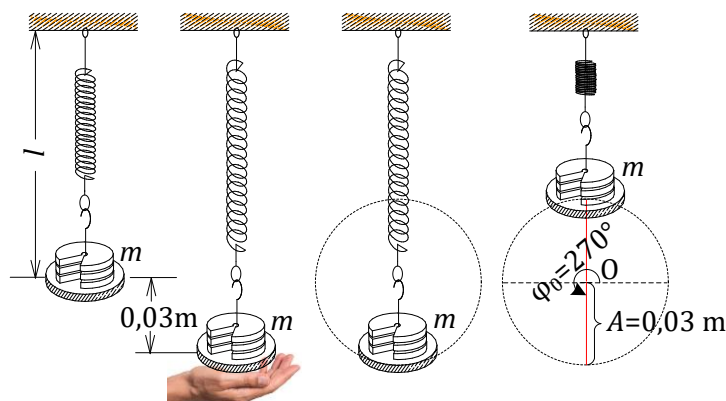


VIBRACIÓNS E ONDAS. PROBLEMAS

1. Unha masa m colga dun resorte, que se estira $0,03\text{ m}$ na dirección vertical e se solta en $t = 0$, deixándoo oscilar libremente, co resultado dunha oscilación cada $0,2\text{ s}$. Calcula:

- A velocidade do extremo libre ao cabo de 19 s .
- A aceleración do extremo libre ao cabo de 19 s . (Considérase que o amortecemento é desprezable).
- Representa graficamente a variación da velocidade e aceleración co tempo.



a) O resorte, ao quedar en liberdade, describe un MHS, tendo por elongación y a expresión: $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$, onde A é a amplitude, ω a frecuencia angular e φ_0 a fase inicial, que calculamos a partir das condicións iniciais:

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t=0 \rightarrow y=-A} -A = A \cdot \sin(0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

A velocidade é a derivada da elongación con respecto ao tempo:

$$v = \frac{dy}{dt} \xrightarrow{y = A \cdot \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)} v = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \xrightarrow[\omega = \frac{2\pi}{T} \quad T=0,2\text{s} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi \text{ s}^{-1}]{A=0,03\text{ m} \quad t=19\text{ s}} v = 0,03 \cdot 10 \cdot \pi \cdot \cos\left(10 \cdot \pi \cdot 19 + \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \text{ m s}^{-1}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{0} \text{ (m s}^{-1}\text{)}}$$

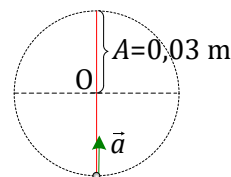
b) A aceleración é a derivada da velocidade con respecto ao tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{v = 0,3 \cdot \pi \cdot \cos\left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right)} a = -0,3 \cdot \pi \cdot 10 \cdot \pi \cdot \sin\left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

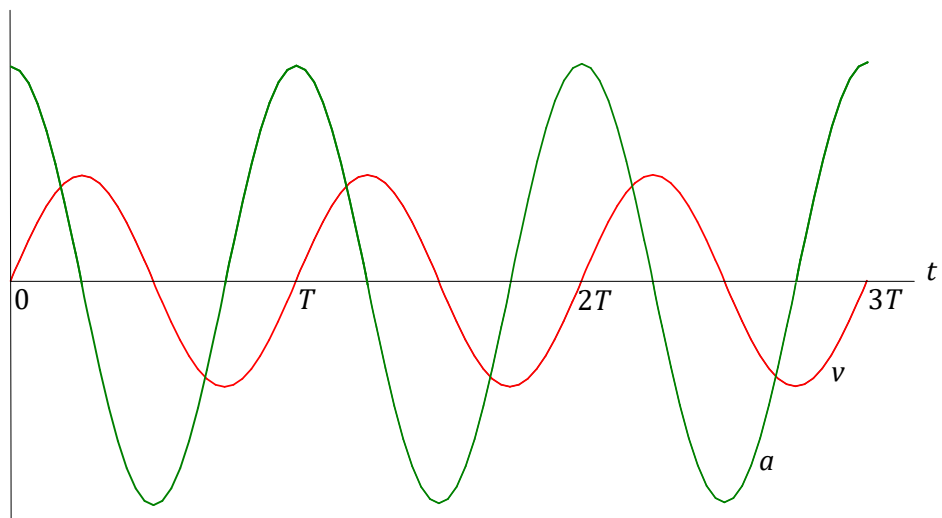
$$a = -0,3 \cdot \pi \cdot 10 \cdot \pi \cdot \sin\left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right) \xrightarrow{t=19\text{s}} a = -0,3 \cdot \pi \cdot 10 \cdot \pi \cdot \sin\left(10 \cdot \pi \cdot 19 + \frac{3\pi}{2}\right) = 29,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\boxed{\vec{a} = 29,6 \vec{j} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}}$$

Transcorrido o tempo $t = 19\text{ s}$, a masa m colgada do resorte atópase na situación inicial, xa que $t = 19\text{ s}$ é un número n enteiro de períodos T : $t = n \cdot T \rightarrow n = 19/0,2 = 95$, sendo a súa velocidade nula e a súa aceleración máxima.



c) As representacións gráficas da velocidade e da aceleración en función do tempo serían como as seguintes:



2. Un corpo de 50 g de masa, sometido a un movemento harmónico simple, realiza 10 oscilacións por segundo. Calcula:

- A aceleración no centro de oscilación.
- A aceleración nun dos seus extremos, sabendo que a amplitude do movemento é de 9 cm.
- A enerxía cinética no centro de oscilación.

a) A ecuación da elongación y do movemento harmónico simple é: $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$, onde A é a amplitude, ω a frecuencia angular e φ_0 a fase inicial.

A velocidade v é a derivada da elongación con respecto ao tempo:

$$v = \frac{dy}{dt} \xrightarrow{y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)} v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

E a aceleración a é a derivada da velocidade con respecto ao tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)} a = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)} a = -\omega^2 \cdot y \rightarrow \begin{cases} a = \omega^2 \cdot y \\ \vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{y} \end{cases}$$

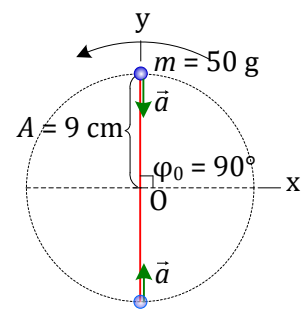
$$a = \omega^2 \cdot y \xrightarrow{\text{Centro de oscilación: } y = 0 \text{ m}} a = 0 \text{ m s}^{-2}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{y} \xrightarrow{\text{Centro de oscilación: } y = 0 \text{ m}} \boxed{\vec{a} = 0 \vec{j} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}}$$

b)

$$a = \omega^2 \cdot y \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T = \frac{t}{n} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ s}} \omega = \frac{2\pi}{0,1} = 20\pi \text{ s}^{-1}} \xrightarrow{\text{Extremos de oscilación: } y = A = 9 \text{ cm}} a = (20 \cdot \pi)^2 \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 3,55 \cdot 10^2 \text{ m s}^{-2}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{y} \rightarrow \begin{cases} \text{Extremos de oscilación: } y = A = 9 \text{ cm} \rightarrow \boxed{\vec{a} = -3,55 \cdot 10^2 \vec{j} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}} \\ \text{Extremos de oscilación: } y = -A = -9 \text{ cm} \rightarrow \boxed{\vec{a} = 3,55 \cdot 10^2 \vec{j} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}} \end{cases}$$



c) No centro de oscilación, toda a enerxía mecánica está en forma de enerxía

$$\text{cinética: } E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - y^2) \xrightarrow{\text{centro de oscilación, } y = 0} E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

$$\left. \begin{aligned} k &= m \cdot \omega^2 \xrightarrow{m = 50 \cdot 10^{-3} \text{ kg}, \omega = 20 \cdot \pi \text{ s}^{-1}} k = 50 \cdot 10^{-3} \cdot (20 \cdot \pi)^2 = 197,4 \text{ N m}^{-1} \\ A &= 9 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{aligned} \right\} \rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot 197,4 \cdot (9 \cdot 10^{-2})^2 = 0,80 \text{ J}$$

$$\boxed{E_k = 0,80 \text{ J}}$$

3. Un corpo de 10 g de masa desprázase cun movemento harmónico simple de 80 Hz de frecuencia e de 1 m de amplitude. Acha:

a) A enerxía potencial cando a elongación é igual a 70 cm.

b) O módulo da velocidade cando se atopa nesa posición.

c) O módulo da aceleración nesa posición.

a)

$$\left. \begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 \xrightarrow{y=70 \cdot 10^{-2} \text{ m}} E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (70 \cdot 10^{-2})^2 \\ k &= m \cdot \omega^2 \xrightarrow[\omega = 2\pi f \xrightarrow{f=80 \text{ Hz}} \omega = 160\pi \text{ rad s}^{-1}]{m=10 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} k = 10 \cdot 10^{-3} \cdot (160\pi)^2 = 2526,6 \text{ N m}^{-1} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{E_p = 619,0 \text{ J}}$$

b) $E_{\text{total}} = E_k + E_p = E_{k \text{ máxima}} = E_{p \text{ máxima}}$.

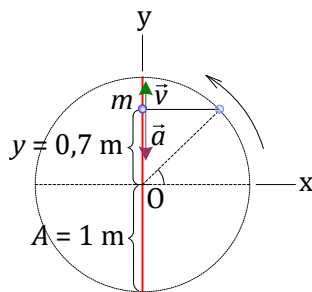
$$\left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ E_k &= E_{\text{total}} - E_p \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_{\text{total}} - E_p \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot (E_{\text{total}} - E_p)}{m}}$$

$$E_{\text{total}} = E_{p \text{ máx.}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \xrightarrow[A=1 \text{ m}]{k=2526,6 \text{ N m}^{-1}} E_{p \text{ máx.}} = \frac{1}{2} \cdot 2526,6 \cdot 1^2 = 1263,3 \text{ J}$$

$$E_p|_{y=70 \text{ cm}} = 619,0 \text{ J}$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot (1263,3 - 619,0)}{10 \cdot 10^{-3}}} \quad \boxed{v = 3,60 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

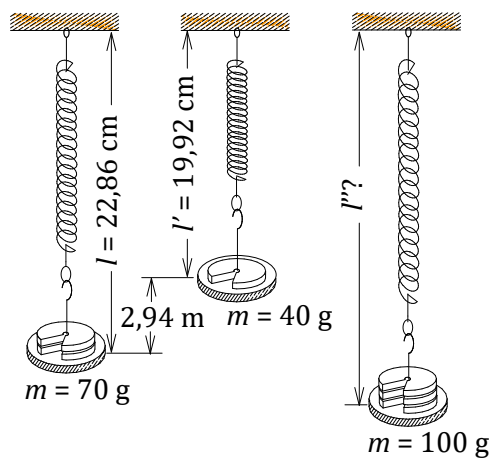
c) $a = \omega^2 \cdot y \xrightarrow[\omega = 2\pi f \xrightarrow{f=80 \text{ Hz}} \omega = 160\pi \text{ rad s}^{-1}]{y=0,70 \text{ m}} a = (160\pi)^2 \cdot 0,70 \rightarrow \boxed{a = 1,77 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-2}}$



4. Un resorte mide 22,86 cm cando se lle colga unha masa de 70 g e 19,92 cm cando se lle colga unha masa de 40 g. Acha:

- A constante do resorte.
- A frecuencia das oscilacións se se lle colga unha masa de 80 g
- A lonxitude do resorte ao colgarlle unha masa de 100 g.

