dun disco de 200 g de masa e $0,4 \text{ m}$ de raio que xira a 45 rpm ao redor dun eixe perpendicular que pasa polo seu centro.

$$\text{Sol.: } 0,024 \pi \vec{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Teorema de conservación do momento angular

Cando un patinador xira sobre si mesmo cos brazos estirados, a resultante das forzas que actúan sobre el e a resultante dos momentos son nulas. Non obstante, o patinador non ten máis que acercar os brazos ao corpo para que a súa velocidade angular aumente. Como o consegue?

A explicación vén dada polo **teorema de conservación do momento angular**.

Se a suma dos momentos das forzas exteriores que actúan sobre un sistema é **cero**, o momento angular do sistema permanece **constante**.

$$\text{Se } \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constante}$$

Para demostrar este teorema, partimos do **teorema do momento cinético**, que relaciona o momento angular co momento das forzas exteriores.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

O momento das forzas exteriores é a variación respecto do tempo do momento angular, se ambos os dous están referidos ao mesmo punto. Por iso, se $\vec{M} = 0$, a derivada do momento angular tamén é cero:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

E, neste caso, o momento angular ten que ser unha constante, $\vec{L} = \text{constante}$.

Este resultado só é válido se a **orixe** de todos os **momentos** das forzas coincide coa **orixe** do **momento angular**, ou se todos están referidos ao mesmo eixe de simetría.

Para que o momento total das forzas exteriores sexa cero débese cumprir unha das seguintes condicións:

— Que **non existan forzas exteriores**. Por exemplo, nas explosións ou fragmentacións de obxectos que xiran, nos choques de obxectos que xiran separados e acaban unidos...

— Que **exista algunha forza exterior**, pero que o seu **momento** sexa **cero**. Se temos en conta a definición do momento dunha forza, $M = Fr \sin \phi$, isto ocorrerá cando:

- A forza pase polo eixe de xiro e, polo tanto, $r = 0$. Por exemplo, un patinador ou un acróbata que modifican a súa velocidade de xiro ao variar a forma do seu corpo.
- A **forza** sexa **paralela a $\vec{r}$** e, polo tanto, $\phi = 0^\circ$ e $\sin \phi = 0$. Por exemplo, nas forzas gravitacionais.

FÍXATE

A conservación da cantidade de movemento facilita, por exemplo, o estudo dos choques. A conservación do momento angular permite resolver multitude de problemas, como os relativos á órbita dos planetas.

Teorema do momento cinético

Para obter a relación entre o momento angular dun sólido e o momento total das forzas exteriores que actúan sobre el, derivaremos a definición do momento angular respecto do tempo.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Como a velocidade e a cantidade de movemento son vectores paralelos, o seu produto vectorial é cero. Así:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Esta é outra maneira de expresar a ecuación fundamental da dinámica de rotación, similar á forma diferencial da ecuación fundamental da dinámica de translación:

$$\text{Rotación: } \vec{M} = I \vec{\alpha} \text{ ou } \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{Translación: } \vec{F} = m \vec{a} \text{ ou } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

LEMBRA

A forza de atracción gravitacional entre a Terra e o Sol é paralela a $\vec{r}$ (forzas centrais); polo tanto, o momento angular consérvase.

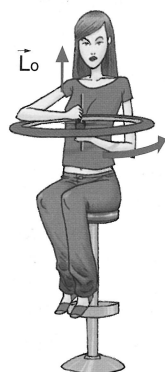
O teorema de conservación do momento angular permite demostrar que a traxectoria da Terra ao redor do Sol é plana e que a súa velocidade é maior cando se move máis preto do Sol que cando se encontra máis afastada.

En xeral, todas as forzas gravitacionais son **forzas centrais**.

Xiro dunha roda de bicicleta

Unha persoa sostén polo seu eixe unha roda de bicicleta lastrada, de xeito que a roda poida xirar. A persoa está sentada nunha banqueta que tamén pode xirar.

Inicialmente, a persoa e a banqueta están en repouso mentres que a roda xira nun plano horizontal, cun momento angular inicial L_0 que apunta cara a arriba.