Dato: $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.



a)

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_{\text{recuperadora}} &= -k \cdot \Delta \vec{l} \\ \vec{F}_{\text{aplicada}} &= -\vec{F}_{\text{recuperadora}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{F}_{\text{aplicada}} = k \cdot \Delta \vec{l}$$

$$F = k \cdot \Delta l \xrightarrow[\Delta l = (22,86 - 19,92) \cdot 10^{-2} = 2,94 \cdot 10^{-2} \text{ m}]{F = (70 - 40) \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 = 2,94 \cdot 10^{-1} \text{ N}} 2,94 \cdot 10^{-1} = k \cdot 2,94 \cdot 10^{-2} \rightarrow \boxed{k = 10 \text{ N m}^{-1}}$$

$$b) \quad v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow[\frac{k = 10 \text{ N m}^{-1}}{m = 80 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}]{} v = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{10}{80 \cdot 10^{-3}}} \rightarrow \boxed{v = 1,78 \text{ Hz}}$$

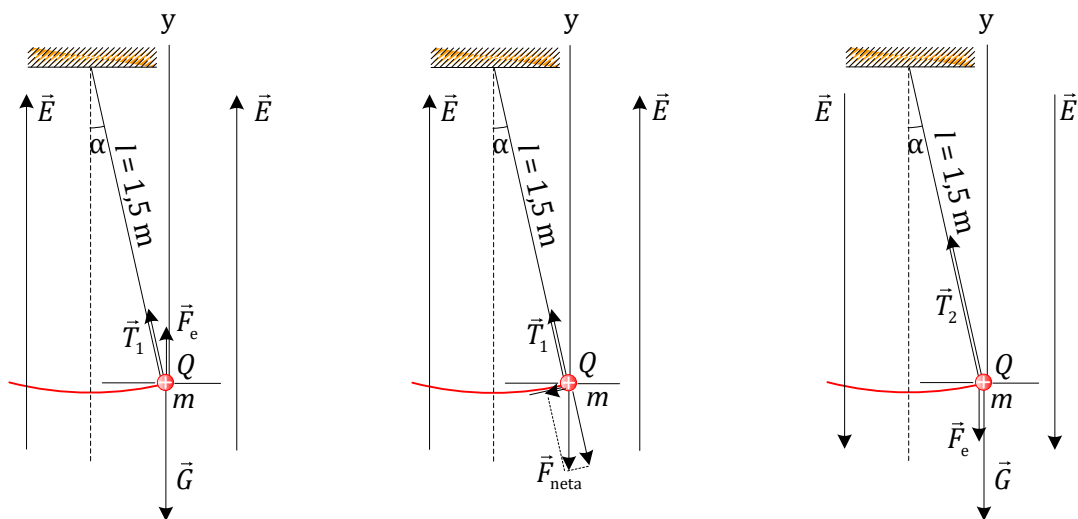
c)

$$F = k \cdot (l - l_0) \xrightarrow[\frac{k = 10 \text{ N m}^{-1}}{l = 22,86 \cdot 10^{-2} \text{ m}}]{F = 70 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 = 6,86 \cdot 10^{-1} \text{ N}} 6,86 \cdot 10^{-1} = 10 \cdot (22,86 \cdot 10^{-2} - l_0) \rightarrow l_0 = 1,6 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

$$F = k \cdot (l'' - l_0) \xrightarrow[\frac{k = 10 \text{ N m}^{-1}}{l_0 = 1,6 \cdot 10^{-1} \text{ m}}]{F = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 = 9,8 \cdot 10^{-1} \text{ N}} 9,8 \cdot 10^{-1} = 10 \cdot (l'' - 1,6 \cdot 10^{-1}) \rightarrow \boxed{l'' = 25,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

5. Un péndulo eléctrico está formado por unha esfera metálica de 1 g colgada dun fío moi fino de 1'5 m. Faise oscilar nunha rexión na que existe un campo eléctrico uniforme vertical e cárgase a esfera con $+1,3 \cdot 10^{-8}$ C. Cando o campo é vertical de abaixo arriba, a esfera efectúa 100 oscilacións en 314 s e se o campo está dirixido de arriba abaixo, tarda 207 s en dar 100 oscilacións. Calcula:

- Intensidade do campo eléctrico.
 - Valor de "g" no lugar da experiencia.
 - O período do péndulo se a experiencia se fai na Lúa, en ausencia de campo electrostático.
- (Dato: $g_L = 1,63 \text{ m s}^{-2}$)



a)

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{a_1}} \\ T_1 &= \frac{t_1}{n} = \frac{314 \text{ s}}{100 \text{ oscilacións}} \rightarrow T = \frac{314}{100} = 3,14 \text{ s} \\ l &= 1,5 \text{ m} \end{aligned} \right\} \rightarrow 3,14 = 2\pi \sqrt{\frac{1,5}{a_1}} \rightarrow a_1 = 6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{a_2}} \\ T_2 &= \frac{t_2}{n} = \frac{207 \text{ s}}{100 \text{ oscilacións}} \rightarrow T_2 = \frac{207}{100} = 2,07 \text{ s} \\ l &= 1,5 \text{ m} \end{aligned} \right\} \rightarrow 2,07 = 2\pi \sqrt{\frac{1,5}{a_2}} \rightarrow a_2 = 13,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\left. \begin{aligned} m \cdot g - Q \cdot E &= m \cdot a_1 \xrightarrow{\substack{m = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \\ Q = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ C} \\ a_1 = 6,0 \text{ m s}^{-2}}} 1 \cdot 10^{-3} \cdot g - 1,3 \cdot 10^{-8} \cdot E = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 6,0 \\ m \cdot g + Q \cdot E &= m \cdot a_2 \xrightarrow{\substack{m = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \\ Q = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ C} \\ a_2 = 13,82 \text{ m s}^{-2}}} 1 \cdot 10^{-3} \cdot g + 1,3 \cdot 10^{-8} \cdot E = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 13,82 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} E = 3 \cdot 10^5 \text{ N/C} \\ g = 9,9 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

b) $g = 9,9 \text{ m/s}^2$

$$c) T_{\text{Lúa}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{\text{Lúa}}}} \xrightarrow{\substack{l = 1,5 \text{ m} \\ g_{\text{Lúa}} = 1,63 \text{ m s}^{-2}}} T_{\text{Lúa}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,5}{1,63}} \rightarrow T = 6,0 \text{ s}$$

6. Un punto material de 20 g de masa oscila cun M.H.S de amplitude 2 cm e frecuencia 10 Hz, coincidindo o inicio dos tempos co punto onde a velocidade é nula. Calcula:

- O módulo da velocidade e da aceleración máximas.
- O módulo da velocidade e da aceleración no instante $t = 1/120$ s
- A enerxía mecánica nese instante.

$$a) \quad v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2} \xrightarrow{\text{para } y = 0 \rightarrow v = v_{\text{máx.}}} v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A$$

$$\left. \begin{array}{l} v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A \\ \omega = 2\pi f \xrightarrow{f=10\text{ s}^{-1}} \omega = 2\pi 10\text{ s}^{-1} \\ A = 2 \cdot 10^{-2}\text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow v_{\text{máx.}} = 2\pi \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \rightarrow \boxed{v_{\text{máx.}} = 0,4\pi\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$a = \omega^2 \cdot y \xrightarrow{\text{para } y = A \rightarrow a = a_{\text{máx.}}} a_{\text{máx.}} = \omega^2 \cdot A$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{\text{máx.}} = \omega^2 \cdot A \\ \omega = 2\pi f \xrightarrow{f=10\text{ s}^{-1}} \omega = 2\pi 10\text{ s}^{-1} \\ A = 2 \cdot 10^{-2}\text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow a_{\text{máx.}} = (2\pi \cdot 10)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \rightarrow \boxed{a_{\text{máx.}} = 8\pi^2\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

$$b) \quad v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_{t=1/120\text{ s}} = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\substack{A=2 \cdot 10^{-2}\text{ m} \\ \omega=20\pi\text{ s}^{-1} \\ t=1/120\text{ s}}} y_{t=1/120\text{ s}} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\left(20\pi \cdot \left(\frac{1}{120}\right) + \varphi_0\right) \\ y = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t=0 \rightarrow \begin{cases} y=A \text{ ou} \\ y=-A \end{cases}} \left\{ \begin{array}{l} A = A \text{ sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{ rad} \\ -A = A \text{ sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}\text{ rad} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \rightarrow y = 1,7 \cdot 10^{-2}\text{ m}$$

$$v|_{t=1/120\text{ s}} = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2} \xrightarrow{\substack{\omega=20\pi\text{ s}^{-1} \\ A=2 \cdot 10^{-2}\text{ m} \\ y=1,7 \cdot 10^{-2}\text{ m}}} v|_{t=1/120\text{ s}} = 20\pi \cdot \sqrt{(2 \cdot 10^{-2})^2 - (1,7 \cdot 10^{-2})^2} \rightarrow \boxed{v|_{t=1/120\text{ s}} = 6,6\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$a|_{t=1/120\text{ s}} = \omega^2 \cdot y \xrightarrow{\substack{\omega=20\pi\text{ s}^{-1} \\ y=1,7 \cdot 10^{-2}\text{ m}}} a|_{t=1/120\text{ s}} = (20\pi)^2 \cdot 1,7 \cdot 10^{-2} \rightarrow \boxed{a|_{t=1/120\text{ s}} = 67,1\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ k = m\omega^2 \xrightarrow{\substack{m=20 \cdot 10^{-3}\text{ kg} \\ \omega=20\pi\text{ s}^{-1}}} k = 20 \cdot 10^{-3} \cdot (20\pi)^2\text{ N/m} \end{array} \right\} \xrightarrow{\substack{k=79,0\text{ N m}^{-1} \\ A=2 \cdot 10^{-2}\text{ m}}} E_m = \frac{1}{2} \cdot 79,0 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 = \boxed{1,6 \cdot 10^{-2}\text{ J}}$$

7. Un péndulo está constituído por unha pequena esfera, de dimensións que consideramos desprezables, de masa 200 g, suspendida dun fío inextensible, e sen masa apreciable, de 2 m de longo. Calcula:

- O período para pequenas amplitudes.
- Supoñamos que no momento de máxima elongación a esfera elévase 15 cm por encima do plano horizontal que pasa pola posición de equilibrio. Calcula a velocidade ao pasar pola vertical.
- Xustifica e representa graficamente as variacións da enerxía cinética e potencial nun movemento harmónico simple. Pode considerarse un m.h.s. o que describe o péndulo nas condicións do apartado b)?

Dato: $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- O período do péndulo simple, supoñendo un movemento harmónico simple, é:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \xrightarrow{l=2\text{m}} T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{9,8}} \rightarrow \boxed{T = 2,84 \text{ s}}$$

- Ao desprezar as perdas de enerxía por rozamento, aplícase o principio de conservación da enerxía mecánica de xeito que no punto máis alto estará toda en forma de E_p e no máis baixo en forma de E_k : E_p inicial = E_k final.

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \xrightarrow{\substack{g=9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ h=0,15 \text{ m}}} v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,15} \rightarrow \boxed{v = 1,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

- A enerxía potencial, $E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$, depende da posición: ten un valor

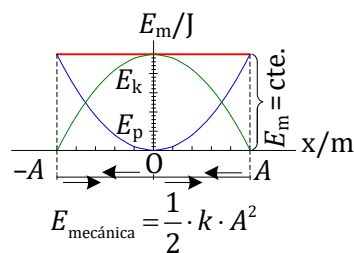
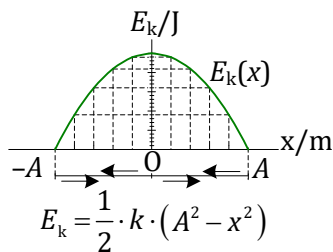
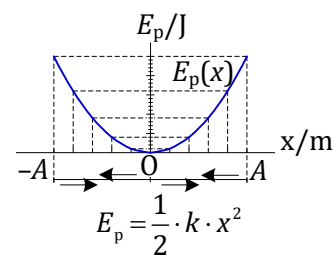
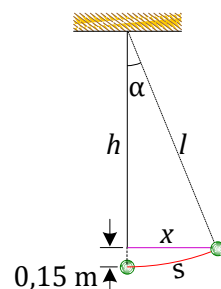
máximo nos extremos: $x = \pm A$, sendo $E_p = (1/2) k A^2$; e mínimo no centro: $x = 0$, sendo $E_p = 0$. A súa variación é parabólica (polinomio en grao dous), coas ramas cara a valores crecentes de E_p (coeficiente en grao dous positivo) e co vértice na orixe (ausencia de termos de grao menor que dous). A súa representación gráfica é a indicada na figura que aparece á marxe.

Na expresión da enerxía potencial elástica vemos que esta é sempre positiva, o que nos di que un resorte almacena enerxía, tanto se se alonga como se se comprime.

A enerxía cinética, $E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2)$, depende da posición: é máxima no centro de oscilación: $x = 0$, sendo $E_k = (1/2) \cdot k \cdot A^2$; e mínima nos extremos: $x = \pm A$, sendo $E_k = 0$. A súa variación é parabólica (polinomio en grao dous), coas ramas cara a valores decrecentes de E_k (coeficiente en grao dous negativo) e co vértice no eixe da E_k e desprazado da orixe (so presenza do termo independente). A representación gráfica é a indicada na figura que aparece á marxe.

A enerxía mecánica, $E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$, permanece constante (se non hai rozamento) xa que a amplitude do movemento permanece constante: durante unha oscilación hai un intercambio continuo de enerxía cinética e potencial elástica, permanecendo constante a súa suma.

Sabemos que a traxectoria do m.h.s. é rectilínea: $\vec{F} = -k \cdot x \vec{i}$. Porén, a traxectoria da masa m é a dun arco de circunferencia, que se podemos confundir coa corda correspondente comportaríase como se fose un m.h.s.



A forza que actúa sobre m é a do seu peso, $\vec{F}_G$, e a da tensión do fío, $\vec{T}$. Descompoñemos o peso en dúas direccións:

- Unha, na dirección do fío (que se anula coa tensión): $m \cdot g \cdot \cos \alpha$.
- Outra, na dirección perpendicular á anterior: $m \cdot g \cdot \sin \alpha$. Esta compoñente é a resultante das forzas que actúan sobre m , orixinando o movemento oscilante do péndulo. Como é esta forza?

$F = m \cdot g \cdot \sin \alpha \xrightarrow{\sin \alpha = \frac{x}{l}} F = m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$. A súa expresión vectorial é:

$\vec{F} = -m \cdot g \cdot \frac{\vec{x}}{l}$: O signo menos indica que o sentido de $\vec{F}$ é contrario ao de $\vec{x}$.

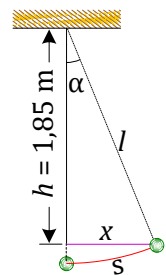
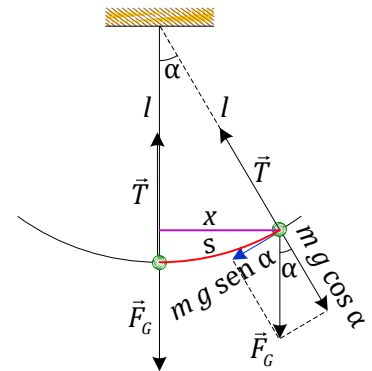
Para pequenos ángulos, a corda s confúndese co arco x e a traxectoria pode considerarse rectilínea e o movemento harmónico simple, sendo $k = m \cdot g/l$:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{x}{l} \\ \alpha = \frac{s}{l} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{se } \sin \alpha = \alpha \text{ (en radiáns)}} x = s$$

Calculamos o valor do ángulo α :

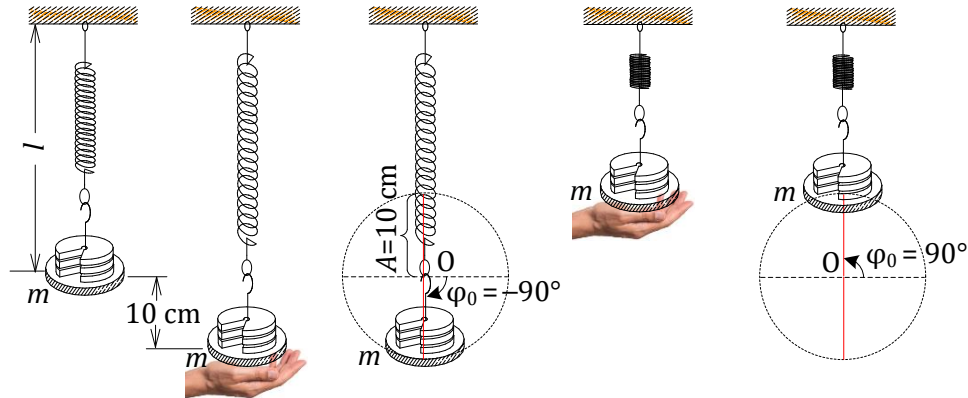
$$\alpha: \cos \alpha = \frac{h}{l} \xrightarrow{\substack{h=2-0,15=1,85 \text{ m} \\ l=2 \text{ m}}} \cos \alpha = \frac{1,85}{2} \rightarrow \alpha = 0,390 \text{ rad} = 22,3^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin 22,3^\circ = 0,380 \\ 22,3^\circ = 0,390 \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow \sin \alpha \neq \alpha, \text{ sendo o erro do } 2,6\%$$



8. Unha masa de 2 kg suxeita a un resorte de constante recuperadora $k = 5 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ sepárase 10 cm da posición de equilibrio e déixase en liberdade. Calcula:

- A ecuación do movemento.
- A aceleración aos 0,1 s de iniciado o movemento.
- A enerxía potencial aos 0,1 s de iniciado o movemento.



- A ecuación do movemento (aquela que relaciona coordenada e tempo) dunha partícula que describe un m.h.s. é: $\vec{y} = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$.

A fase inicial φ_0 obtémola a partir das condicións iniciais:

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t=0} \begin{cases} -y = -A \rightarrow -A = A \cdot \sin(0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = 270^\circ = -90^\circ = -\pi/2 \text{ rad} \\ y = A \rightarrow A = A \cdot \sin(0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad} \end{cases}$$

A frecuencia angular calcúlase a partir da constante elástica do resorte e da masa oscilante:

$$k = m \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow{\frac{k=5 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-1}}{m=2 \text{ kg}}} \omega = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3}{2}} \rightarrow \omega = 50 \text{ s}^{-1}$$

Coas magnitudes calculadas escribimos a ecuación de movemento:

$$\boxed{\vec{y} = 0,10 \cdot \sin\left(50t \pm \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} \text{ (m)}}$$

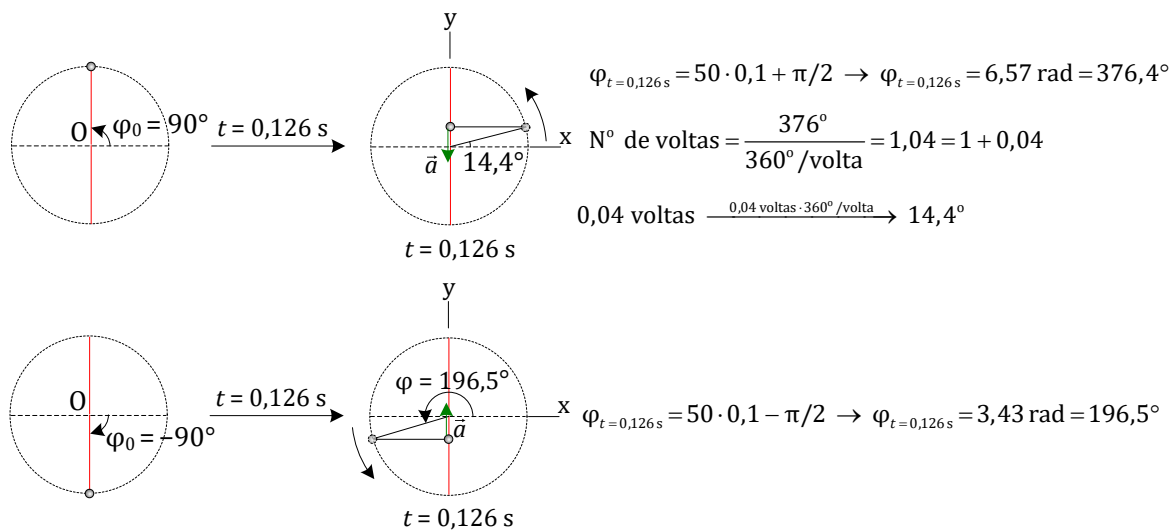
- A aceleración é a derivada da velocidade con respecto ao tempo; e a velocidade é a derivada da elongación con respecto ao tempo:

$$v = \frac{dy}{dt} \xrightarrow{y=0,10 \cdot \sin\left(50t \pm \frac{\pi}{2}\right)} v = 0,10 \cdot 50 \cdot \cos\left(50t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{v=5,0 \cdot \cos\left(50t \pm \frac{\pi}{2}\right)} a = -5,0 \cdot 50 \cdot \sin\left(50t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