Nese momento, a persoa xira o plano da roda 180° ata inverter o sentido de L_0 . A medida que efectúa a inversión, a persoa e a banqueta empezan a xirar, adquirindo un certo momento angular.

Le a experiencia descrita na parte superior e explicaa.

- Utiliza unha banqueta con pouco rozamento e unha roda de bicicleta lastrada para efectuar a experiencia.

EXEMPLO 29

Un disco de 20 cm de raio e 0,25 kg de masa xira ao redor dun eixe perpendicular a el e que pasa polo seu centro, cunha velocidade angular de dúas voltas por segundo. Se deixamos caer sobre el, e coaxial con el, outro disco de 10 cm de raio e 0,1 kg de masa, inicialmente en repouso, calcula a velocidade angular final do conxunto.

— Datos: $m_1 = 0,25$ kg; $r_1 = 20$ cm = 0,2 m; $m_2 = 0,1$ kg; $r_2 = 10$ cm = 0,1 m

$$I \text{ (disco macizo)} = \frac{1}{2}MR^2; \omega_0 = 2 \text{ voltas} \cdot \text{s}^{-1}$$

— Expresamos ω_0 en unidades do SI e calculamos os momentos de inercia dos discos para determinar finalmente o momento angular inicial e o final:

$$\omega_0 = \frac{2 \text{ voltas}}{1 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}0,25 \text{ kg} \cdot (0,2 \text{ m})^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}0,1 \text{ kg} \cdot (0,1 \text{ m})^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$L_0 = I_1 \omega_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 0,02\pi \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$L = (I_1 + I_2) \omega = (5 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \omega = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \omega$$

— Aplicamos o principio de conservación do momento angular:

$$L_0 = L; 0,02\pi \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{0,02\pi \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{5,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 3,6\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

EXEMPLO 30

Unha patinadora xira ao redor do seu eixe a 20 rpm coas mans a 80 cm do eixe e unha masa de 250 g en cada unha. Se o momento de inercia da patinadora soa respecto do seu eixe é de $6 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e non varía, calcula a súa velocidade de xiro cando achega as mans ata situalas a 40 cm do eixe.

— Datos: $I_{\text{pat.}} = 0,06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $m = 250 \text{ g} = 0,25 \text{ kg}$; $\omega_0 = 20 \text{ rpm} = 2,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$r_0 = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m}$; $r = 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$

— Aplicamos o principio de conservación do momento angular:

$$L_0 = L; I_0 \omega_0 = I \omega; (I_{\text{pat.}} + 2mr_0^2) \omega_0 = (I_{\text{pat.}} + 2mr^2) \omega$$

$$\omega = \frac{(I_{\text{pat.}} + 2mr_0^2)}{I_{\text{pat.}} + 2mr^2} \omega_0 = \frac{(0,06 + 2 \cdot 0,25 \cdot 0,8^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{(0,06 + 2 \cdot 0,25 \cdot 0,4^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \cdot 2,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega = 2,71 \cdot 2,10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 5,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

ACTIVIDADES

- Unha plataforma circular, sobre a que hai unha persoa, xira respecto do seu eixe. Explica como variará a velocidade do conxunto se a persoa se despraza en dirección radial cara ao centro da plataforma.
- Un disco de 30 cm de raio e 0,4 kg de masa xira ao redor do seu eixe a 3 voltas/s. Déixase caer outro disco de 20 cm de raio e 0,2 kg de masa, inicialmente en repouso, de xeito coaxial sobre el. Calcula a velocidade angular final do conxunto.

Sol.: 2,45 voltas/s = 15,4 rad/s

- Unha rapaza atópase no centro dunha plataforma que xira a 30 rpm. En cada unha das súas mans, situadas a 70 cm do eixe, sostén unha masa de 350 g. Se o momento de inercia da plataforma coa rapaza é de $120 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, e non varía, calcula a que velocidade xirará o conxunto cando ela baixe os brazos ata que as súas mans estean a 35 cm do eixe.