Substituíndo para $t = 0,1 \text{ s}$ obtense: $a = 70,9 \text{ m s}^{-2}$.

$$\vec{a} = -5,0 \cdot 50 \cdot \sin\left(5,0 \pm \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} \xrightarrow{\text{para}} \begin{cases} \varphi_0 = \pi/2 \text{ rad} \rightarrow \boxed{\vec{a} = -70,9 \vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \\ \varphi_0 = -\pi/2 \text{ rad} \rightarrow \boxed{\vec{a} = 70,9 \vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \end{cases}$$



c)

$$\left. \begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 \\ k &= 5 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-1} \\ \vec{y} &= 0,10 \cdot \sin\left(50t \pm \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} \xrightarrow{t=0,1 \text{ s}} \vec{y} = \begin{cases} 2,8 \cdot 10^{-2} \vec{j} \text{ (m)} \\ -2,8 \cdot 10^{-2} \vec{j} \text{ (m)} \end{cases} \end{aligned} \right\} \rightarrow E_p = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot (2,8 \cdot 10^{-2})^2 = \boxed{1,96 \text{ J}}$$

9. Un punto material de 500 g describe un MHS de 10 cm de amplitude realizando dúas oscilacións completas cada segundo. Calcula:

- A elongación de dito punto no instante 0,5 s despois de alcanzar a máxima separación.
- A velocidade e aceleración 0,5 s despois de alcanzar a máxima separación.
- A enerxía cinética que terá o punto móbil ao pasar pola posición de equilibrio.

a) A partir da frecuencia f calculamos o período T : $T = \frac{1}{f} \xrightarrow{f=2\text{ Hz}} T = \frac{1}{2} \rightarrow T = 0,5 \text{ s}$.

Como o tempo $t = 0,5 \text{ s}$ é o de un período, a elongación do punto material, transcorrido este tempo t , coincide co valor inicial: $y = A = 10 \text{ cm}$.

Tamén podemos obter a elongación a partir da ecuación do movemento: $\vec{y} = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$.

A frecuencia angular ω calcúlase a partir da frecuencia f :

$$\omega = 2\pi \cdot f \xrightarrow{f=2\text{ Hz}} \omega = 2\pi \cdot 2 \rightarrow \omega = 4\pi \text{ rad s}^{-1}$$

A fase inicial φ_0 obtémola a partir das condicións iniciais:

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t=0} \begin{cases} \xrightarrow{y=-A} -A = A \cdot \sin(0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = 270^\circ = -90^\circ = -\pi/2 \text{ rad} \\ \xrightarrow{y=A} A = A \cdot \sin(0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad} \end{cases}$$

Coas magnitudes calculadas escribimos a ecuación do movemento:

$$\vec{y} = 0,10 \cdot \sin\left(4\pi t \pm \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} \text{ (m)}$$

$$\vec{y} = 0,10 \cdot \sin\left(4\pi \cdot 0,5 \pm \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} = \pm 0,10 \vec{j} \text{ (m)} \rightarrow \boxed{y = 0,10 \text{ m}}$$

b) Como no instante $t = 0,5 \text{ s}$, o punto material se encontra nun dos extremos da súa traxectoria:

- a velocidade é nula: $v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2} \xrightarrow{y=A} v = 0 \text{ m s}^{-1}$; e
- a súa aceleración é máxima: $a = \omega^2 \cdot y = (4\pi)^2 \cdot 0,1 = 15,8 \text{ m/s}^2$.

Tamén se poden obter estas magnitudes derivando a ecuación do movemento:

$$\vec{v} = \frac{dy}{dt} \vec{j} \xrightarrow{y=0,10 \cdot \sin\left(4\pi t \pm \frac{\pi}{2}\right)} \vec{v} = 0,10 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \cos\left(4\pi t \pm \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} \xrightarrow{t=0,5\text{ s}} \boxed{\vec{v} = \vec{0} \text{ (m s}^{-1}\text{)}}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{j} \xrightarrow{v=0,4\pi \cdot \cos\left(4\pi t \pm \frac{\pi}{2}\right)} \vec{a} = -0,4\pi \cdot 4\pi \cdot \sin\left(4\pi t \pm \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} \xrightarrow{t=0,5\text{ s}} \boxed{\vec{a} = \pm 15,8 \vec{j} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}}$$

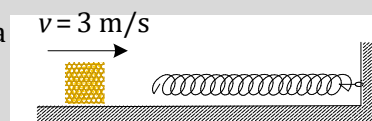
c) No centro de oscilación, toda a enerxía mecánica está en forma de enerxía cinética:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - y^2) \xrightarrow{\text{centro de oscilación, } y=0} E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ k &= m\omega^2 \xrightarrow{m=0,5\text{ kg}, \omega=4\pi\text{ rad s}^{-1}} k = 0,5 \cdot (4\pi)^2 \text{ N/m} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\substack{k=79,0 \text{ N m}^{-1} \\ A=10 \cdot 10^{-2} \text{ m}}} E_k = \frac{1}{2} \cdot 79,0 \cdot (10 \cdot 10^{-2})^2 \rightarrow \boxed{E_k = 0,40 \text{ J}}$$

10. No sistema da figura, un corpo de 2 kg móvese a $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ sobre un plano horizontal.

- a) Determina a velocidade do corpo ao comprimirse o resorte 1 cm, cuxa constante elástica é $k = 10\,000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. (Non se ten en conta a fricción).
 b) Cal é a compresión máxima do resorte?
 c) A que distancia se igualan as enerxías cinética e potencial do resorte?

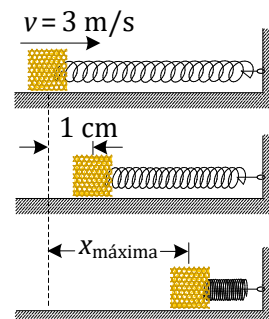


- a) No momento do contacto do corpo co resorte, toda a enerxía do conxunto atópase na forma de enerxía cinética, E_c . Ao irse comprimindo o resorte, esta enerxía cinética vaise transformando en enerxía potencial, E_p , de xeito que cando estea no máximo de compresión toda a enerxía estará en forma potencial: $E_{c \text{ máxima}} = E_{p \text{ máxima}} = E_{\text{mecánica}}$.

$$E_{c \text{ máxima}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \xrightarrow[m = 2 \text{ kg}]{v = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} E_{c \text{ máxima}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 \rightarrow E_{c \text{ máxima}} = 9 \text{ J}$$

Nas posicións intermedias:

$$\left. \begin{array}{l} E_m = E_c + E_p \\ E_m = E_{c \text{ máxima}} = 9 \text{ J} \\ E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \xrightarrow[m = 2 \text{ kg}]{} E_c = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 \\ E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \xrightarrow[k = 10000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}]{x = 10^{-2} \text{ m}} E_p = 0,5 \text{ J} \end{array} \right\} \rightarrow 9 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 + 0,5 \rightarrow \boxed{v = 2,92 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$



- b) No momento de máxima compresión, a enerxía cinética é 0, polo que toda a enerxía mecánica estará en forma de enerxía potencial:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \xrightarrow[k = 10000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}]{E_{p \text{ máxima}} = E_m = 9 \text{ J}} 9 = \frac{1}{2} \cdot 10000 \cdot x_{\text{máxima}}^2 \rightarrow \boxed{x_{\text{máxima}} = 0,04 \text{ m}}$$

c)

$$E_c = E_p \xrightarrow[E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x'^2]{E_c = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x'^2)} \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x'^2) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x'^2 \rightarrow x' = \frac{A}{\sqrt{2}} \xrightarrow[A = x_{\text{máxima}} = 0,04 \text{ m}]{} \boxed{x' = 0,03 \text{ m}}$$

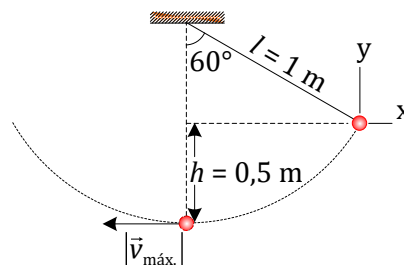
11. Un péndulo ten unha lonxitude de 1 m e un corpo colgado no seu extremo de 1 kg é desviado da súa posición de equilibrio quedando solto a medio metro de altura.

- Calcula a súa velocidade no punto máis baixo aplicando o principio de conservación da enerxía mecánica.
- Calcula a súa velocidade valorando a aplicación das ecuacións do M.H.S.
- Deduce en que condicións o movemento do péndulo sería harmónico simple e calcula a lonxitude que debería ter o fío para que o período fose de 1 s. (Dato: $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

- Supoñendo que o corpo colgado oscila sen rozamento, consérvase a enerxía mecánica, podendo escribir: $E_{k \text{ máxima}} = E_{p \text{ máxima}}$.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \xrightarrow[h=0,5 \text{ m}]{g=9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5} \rightarrow \boxed{v = 3,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$



- Nun M.H.S., o módulo da velocidade máxima obtense coa expresión:

$$v_{\text{máxima}} = \omega \cdot A.$$

$$v_{\text{máxima}} = \omega \cdot A$$

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{\omega = \sqrt{\frac{l}{g}}} \xrightarrow[l=1 \text{ m}]{g=9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \omega = \sqrt{\frac{1}{9,8}} = 3,13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ A &= \sqrt{l^2 - (l-h)^2} \xrightarrow[h=0,5 \text{ m}]{l=1 \text{ m}} A = \sqrt{1^2 - (1-0,5)^2} = 0,87 \text{ m} \end{aligned} \right\} \rightarrow v_{\text{máxima}} = 3,13 \cdot 0,87 = \boxed{2,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Comentario: Vemos unha diferenza apreciable no cálculo por ambos métodos. O método das enerxías sempre é aplicable, mentres que o amplo ángulo de 60° fai desaconsallable o uso das ecuacións do MHS. O movemento non é un M.H.S.

- Sabemos que a traxectoria do m.h.s. é rectilínea: $\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$. Porén, a traxectoria da masa m é a dun arco de circunferencia, que se podemos confundir coa corda correspondente comportaríase como se fose un m.h.s.

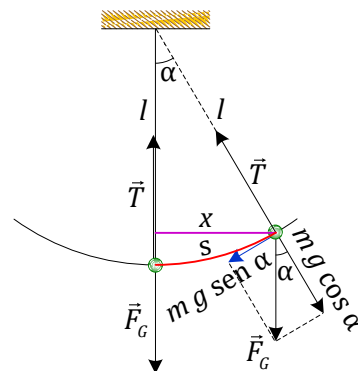
A forza que actúa sobre m é a do seu peso, $\vec{F}_G$, e a da tensión do fío, $\vec{T}$. Descompoñemos o peso en dúas direccións:

- Unha, na dirección do fío (que se anula coa tensión): $m \cdot g \cdot \cos \alpha$.
- Outra, na dirección perpendicular á anterior: $m \cdot g \cdot \sin \alpha$. Esta compoñente é a resultante das forzas que actúan sobre m , orixinando o movemento oscilante do péndulo. Como é esta forza?

$$F = m \cdot g \cdot \sin \alpha \xrightarrow{\sin \alpha = \frac{x}{l}} F = m \cdot g \cdot \frac{x}{l}. \text{ A súa expresión vectorial é:}$$

$\vec{F} = -m \cdot g \cdot \frac{\vec{x}}{l}$: O signo menos indica que o sentido de $\vec{F}$ é contrario ao de $\vec{x}$.

Para pequenos ángulos, a corda s confúndese co arco x e a traxectoria pode considerarse rectilínea e o movemento é harmónico simple, sendo $k = m \cdot g/l$:



$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \frac{x}{l} \\ \alpha = \frac{s}{l} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{se sen } \alpha = \alpha \text{ (en radiáns)}} x = s$$

Calculamos o valor do ángulo α :

$$\cos \alpha = \frac{l-h}{l} \xrightarrow[h=0,5\text{ m}]{l=1\text{ m}} \cos \alpha = \frac{1-0,5}{1} \rightarrow \alpha = 1,047 \text{ rad} = 60,0^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } 60,0^\circ = 0,886 \\ 60,0^\circ = 1,047 \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow \text{sen } \alpha \neq \alpha$$

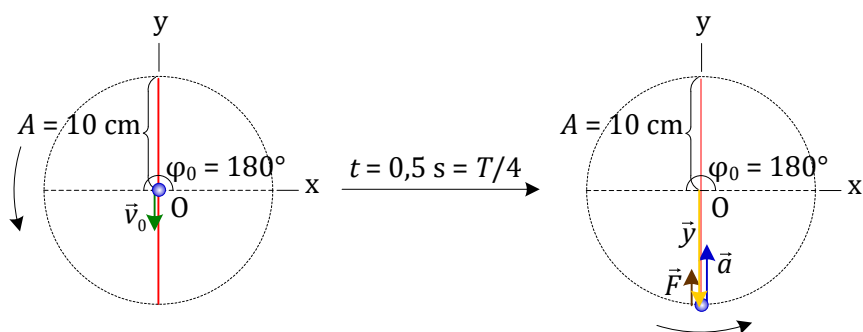
Aplicando a ecuación do período do péndulo, poderíamos calcular a lonxitude l necesaria para conseguir que o período T sexa de 1 s:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \xrightarrow[g=9,8\text{ m s}^{-2}]{T=1\text{ s}} 1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{9,8}} \rightarrow \boxed{l=0,25\text{ m}}$$

12. Unha partícula de masa 50 g describe un M.H.S. de amplitude 10 cm e período 2,0 s. Se comezamos a estudar o movemento no instante no que pasa pola posición de equilibrio e se dirixe cara ás elongacións negativas, calcula:

- A posición, a velocidade, a aceleración e a forza elástica no instante 0,50 s.
- O tempo transcorrido ata que pasa por vez primeira pola posición 5,0 cm.
- A enerxía cinética en función do tempo.

a) Como $t = 0,5$ s corresponde á cuarta parte do período T :



• A posición da partícula $\vec{y}$ vai ser a do extremo da traxectoria: $\vec{y} = -A \vec{j} \xrightarrow{A=10\text{ cm}} \boxed{\vec{y} = -10 \vec{j} \text{ (cm)}}$.

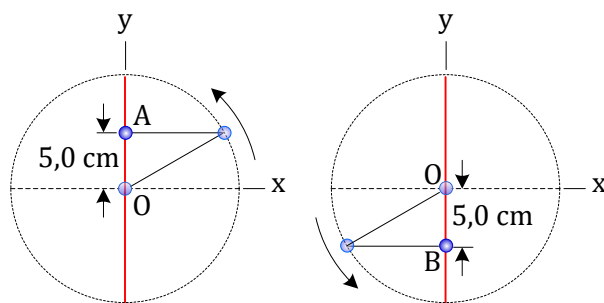
• A velocidade $\vec{v}$ da partícula é nula, $\vec{v} = \vec{0}$: $v = \omega \sqrt{A^2 - y^2} \xrightarrow{y=-A} \boxed{v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

• A aceleración $\vec{a}$ da partícula vale:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{y} \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad s}^{-1}, \vec{y} = -10 \vec{j} \text{ (m)}} \vec{a} = -\pi^2 \cdot (-0,10 \vec{j}) \rightarrow \boxed{\vec{a} = 0,10 \pi^2 \vec{j} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2})}$$

• A forza elástica é: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \xrightarrow{m = 50 \cdot 10^{-3} \text{ kg}, \vec{a} = 0,10 \pi^2 \vec{j} \text{ (m s}^{-2})} \vec{F} = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 0,10 \cdot \pi^2 \vec{j} \rightarrow \boxed{\vec{F} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \vec{j} \text{ (N)}}$

b) O tempo que a partícula tarda en percorrer 5,0 cm, partindo desde o centro de oscilación, é:



$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\substack{y = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ A = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \omega = \pi \text{ rad s}^{-1} \\ \varphi_0 = 0 \text{ rad}}} 5,0 \cdot 10^{-2} = 10 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(\pi t) \rightarrow t = 0,167 \text{ s}$$

Este tempo calculado é o que tarda a partícula cando se despraza desde o centro de oscilación O ata A, no sentido das elongacións positivas. Igual tempo é o que tarda en ir desde o centro de oscilación O ata B, no sentido das elongacións negativas que, como no instante inicial pasa pola posición de equilibrio e se dirixe cara ás elongacións negativas, sería cando pasa por primeira vez pola posición -5,0 cm. Desde o instante inicial, a partícula tarda en pasar pola posición 5,0 cm o tempo de $(1 + 0,167) \text{ s} = \boxed{1,167 \text{ s}}$.

c) $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Se tomamos como ecuación do movemento: $\vec{y} = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$, a velocidade vén dada pola expresión: $\vec{v} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$.

A fase inicial φ_0 obtémola a partir das condicións iniciais:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[\text{(movéndose cara a elongacións negativas)}]{\text{para } t=0 \rightarrow y=0} 0 = A \cdot \text{sen}(0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

Coas magnitudes calculadas escribimos a ecuación do movemento, $\vec{y} = 0,10 \cdot \text{sen}(\pi t + \pi) \vec{j} \text{ (m)}$, e obtemos a velocidade en función do tempo:

$$v = \frac{dy}{dt} \xrightarrow{y=0,10 \cdot \text{sen}(\pi t + \pi)} v = 0,10 \cdot \pi \cdot \cos(\pi t + \pi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \xrightarrow[m=50 \cdot 10^3 \text{ kg}]{v=0,10 \cdot \pi \cdot \cos(\pi t + \pi)} E_c = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot (0,10 \cdot \pi \cdot \cos(\pi t + \pi))^2 \rightarrow \boxed{E_c = 2,47 \cdot 10^{-3} \cdot \cos^2(\pi t + \pi)}$$

13. A aceleración dun punto material que se move sobre o eixe X vén dada pola expresión: $\vec{a} = -9 \vec{x}$, onde x se mide en cm e a en $\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$. Sabendo que a amplitude do movemento é 3 cm e que no instante inicial a elongación é máxima para $x > 0$, calcula:

- A ecuación do movemento do punto material.
- A velocidade e a aceleración máximas. Indica os puntos da traxectoria aos que corresponden estes valores.
- Os puntos da traxectoria no que se iguala a enerxía cinética á enerxía potencial elástica.

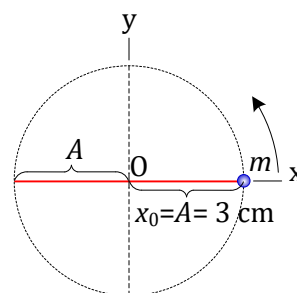
- a) Cando a aceleración dun punto material é da forma $\vec{a} = -\omega^2 \vec{x}$, posúe un movemento harmónico simple, que ten por ecuación do movemento a expresión: $\vec{x} = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{i}$.

Relacionando a expresión $\vec{a} = -\omega^2 \vec{x}$ co dato da aceleración $\vec{a} = -9 \vec{x}$ do exercicio resulta: $\omega = 3 \text{ s}^{-1}$.