Sol.: 30,06 rpm = 3,15 rad/s

- Investiga e propón unha experiencia que permita observar a conservación do momento angular.

Velocidade máxima

A velocidade dun automóbil débelle permitir ao seu condutor deter o vehículo dentro da distancia de seguridade ante calquera incidente. Se aumenta a velocidade, tamén o fan a distancia de reacción e a de freado, polo que o condutor deberá gardar unha distancia de seguridade maior.

Circular a unha velocidade excesiva é extremadamente perigoso, pois se o condutor non logra deter o vehículo dentro da distancia de seguridade, producirase unha colisión con consecuencias que poden ser funestas.

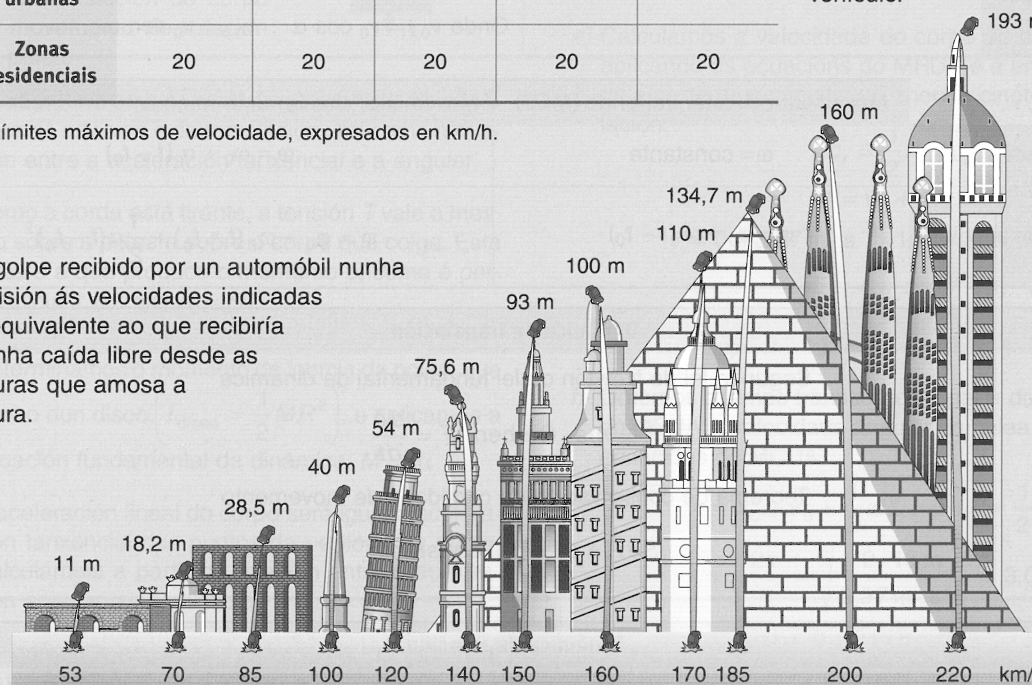


O coñecido sinal de tráfico que indica a velocidade máxima permitida axúdalle ao condutor a manter a súa velocidade dentro dunhas marxes de seguridade. Este límite depende da vía pola que se circula e do tipo de vehículo.

	Turismos e motocicletas	Autobuses e mixtos	Camións e articulados	Automóviles con remolque	Bicicletas e ciclomotores
Autoestradas e autovías	120	100	90	80	40 Só autovías
Vías rápidas	100	90	80	80	40
Outras estradas	90	80	70	70	40
Vías urbanas	50	50	50	50	40
Zonas residenciais	20	20	20	20	20

■ Límites máximos de velocidade, expresados en km/h.

O golpe recibido por un automóbil nunha colisión ás velocidades indicadas é equivalente ao que recibiría nunha caída libre desde as alturas que amosa a figura.



■ Normalmente, o choque prodúcese a menos velocidade, xa que os condutores frean ante a inminencia do choque.