A fase inicial φ_0 obtémola a partir das condicións iniciais:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t=0 \rightarrow x=A} A = A \cdot \sin(0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\boxed{\vec{x} = 3 \cdot 10^{-2} \cdot \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} \text{ (m)}} .$$



- b) $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \xrightarrow{v_{\text{máximo}} \text{ cando } x=0} v_{\text{máxima}} = \omega A \xrightarrow{\omega = 3 \text{ rad s}^{-1}, A = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \boxed{v_{\text{máxima}} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$ (valor máximo no centro de oscilación)

$$a = \omega^2 x \xrightarrow{a_{\text{máximo}} \text{ cando } x=A} a_{\text{máxima}} = \omega^2 A \xrightarrow{\omega = 3 \text{ rad s}^{-1}, A = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \boxed{a_{\text{máxima}} = 27 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$
 (valor máximo nos extremos da traxectoria)

c)

$$E_c = E_p \xrightarrow{E_c = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2), E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2} \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \rightarrow x = \frac{A}{\sqrt{2}} \xrightarrow{A = 0,03 \text{ m}} \boxed{x = 0,02 \text{ m}}$$

14. Un oscilador harmónico ten velocidades de $20 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ e de $40 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ cando as súas elongacións son, respectivamente, $6,0 \text{ cm}$ e $5,0 \text{ cm}$. Calcula:

- A amplitude, o período e a frecuencia do movemento.
- A aceleración nas dúas elongacións indicadas.
- A enerxía mecánica, sabendo que a masa é de 20 g .

a)

$$\left. \begin{aligned} 20 \cdot 10^{-2} &= \omega \cdot \sqrt{A^2 - (6,0 \cdot 10^{-2})^2} \\ 40 \cdot 10^{-2} &= \omega \cdot \sqrt{A^2 - (5,0 \cdot 10^{-2})^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{\sqrt{A^2 - 36,0 \cdot 10^{-4}}}{\sqrt{A^2 - 25,0 \cdot 10^{-4}}} \rightarrow \boxed{A = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

$$20 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{A^2 - (6,0 \cdot 10^{-2})^2} \xrightarrow{A = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \boxed{f = 1,7 \text{ Hz}}$$

$$T = \frac{1}{f} \xrightarrow{f = 1,7 \text{ Hz}} T = \frac{1}{1,7} \rightarrow \boxed{T = 0,59 \text{ s}}$$

$$\text{b) } \vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{x} \xrightarrow{\begin{matrix} \omega = 2\pi f \xrightarrow{f = 1,7 \text{ Hz}} \omega = 3,4 \pi \text{ rad s}^{-1} \\ \vec{x} = 6,0 \cdot 10^{-2} \vec{i} \text{ (m)} \end{matrix}} \vec{a} = -(3,4 \cdot \pi)^2 \cdot 6,0 \cdot 10^{-2} \vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{a} = -6,9 \cdot 10^2 \vec{i} \text{ (m}\cdot\text{s}^{-2})}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{x} \xrightarrow{\begin{matrix} \omega = 2\pi f \xrightarrow{f = 1,7 \text{ Hz}} \omega = 3,4 \pi \text{ rad s}^{-1} \\ \vec{x} = 5,0 \cdot 10^{-2} \vec{i} \text{ (m)} \end{matrix}} \vec{a} = -(3,4 \cdot \pi)^2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-2} \vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{a} = -5,7 \cdot 10^2 \vec{i} \text{ (m}\cdot\text{s}^{-2})}$$

- c) Supoñendo ausencia de rozamento, a única forza que actúa é a elástica, que por ser conservativa cumpre a conservación da enerxía mecánica.

$$\left. \begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ k &= m \omega^2 \xrightarrow{\begin{matrix} m = 20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \\ \omega = 3,4 \pi \text{ rad s}^{-1} \end{matrix}} k = 20 \cdot 10^{-3} \cdot (3,4 \pi)^2 \text{ N/m} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\begin{matrix} k = 2,28 \text{ Nm}^{-1} \\ A = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{matrix}} E_m = \frac{1}{2} \cdot 2,28 \cdot (6,3 \cdot 10^{-2})^2 = \boxed{4,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}}$$

15. Unha onda unidimensional propágase segundo a ecuación: $y = 2 \cos \{2\pi [(t/4) - (x/1,6)]\}$; onde as distancias "x" e "y" se miden en metros e o tempo en segundos. Determina:

a) O módulo da velocidade de propagación.

b) A diferenza de fase, nun instante dado, de dúas partículas separadas 120 cm na dirección de avance da onda.

c) A aceleración máxima.

a) A ecuación xeral dunha onda harmónica unidimensional que se propaga no eixe X e que a vibración ten lugar no eixe Y, utilizando a función coseno, é: $y(x,t) = A \cos(\omega t \pm kx)$. Comparando esta ecuación coa ecuación dada, sacamos os seguintes datos: $A = 2$ m; $T = 4$ s; $\lambda = 1,6$ m. A velocidade v de propagación da onda é:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{x}{t} \rightarrow v = \frac{\lambda}{T} \\ \lambda = 1,6 \text{ m} \\ T = 4 \text{ s} \end{array} \right\} \rightarrow v = \frac{1,6}{4} \rightarrow \boxed{v = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

b)

$$\text{Fase: } \varphi = \left(\frac{2\pi}{4} t - \frac{2\pi}{1,6} x \right) \text{ rad}$$

$$\text{En } x_1: \varphi_1 = \left(\frac{2\pi}{4} t - \frac{2\pi}{1,6} x_1 \right) \text{ rad}$$

$$\text{En } x_2: \varphi_2 = \left(\frac{2\pi}{4} t - \frac{2\pi}{1,6} x_2 \right) \text{ rad}$$

$$|\Delta\varphi| = |\varphi_2 - \varphi_1| \rightarrow |\Delta\varphi| = \left| \left(\frac{2\pi}{4} t - \frac{2\pi}{1,6} x_2 \right) - \left(\frac{2\pi}{4} t - \frac{2\pi}{1,6} x_1 \right) \right| \rightarrow |\Delta\varphi| = \left| \frac{2\pi}{1,6} (x_2 - x_1) \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} |\Delta\varphi| = \left| \frac{2\pi}{1,6} (x_2 - x_1) \right| \\ |(x_2 - x_1)| = 1,20 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\Delta\varphi = 1,5 \pi \text{ rad}}$$

c) A aceleración obtense derivando dúas veces con respecto ao tempo a ecuación de onda:

$$y = 2 \cos \left[(2\pi t/4) - (2\pi x/1,6) \right]$$

$$v = \frac{dy(x,t)}{dt} = \frac{d\{2 \cos [(2\pi t/4) - (2\pi x/1,6)]\}}{dt} \rightarrow v = -2 \cdot (2 \cdot \pi/4) \sin [(2\pi t/4) - (2\pi x/1,6)]$$

$$a = \frac{dv(x,t)}{dt} = \frac{d\{-2 \cdot (2\pi/4) \cdot \sin [(2\pi t/4) - (2\pi x/1,6)]\}}{dt}$$

$$a = -2 \cdot (2\pi/4)^2 \cdot \cos [(2\pi t/4) - (2\pi x/1,6)]$$

A aceleración en valor absoluto será máxima cando $\cos [(2\pi t/4) - (2\pi x/1,6)] = \pm 1$, resultando:

$$|a_{\text{máxima}}| = 2 \cdot (2 \cdot \pi/4)^2 \rightarrow \boxed{|a_{\text{máxima}}| = 4,93 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

16. Unha onda harmónica que se propaga por unha corda cunha velocidade de $2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ no sentido positivo do eixe X, ten unha amplitude de $4,0\cdot 10^{-2} \text{ m}$ e unha frecuencia de $4,0 \text{ Hz}$. Calcula:

- A ecuación do movemento ondulatorio.
- A diferenza de fase entre dous estados de vibración da mesma partícula cando o intervalo de tempo transcorrido é de $2,0 \text{ s}$. Razoa se están en fase ou en oposición de fase.
- A diferenza de fase, nun instante dado, entre dúas partículas separadas $2,25 \text{ m}$. Razoa se están en fase ou en oposición de fase.

a) A ecuación xeral dunha onda harmónica unidimensional que se propaga no sentido positivo do eixe X e que a vibración ten lugar no eixe Y, utilizando a función coseno, é: $y(x, t) = A \cos(\omega t - k x)$.

Cálculo de ω e k :

$$\omega = 2\pi \cdot \nu \rightarrow \omega = 2\pi \cdot 4,0 \rightarrow \omega = 8,0 \pi \text{ s}^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = \frac{v}{\nu} \rightarrow \lambda = \frac{2,0}{4,0} \rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow k = \frac{2\pi}{0,5} = 4,0 \pi \text{ m}^{-1}$$

$$y(x, t) = 4,0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(8,0 \pi t - 4,0 \pi x) \text{ m}$$

b) Fase: $\varphi = (8,0 \pi t - 4,0 \pi x) \text{ rad}$

$$\text{En } t_1: \varphi_1 = (8,0 \pi t_1 - 4,0 \pi x) \text{ rad}$$

$$\text{En } t_2: \varphi_2 = (8,0 \pi t_2 - 4,0 \pi x) \text{ rad}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \rightarrow \Delta\varphi = (8,0 \pi t_2 - 4,0 \pi x) - (8,0 \pi t_1 - 4,0 \pi x) \rightarrow \Delta\varphi = 8,0 \pi (t_2 - t_1) \rightarrow \Delta\varphi = 8,0 \cdot 2 \pi \text{ rad}$$

Dado que $\Delta t = 2,0 \text{ s}$ é un múltiplo enteiro de T : $nT = \Delta t \rightarrow n \cdot \frac{1}{4,0} = 2,0 \rightarrow n = 8,0$; podemos concluír que ambos estados de vibración están en fase.

Por outra parte, a diferenza de fase é un múltiplo enteiro de 2π : $\Delta\varphi = 8,0 \cdot 2 \pi \text{ rad}$, o que confirma que están en fase. Evidentemente, ambas condicións son equivalentes.

c) En x_1 : $\varphi_1 = (8,0 \pi t - 4,0 \pi x_1) \text{ rad}$

$$\text{En } x_2: \varphi_2 = (8,0 \pi t - 4,0 \pi x_2) \text{ rad}$$

$$|\Delta\varphi| = |\varphi_2 - \varphi_1| \rightarrow |\Delta\varphi| = |(8,0 \pi t - 4,0 \pi x_2) - (8,0 \pi t - 4,0 \pi x_1)| \rightarrow |\Delta\varphi| = |4,0 \pi (x_2 - x_1)| \rightarrow \Delta\varphi = 9,0 \pi \text{ rad}$$

Dado que $\Delta x = 2,25 \text{ m}$, é un múltiplo impar de $\lambda/2$: $n\lambda = \Delta x \rightarrow n \cdot 0,5 = 2,25 \rightarrow n = 4,5 \rightarrow n = \frac{9}{2}$, podemos concluír que ambos partículas están en oposición de fase.

Por outra parte, a diferenza de fase é un múltiplo impar de π : $\Delta\varphi = 9,0 \pi \text{ rad}$, o que confirma que están en oposición de fase. Evidentemente, ambas condicións son equivalentes.

17. A ecuación dunha onda transversal que se propaga nunha corda é: $y(x,t)=10 \text{ sen} [\pi(x-0,2t)]$, onde x e y se expresan en cm e t en s. Calcula:

- A amplitude, a lonxitude de onda, a frecuencia e a velocidade de propagación da onda.
- Os valores máximos da velocidade e da aceleración das partículas da corda.
- En qué sentido se propaga a onda? Cal será a ecuación da onda transversal se se propaga en sentido contrario? Explica.

a) $y(x,t)=10 \text{ sen} (\pi x - 0,2 \pi t) \text{ cm}$

Comparando coa ecuación xeral $y(x,t)=A \text{ sen} (kx - \omega t)$ resulta:

$$\boxed{A = 0,10 \text{ m}}$$

$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ k = \pi \cdot 10^2 \text{ m}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \pi \cdot 10^2 = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \boxed{\lambda = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2\pi \nu \\ \omega = 0,2 \pi \text{ s}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow 0,2 \pi = 2\pi \nu \rightarrow \boxed{\nu = 0,1 \text{ Hz}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nu = \frac{x}{t} \rightarrow \nu = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \\ \lambda = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \nu = 0,1 \text{ Hz} \end{array} \right\} \rightarrow \nu = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1 \rightarrow \boxed{\nu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

b) $\nu = \frac{dy(x,t)}{dt} = \frac{d[A \text{ sen}(kx - \omega t)]}{dt} \rightarrow \nu = -A \omega \cos(kx - \omega t)$

$$|v_{\text{máxima}}| = A \omega \rightarrow |v_{\text{máxima}}| = 0,10 \cdot 0,2 \cdot \pi \rightarrow \boxed{|v_{\text{máxima}}| = 2,0 \cdot 10^{-2} \pi \text{ m s}^{-1}}$$

$$a = \frac{d\nu(x,t)}{dt} = \frac{d[-A \omega \cos(kx - \omega t)]}{dt} \rightarrow a = -A \omega^2 \text{ sen}(kx - \omega t)$$

$$|a_{\text{máxima}}| = A \omega^2 \rightarrow |a_{\text{máxima}}| = 0,10 \cdot (0,2 \cdot \pi)^2 \rightarrow \boxed{|a_{\text{máxima}}| = 4,0 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \text{ m s}^{-2}}$$

- c) A onda propágase no sentido positivo do eixo X, xa que a velocidade de propagación da onda é positiva. Se se propaga no sentido negativo do eixo X: $y(x,t)=10 \text{ sen} [\pi(x+0,2t)]$, xa que a velocidade de propagación da onda é negativa.

18. Unha onda transversal propágase a través dunha corda. O desprazamento das partículas está dado por:

$$y(x,t) = 0,06 \sin \left[\pi x + 20 \pi t + \frac{\pi}{2} \right] \text{ (unidades SI). Calcula:}$$

- a) O período da onda.
- b) A rapidez de propagación.
- c) A ecuación da corda en $t = 4$ s e o seu gráfico.

- a) A función matemática da onda pode escribirse como: $y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \varphi_0)$, co signo $-$ para as ondas que viaxan no sentido positivo do eixo X e co signo $+$ para as ondas que viaxan en sentido contrario.

Comparando coa función dada do enunciado: $y(x,t) = 0,06 \sin(\pi x + 20 \pi t + \pi/2)$, obtemos os parámetros da onda:

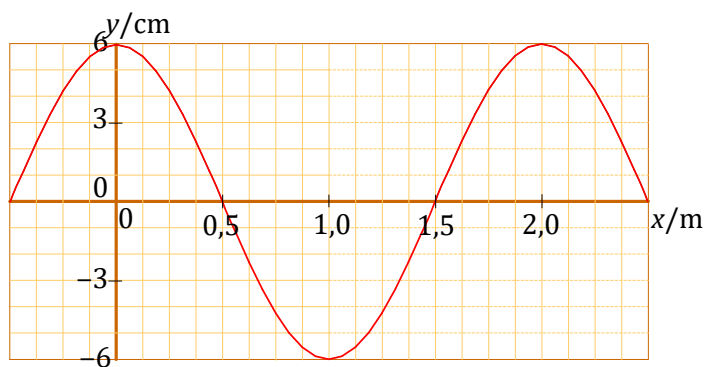
$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \omega = 20\pi \text{ rad/s} \end{array} \right\} \rightarrow T = \frac{2\pi}{20\pi} \rightarrow \boxed{T = 0,1 \text{ s}}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{x}{t} \rightarrow v = \frac{\lambda}{T} \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ k = \pi \text{ m}^{-1} \\ T = 0,1 \text{ s} \end{array} \right\} \rightarrow \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = 2 \text{ m} \rightarrow v = \frac{2}{0,1} \rightarrow v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- c) A ecuación da onda en $t = 4$ s:

$$y(x,4) = 0,06 \sin \left(\pi x + 20 \cdot \pi \cdot 4 + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow y(x,4) = 0,06 \sin \left(\pi x + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \boxed{y(x,4) = 0,06 \cos(\pi x) \text{ m}}$$



19. Unha onda harmónica, de frecuencia 30 Hz, desprázase por unha corda situada ao longo do eixo X. A onda oscila nunha dirección Y cunha amplitude de 20 cm. Se a velocidade das ondas na corda é de 120 m·s⁻¹ e a densidade lineal é de 60 g·m⁻¹, determina:

- a) A lonxitude de onda.
- b) A ecuación de onda.
- c) A enerxía por unidade de lonxitude.

a) A lonxitude de onda pode obterse a partir da relación entre velocidade e frecuencia:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{x}{t} \rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu} \\ v = 120 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \nu = 30 \text{ Hz} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda = \frac{120}{30} \rightarrow \boxed{\lambda = 4 \text{ m}}$$

b) Calculamos e substituímos os valores correspondentes das magnitudes que aparecen na ecuación xeral dunha onda harmónica: $y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t)$

$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = 4 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow k = \frac{2\pi}{4} \rightarrow k = \frac{\pi}{2} \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi\nu \rightarrow \omega = 2\pi 30 = 60\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{y(x, t) = 0,2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x - 60\pi t\right) (\text{m})}$$

c) Para obter a enerxía por unidade de lonxitude, partimos da enerxía dun movemento harmónico simple:

$$E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2\pi\nu)^2 \cdot A^2 = 2\mu l \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A^2, \text{ sendo } \mu \text{ a densidade lineal de masa:}$$

$$\mu = \frac{m}{l}.$$

A enerxía por unidade de lonxitude será:

$$\frac{E}{l} = 2\mu \pi^2 \nu^2 A^2 \rightarrow \frac{E}{l} = 2 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot 30^2 \cdot 0,2^2 \rightarrow \boxed{\frac{E}{l} = 42,6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-1}}$$

20. Unha onda xerada por unha corda de $0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ de densidade lineal vén dada pola ecuación:

$$y(x,t) = 0,2 \sin(2\pi x + 50\pi t) \text{ m} . \text{ Calcula:}$$

- A frecuencia da onda.
- A velocidade de propagación das ondas na corda.
- A potencia que transporta a onda.

a) A frecuencia obtense da expresión:

$$\omega = 2\pi \nu \rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \nu = \frac{50\pi}{2\pi} \rightarrow \boxed{\nu = 25 \text{ Hz}}$$

b) A velocidade de propagación resulta de:

$$\left. \begin{array}{l} \nu = \frac{x}{t} \rightarrow \nu = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \\ \omega = 2\pi \nu \rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} \\ \omega = 50\pi \text{ s}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \nu = \frac{50\pi}{2\pi} = 25 \text{ Hz} \left. \begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \\ k = 2\pi \text{ m}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{2\pi} \rightarrow \lambda = 1 \text{ m} \rightarrow \nu = 1 \cdot 25 \rightarrow \boxed{\nu = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

c) A potencia que transporta a onda é a enerxía por unidade de tempo: $P = \frac{E}{t}$.

$$E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \xrightarrow[\omega = 2\pi \nu]{m = \mu \cdot l} E = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot l \cdot (2\pi \nu)^2 \cdot A^2 = 2 \cdot \mu \cdot l \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A^2$$

$$P = \frac{E}{t} = \frac{2 \cdot \mu \cdot l \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A^2}{t} = 2 \cdot \mu \cdot \nu \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A^2 \rightarrow P = 2 \cdot 0,01 \cdot 25 \cdot \pi^2 \cdot 25^2 \cdot 0,2^2 \rightarrow \boxed{P = 123 \text{ W}}$$

21. Unha onda harmónica cuxa amplitude é 0,3 m recorre 300 m en 20 s. Calcula:

- a) A lonxitude de onda.
- b) Constrúe a ecuación de onda, tendo en conta que o seu avance é no sentido negativo do eixe X.
- c) A máxima velocidade dun punto que vibra coa onda se a frecuencia é 2 Hz.

a) A lonxitude de onda determínase a partir da velocidade de propagación.

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot v \rightarrow \lambda = \frac{v}{v} \\ v &= \frac{x}{t} \rightarrow v = \frac{300}{20} \rightarrow v = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v &= 2 \text{ Hz} \end{aligned} \right\} \rightarrow \lambda = \frac{15}{2} \rightarrow \boxed{\lambda = 7,5 \text{ m}}$$

b) A ecuación de onda obtense ao substituír os datos na expresión xeral: $y(x, t) = A \sin(\omega t + k x)$.

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &= A \sin(\omega t + k x) \\ A &= 0,3 \text{ m} \\ \omega &= 2 \cdot \pi \cdot v \rightarrow \omega = 4 \pi \text{ Hz} \\ k &= \frac{2 \pi}{\lambda} \rightarrow k = \frac{2 \pi}{7,5} = \frac{4 \pi}{15} \text{ m}^{-1} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{y(x, t) = 0,3 \sin \cdot \left(4 \pi t + \frac{4 \pi}{15} x \right) \text{ m}}$$

c) A máxima velocidade pode determinarse a partir da expresión da velocidade, que se obtén ao derivar a ecuación de onda:

$$v = \frac{dy(x, t)}{dt} = \frac{d \left[0,3 \cdot \sin \left(4 \pi t + \frac{4 \pi}{15} x \right) \right]}{dt} \rightarrow v = 0,3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \cos \left(4 \pi t + \frac{4 \pi}{15} x \right)$$

$$|v_{\text{máxima}}| = 0,3 \cdot 4 \cdot \pi \rightarrow \boxed{|v_{\text{máxima}}| = 1,2 \pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

22. A función de onda dunha onda harmónica que se move nunha corda é $y(x,t) = 0,03 \sin(2,2x - 3,5t)$, onde as lonxitudes se expresan en metros e o tempo en segundos. Determina:

- a) A lonxitude de onda e o período desta onda.
- b) A velocidade de propagación.
- c) A velocidade máxima de calquera segmento da onda.

a) Comparando a ecuación xeral dunha onda harmónica unidimensional que se propaga no eixe X e que a vibración ten lugar no eixe Y, utilizando a función seno, $y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t)$, coa ecuación de onda dada: $y(x,t) = 0,03 \sin(2,2x - 3,5t)$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \\ k = 2,2 \text{ m}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{2,2} \rightarrow \boxed{\lambda = 2,9 \text{ m}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \omega = 3,5 \text{ s}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow T = \frac{2\pi}{3,5} \rightarrow \boxed{T = 1,8 \text{ s}}$$

b) Velocidade de propagación:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{x}{t} \rightarrow v = \frac{\lambda}{T} \\ \lambda = 2,9 \text{ m} \\ T = 1,8 \text{ s} \end{array} \right\} \rightarrow v = \frac{2,9}{1,8} \rightarrow \boxed{v = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

c) Velocidade máxima:

$$v = \frac{dy(x,t)}{dt} = \frac{d[0,03 \sin(2,2x - 3,5t)]}{dt} \rightarrow v = -0,03 \cdot 3,5 \cos(2,2x - 3,5t)$$

$$|v_{\text{máxima}}| = 0,03 \cdot 3,5 \rightarrow \boxed{|v_{\text{máxima}}| = 0,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

23. Un alt falante emite ondas sonoras esféricas cunha potencia de 200 W. Determina:

- a) A enerxía emitida en media hora.
- b) A intensidade sonora a 4 m do alt falante.
- c) O nivel de intensidade sonora, en dB, a 4 m do alt falante.