Reflexiona

- Escrebe a fórmula física que relaciona a velocidade do impacto coa altura da caída libre e calcula a velocidade do impacto dun automóbil ao caer desde o punto máis alto da estatua da Liberdade (92 m), do Taj Mahal (95 m) ou do segundo piso da torre Eiffel (116 m).
- Pescuda en xornais recentes e di que porcentaxe dos accidentes de tráfico ocorridos na estrada está causada por un exceso de velocidade.

RESUMO DE FÓRMULAS

	Movimento rectilíneo uniforme (MRU)	Movimento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)
Ecuación da velocidade	$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt = v_0 + 0$ $v = v_0 = \text{constante}$	$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt$ $v = v_0 + a(t - t_0)$
Ecuación da posición	$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt$ $x = x_0 + v(t - t_0)$	$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt$ $x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$

	Composición de dous MRU perpendiculares	Movimento parabólico
Ecuacións da posición e da velocidade	Eixe X: MRU $x = x_0 + v_x(t - t_0)$ Eixe Y: MRU $y = y_0 + v_y(t - t_0)$	Eixe X: MRU $x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$; $v_x = v_{0x} = \text{constante}$ Eixe Y: MRUA $y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$ $v_y = v_{0y} - g(t - t_0)$ Onde $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$; $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$

	Movimento circular uniforme (MCU)	Movimento circular uniformemente acelerado (MCUA)
Velocidade angular	$\omega = \text{constante}$	$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$
Posición angular	$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$

Dinámica de translación

Segunda lei de Newton ou lei fundamental da dinámica

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{Ou ben} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teorema de conservación da cantidade de movemento

$$\text{Se } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constante}$$

Dinámica de rotación

Momento dunha forza

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Momento de inercia

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad I = \int_M r^2 dm$$

sólido rixido
discreto

sólido rixido
continuo

Momento cinético ou angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Ecuación fundamental da dinámica de rotación

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}$$

Teorema de conservación do momento angular

$$\text{Se } \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constante}$$

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS E PROBLEMAS

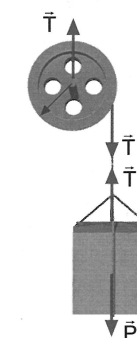
A

Unha polea en forma de disco de 15 cm de raio e 2 kg de masa ten un suco na súa periferia no que se atopa enroscada unha corda de masa desprezable.

Se do final da corda colga un corpo de 0,5 kg de masa, calcula: a) o momento da forza sobre a polea; b) a aceleración angular da polea; c) a aceleración do corpo; d) a tensión da corda; e) a velocidade do corpo aos 10 s, se parte do repouso, e a súa enerxía cinética nese momento; f) a velocidade angular da polea cando o corpo caeu 15 m.

- Datos: $m_p = 2 \text{ kg}$
 $R_p = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$
 $m_c = 0,5 \text{ kg}$
 $t = 10 \text{ s}$
 $x = 15 \text{ m}$

— O enunciado propónnos a combinación do movemento de translación do corpo co movemento de rotación da polea.



Escribimos as ecuacións fundamentais da dinámica de rotación e de translación, así como a relación entre a aceleración tanxencial e a angular.

a) Como a corda está tirante, a tensión T vale o mesmo sobre a polea e sobre o corpo que colga. Esta forza é a que produce o momento e, como é perpendicular ao raio: $M = RT$

b) Determinamos o momento de inercia da polea, que será o dun disco ($I_{\text{disco}} = \frac{1}{2}MR^2$), e aplicamos a ecuación fundamental da dinámica: $M = I\alpha$

c) A aceleración lineal do corpo será igual á aceleración tanxencial dos puntos da periferia da polea. Calculámola a partir da relación entre a aceleración angular e a tanxencial: $a = a_t = \alpha R$

d) Aplicamos a ecuación fundamental da dinámica de translación: $F = p - T = m_c a$

As catro ecuacións anteriores forman un sistema con catro incógnitas, que resolvemos:

$$\begin{cases} M = RT \\ M = I\alpha \end{cases} \Rightarrow RT = I\alpha; T = \frac{I\alpha}{R}$$

$$a = \alpha R$$

$$p - T = m_c a; p - \frac{I\alpha}{R} = m_c \alpha R$$

$$\alpha = \frac{pR}{m_c R^2 + I}$$

$$I_{\text{disco}} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} (0,15 \text{ m})^2 = 0,0225 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$p = m_c g = 0,5 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 4,9 \text{ N}$$

$$\alpha = \frac{pR}{m_c R^2 + I} = \frac{4,9 \text{ N} \cdot 0,15 \text{ m}}{0,5 \text{ kg} (0,15 \text{ m})^2 + 0,0225 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

$$\alpha = 21,78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a = \alpha R = 21,78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,15 \text{ m} = 3,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$T = \frac{I\alpha}{R} = \frac{0,0225 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 21,78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}}{0,15 \text{ m}} = 3,27 \text{ N}$$

$$M = RT = 0,15 \text{ m} \cdot 3,27 \text{ N} = 0,49 \text{ N} \cdot \text{m}$$

e) Calculamos a velocidade do corpo ao cabo de 10 s aplicando as ecuacións do MRUA e a enerxía cinética a partir da definición de enerxía cinética de translación:

$$Ec_t = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$v = 0 + 3,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 10 \text{ s} = 32,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Ec_t = \frac{1}{2}mv^2$$

$$Ec_t = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \text{ kg} \cdot (32,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 267,3 \text{ J}$$

f) Obtemos o tempo transcorrido a partir das ecuacións do MRUA; a velocidade angular da polea, a partir das ecuacións do MCUA.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \text{ m}}{3,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 3,03 \text{ s}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + 21,78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 3,03 \text{ s} = 66,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

42. Un cilindro de 5 kg de masa e 0,75 m de raio leva enroscada na súa periferia unha corda mediante a cal se exerce unha forza de 20 N. Calcula:

- a) O momento da forza.
b) A súa aceleración angular.
c) A súa velocidade angular ao cabo de 3 min.

Sol.: a) 15 N/m; b) 10,67 rad/s²; c) 1 921 rad/s

43. Unha polea de 1 kg de masa e 25 cm de raio con forma de disco leva enroscada na súa periferia unha corda da que colga un corpo de 2 kg. Calcula:

- a) A aceleración angular da polea e a aceleración lineal do corpo.
b) A tensión da corda.
c) A velocidade do corpo aos 20 s de deixalo libre.

Sol.: a) 31,4 rad/s²; b) 7,8 m/s²; c) 3,9 N; d) 157 m/s

Pensa e resolve

44. Explica a diferenza entre vector desprazamento e distancia percorrida.
— En que caso coincide o módulo do vector desprazamento coa distancia percorrida?
45. A aceleración dun móbil é constante en módulo e perpendicular á súa traxectoria en todo momento. Que clase de movemento segue o móbil?
46. Describe e representa as seguintes forzas e indica onde están aplicadas as forzas de reacción: a) a normal; b) o rozamento que se opón ao desprazamento dunha mesa sobre o chan; c) a tensión que exerce unha corda sobre un bloque.
47. Un ciclista circula sobre unha pista circular peraltada. Debuxa o esquema das forzas que actúan sobre o ciclista e explica por que non cae.
48. Unha masa puntual describe unha traxectoria circular. a) Se a súa cantidade de movemento se reduce á metade, como variará o seu momento angular? b) Se o raio do círculo se triplica mentres se mantén constante a velocidade lineal, como variará o seu momento angular? Xustifica as túas respostas.

Practica o aprendido

49. A ecuación do movemento dun móbil é:
 $\vec{r}(t) = (t^2 - 3t)\vec{i} + (2t^2 + 4t)\vec{j}$, en unidades SI.
Calcula: a) a velocidade media entre os instantes $t = 1$ s e $t = 2$ s; b) a velocidade instantánea; c) a aceleración media entre os instantes $t = 1$ s e $t = 2$ s; d) a aceleración instantánea.
Sol.: a) $6\vec{j}$ m/s; b) $(2t - 3)\vec{i} + 4t\vec{j}$, en unidades SI; c) $(2\vec{i} + 4\vec{j})$ m/s²; d) $(2\vec{i} - 4\vec{j})$ m/s²
50. A aceleración dun movemento rectilíneo é $\vec{a} = 6t\vec{i}$. Calcula o vector velocidade e o vector de posición en función do tempo, sabendo que no instante inicial $\vec{v}_0 = -8\vec{i}$ m/s e $\vec{r}_0 = 9\vec{i}$ m.
Sol.: $\vec{v}(t) = (3t^2 - 8)\vec{i}$ m/s, $\vec{r}(t) = (t^3 - 8t + 9)\vec{i}$ m
51. Desde o chan lánzase unha pedra verticalmente cara a arriba cunha velocidade de 30 m/s. No mesmo momento, déixase caer outra pedra desde unha altura de 20 m. Determina a que altura e en que momento se atopan.
Sol.: 17,8 m, 0,67 s
52. Un avión voa en dirección sur-norte a 810 km/h cando comeza a soprar vento de 144 km/h en dirección oeste-leste. Calcula: a) o tempo que tarda o avión en avanzar 1 km en dirección Norte; b) a distancia que percorre neste tempo respecto da Terra; c) a ecuación da traxectoria.
Sol.: a) 4,4 s; b) 1015,4 m; c) $y = \frac{45x}{8}$

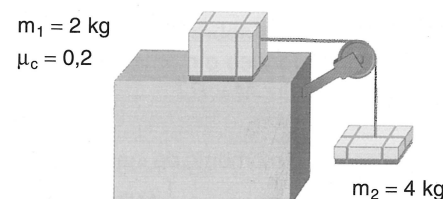
53. Lánzase unha pelota desde unha terraza situada a 20 m de altura cunha velocidade de 10 m/s que forma un ángulo de 45° coa horizontal. Determina:
a) O tempo que tarda en chegar ao chan;
b) A ecuación da súa traxectoria;
c) Se chocase cunha parede de 10 m de altura situada a 20 m da vertical da terraza.
Sol.: a) 2,9 s; b) $y = 20 + x - 0,1x^2$
54. Unha roda de 20 cm de raio xira a 20 rpm. Calcula: a) a velocidade angular en rad/s; b) a velocidade lineal dos puntos da periferia e dos que están a 5 cm do centro; c) o ángulo descrito en 10 s, expresado en radiáns, e o número de voltas efectuadas neste tempo.

Sol.: a) $\frac{2\pi}{3}$ rad/s; b) 0,42 m/s, 0,10 m/s; c) $\frac{20\pi}{3}$ rad, 3,3 voltas

55. Unha escopeta de feira de 2 kg dispara unha bala de 10 g cunha velocidade de 150 m/s. Calcula a velocidade de retroceso da escopeta.

Sol.: 0,75 m/s

56. Debuxa o esquema das forzas que actúan sobre os corpos da figura e calcula a aceleración do sistema e a tensión da corda.

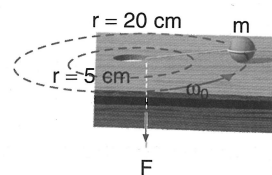


Sol.: 5,9 m/s², 15,6 N

57. Calcula o momento de inercia dunha pelota de tenis respecto dun eixe que pase polo seu centro, se a súa masa é de 60 g, o seu raio de 8 cm e é oca por dentro.

Sol.: $2,56 \cdot 10^{-4}$ kg·m²

58. Un obxecto puntual de 150 g de masa está atado a unha corda que pasa por un burato practicado nunha mesa. O obxecto xira sobre a mesa unhas tres voltas por segundo cando $r = 20$ cm.



Se mediante a forza F , aplicada sobre a corda, acurtamos r ata que mida 5 cm, calcula a velocidade angular do obxecto nese momento.

Sol.: 48 voltas/s

59. Desde dúas vilas, A e B, que distan 2 km, saen ao encontro dous automóviles. O primeiro parte de A desde o repouso cunha aceleración de 2 m/s². O segundo sae de B 2 s máis tarde cunha velocidade constante de 72 km/h. Calcula o tempo que tardan en atopárense e a súa posición nese instante.

Sol.: 36,3 s, 1314,8 m desde a saída do primeiro

60. Unha curva dun velódromo ten 50 m de raio. Supoñendo que non existe rozamento, calcula:

a) A máxima velocidade coa que un ciclista pode tomar a curva sen derrapar se está peraltada un ángulo de 30°.

b) O ángulo de peralte necesario para que o ciclista poida tomar a curva a unha velocidade de 80 km/h.

Sol.: a) 16,8 m/s; b) 45°

AVALIACIÓN

1. A aceleración dun movemento rectilíneo vén dada pola ecuación $\vec{a} = (12t^2 - 6t)\vec{i}$. Calcula a ecuación da velocidade e a ecuación da posición en función do tempo, sabendo que no instante inicial $\vec{v}_0 = 5\vec{i}$ m/s e $\vec{r}_0 = -5\vec{i}$ m.

Sol.: $\vec{v} = (4t^3 - 3t^2 + 5)\vec{i}$; $\vec{r} = (t^4 - t^3 + 5t - 5)\vec{i}$, en unidades SI

2. Lánzase un proxectil desde 10 m de altura cunha velocidade inicial de 360 km/h que forma un ángulo de 40° coa horizontal. Calcula:

a) A altura máxima.

b) A posición 3 s despois do lanzamento.

c) O alcance.

Sol.: a) 220,9 m; b) (229,8 m, 158,8 m); c) 1017,2 m

3. Canto tardará en parar un disco que xira a 60 rpm se empeza a frear cunha aceleración angular constante de 2 rad/s²?

Sol.: 3,14 s

4. Explica as características principais das forzas de acción e reacción.

5. Un patinador de 75 kg de masa, que está parado no centro dunha pista de xeo, lanza un disco de 300 g cunha velocidade de 12 m/s. Que velocidade terá o patinador inmediatamente despois do lanzamento?

Sol.: $4,8 \cdot 10^{-2}$ m/s

61. Prepara nunha folia de cálculo un miniprograma para calcular o ángulo de tiro correspondente a un alcance dado cando o punto de lanzamento e o de caída están ao mesmo nivel. Procede do seguinte xeito.

a) Deduce unha fórmula que nos dea o ángulo de lanzamento en función do alcance.

b) Define as celas de entrada (g; módulo da velocidade inicial, alcance).

c) Introduce unha fórmula coa que calculemos o ángulo de tiro a partir das celas de entrada.

62. Elabora mediante os recursos de animación dun programa de presentación unha simulación: a) dun movemento uniforme; b) dun movemento uniformemente acelerado; c) dun movemento parabólico.

O resultado da simulación debe asemellarse a unha fotografía de destello múltiple do movemento.

6. Un obxecto de 150 g unido ao extremo dunha corda xira sobre unha mesa horizontal con MCU de raio 20 cm. A corda pasa por un burato practicado na mesa e está unida polo outro extremo a un corpo de 1,5 kg que está en repouso.

a) Debuxa un esquema das forzas que actúan sobre cada corpo.

b) Calcula a velocidade lineal con que xira o corpo que está sobre a mesa e a compoñente tanxencial e a normal da aceleración.

Sol.: b) 4,4 m/s; $a_t = 0$ m/s², $a_n = 96,8$ m/s²

7. Pon algún exemplo de movemento no que se cumpra o teorema de conservación do momento angular e descríbeo.

8. Calcula o momento de inercia da Terra no seu xiro ao redor do Sol. Para iso, considera a Terra un corpo puntual de $6 \cdot 10^{24}$ kg de masa que xira nunha órbita circular de $1,5 \cdot 10^8$ km de raio ao redor do Sol.

Sol.: $1,35 \cdot 10^{47}$ kg·m²

9. Un disco circular en repouso de 0,5 m de raio e $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia leva unha corda sen masa enroscada na súa periferia. Se tiramos da corda cunha forza constante de 2 N e o rozamento é desprezable, calcula: a) a aceleración angular do disco; b) a lonxitude de corda desenroscada ao cabo de 10 s.

Sol.: a) 1 rad/s²; b) 25 m