Datos: $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

a) A enerxía emitida é:

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{E}{t} \rightarrow E = P \cdot t \\ P = 200 \text{ W} \\ t = 0,5 \text{ h} = 1800 \text{ s} \end{array} \right\} \rightarrow E = 200 \cdot 1800 \rightarrow \boxed{E = 3,6 \cdot 10^5 \text{ J}}$$

b) A intensidade sonora será:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4 \pi r^2} \\ P = 200 \text{ W} \\ r = 4 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow I = \frac{200}{4 \cdot \pi \cdot 4^2} \rightarrow \boxed{I = 1,00 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}$$

c) Tendo en conta a definición do nivel de intensidade sonora en dB:

$$S = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow S = 10 \cdot \log \frac{1,00}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{S = 120 \text{ dB}}$$

24. O canto dun galo produce unha onda esférica de 1 mW de potencia.

- Cal é o nivel de intensidade sonora a unha distancia de 10 m?
- Outro galo canta, simultaneamente, cunha potencia de 2 mW, a unha distancia de 30 m do primeiro galo. Cal será a intensidade do son resultante no punto medio do segmento que une ambos galos?
- Cal será o nivel de intensidade sonora resultante?

Datos: $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

- a) O nivel de intensidade sonora será:

$$\left. \begin{array}{l} S = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \\ I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4 \pi r^2} \\ P = 0,001 \text{ W} \\ r = 10 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow I = \frac{0,001}{4 \cdot \pi \cdot 10^2} = 7,96 \cdot 10^{-7} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \rightarrow S = 10 \cdot \log \frac{7,96 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{S = 59 \text{ dB}}$$

- b) No punto medio, a intensidade sonora será a suma das intensidades do canto de cada un dos galos:

$$\left. \begin{array}{l} I = I_1 + I_2 \\ I_1 = \frac{P_1}{S_1} = \frac{0,001}{4 \cdot \pi \cdot 15^2} \\ I_2 = \frac{P_2}{S_2} = \frac{0,002}{4 \cdot \pi \cdot 15^2} \end{array} \right\} \rightarrow I = \frac{0,001}{4 \cdot \pi \cdot 15^2} + \frac{0,002}{4 \cdot \pi \cdot 15^2} \rightarrow \boxed{I = 1,06 \cdot 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}$$

- c) E o nivel de intensidade sonora resultante será:

$$S = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow S = 10 \cdot \log \frac{1,06 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{S = 60 \text{ dB}}$$

25. O vo 370 de Malaysia Airlines que desapareceu o 8 de marzo de 2014 no Mar de China estaba sendo controlado dende a torre de control cun radar de 1000 MHz de frecuencia e 1 kW de potencia.

- Calcula o número de fotóns por segundo que emitía o radar.
- Calcula a intensidade das ondas do radar á distancia que estaba o avión cando se detectou por última vez, sabendo que dita distancia era de 200 km dende a posición do radar. Suponse ondas esféricas e non se ten en conta a absorción na atmosfera.
- Un barco de rescate rexistrou sinais ultrasónicas procedentes do fondo do océano, que poderían ser da caixa negra do avión. Sábese que a caixa negra emite ondas acústicas de 37,5 kHz e 160 dB. Calcula a lonxitude de onda e a intensidade destes ultrasóns.

Datos: $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$; velocidade do son na auga = $1500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $I_0 = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

- a) A enerxía dun fotón é:

$$E = h\nu \rightarrow E = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 10^9 \rightarrow E = 6,63 \cdot 10^{-25} \text{ J}$$

Dado que a potencia é a relación entre enerxía e tempo:

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{n \cdot E_{\text{fotón}}}{t} \\ P = 1000 \text{ W} \\ E_{\text{fotón}} = 6,63 \cdot 10^{-25} \text{ J} \\ t = 1 \text{ s} \end{array} \right\} \rightarrow 1000 = \frac{n \cdot 6,63 \cdot 10^{-25}}{1} \rightarrow \boxed{n = 1,51 \cdot 10^{27} \text{ fotóns/s}}$$

- b) A intensidade da onda é:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} \\ P = 1000 \text{ W} \\ r = 2 \cdot 10^5 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow I = \frac{1000}{4 \cdot \pi \cdot (2 \cdot 10^5)^2} \rightarrow \boxed{I = 2 \cdot 10^{-9} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}}$$

- c) A lonxitude de onda será:

$$\left. \begin{array}{l} v = \lambda \nu \rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu} \\ v = 1500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ \nu = 37,5 \cdot 10^3 \text{ Hz} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda = \frac{1500}{37,5 \cdot 10^3} \rightarrow \boxed{\lambda = 0,04 \text{ m}}$$

A intensidade sonora S dos ultrasóns pode obterse a partir de:

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 160 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{I = 10^4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}}$$

26. Para determinar a profundidade dunha cova emítese unha onda sonora esférica de 20 W, escoitándose o eco ao cabo de 3 s. Supoñendo que a cova é suficientemente ampla para desprezar as reflexións nas paredes laterais e os fenómenos de absorción, determina:

- a) A profundidade da cova.
- b) A intensidade da onda sonora ao chegar ao fondo da cova.
- c) O nivel de intensidade sonora nese momento.

Datos: velocidade do son = $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- a) A profundidade da cova determínase tendo en conta o movemento uniforme do son e que 3 s é o tempo que emprega a onda no camiño de ida e volta:

$$v = \frac{\text{distancia}}{t} \rightarrow \text{distancia} = v \cdot t \rightarrow \text{distancia} = 340 \cdot \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\text{distancia} = 510 \text{ m}}$$

- b) A intensidade é:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4 \pi r^2} \\ P = 20 \text{ W} \\ r = 510 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow I = \frac{20}{4 \cdot \pi \cdot 510^2} \rightarrow \boxed{I = 6,12 \cdot 10^{-6} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}}$$

- c) O nivel de intensidade sonora S é:

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0} \rightarrow S = 10 \log \frac{6,12 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{S = 68 \text{ dB}}$$

27. Dous alt falantes emiten ondas sonoras con potencias P_A e P_B , sendo $P_B = 2 P_A$. Nun punto P, situado a unha distancia de 5 m, equidistante de ambos alt falantes, o nivel de intensidade sonora é de 90 dB. Determina:

a) A intensidade sonora en P.

b) A potencia de cada un dos alt falantes.

a) O nivel de intensidade sonora nun punto Q, situado a 2 m de A e 8 m de B.

Dato: $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

a) Coñecendo o nivel de intensidade sonora en P, podemos determinar a intensidade:

$$S = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 90 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{I = 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}$$

b) A partir da relación entre intensidade e potencia:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4 \pi r^2} \\ I = 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \\ r = 5 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow 10^{-3} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot 5^2} \rightarrow P = 0,314 \text{ W}$$

$$\left. \begin{array}{l} P = P_A + P_B \\ P_B = 2 P_A \\ P = 0,314 \text{ W} \end{array} \right\} \rightarrow 0,314 = 3 P_A \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{P_A = 0,105 \text{ W}} \\ \boxed{P_B = 0,209 \text{ W}} \end{array} \right.$$

c) No punto Q, determinamos a intensidade sonora debida a cada alt falante:

$$\left. \begin{array}{l} S = 10 \cdot \log \frac{I_A + I_B}{I_0} \\ I_A = \frac{P_A}{S_A} \rightarrow I_A = \frac{0,105}{4 \cdot \pi \cdot 2^2} \rightarrow I_A = 2,09 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \\ I_B = \frac{P_B}{S_B} \rightarrow I_B = \frac{0,209}{4 \cdot \pi \cdot 8^2} \rightarrow I_B = 2,60 \cdot 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \\ I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \end{array} \right\} \rightarrow S = 10 \cdot \log \frac{2,09 \cdot 10^{-3} + 2,60 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{S = 93,7 \text{ dB}}$$

28. Dous alt falantes están situados á mesma altura e separados entre si unha distancia de 4,0 m. Ambos emiten un son puro de 200 Hz. No primeiro, F_1 , seleccionouse unha potencia de 1,2 mW e no segundo, F_2 , a potencia seleccionada é 1,8 mW. Sábese que vibran en fase.

a) Determine a intensidade do son nun punto do plano no que están os alt falantes situado a 4,0 m do primeiro alt falante e a 3,0 m do segundo.

b) Supoña agora que en ambos alt falantes selecciónase a mesma potencia, 1,0 mW, e o son puro que emiten é de 40 Hz Cal será o nivel de intensidade sonora no punto medio entre ambos alt falantes?

c) Empregando a curva isofónica adxunta, determine o nivel de sensación sonora no punto medio entre ambos alt falantes?

Datos: velocidade do son $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $I_0 = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

a) Por tratarse de ondas sincronicas, pode utilizarse un diagrama de fasores para o cálculo da amplitude A resultante, aplicando o teorema do coseno.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \delta$$

E como a intensidade da onda I é directamente proporcional ao cadrado da amplitude, $I \propto A^2$:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \delta$$

Considerando o desfase entre ambas ondas como: $\delta = k \cdot \Delta r$,

sendo k o número de onda: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Como a velocidade do son é: $v = \lambda \cdot \nu \rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu}$

Entón:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v} \nu$$

Polo que:

$$\delta = \frac{2\pi \cdot \nu \cdot \Delta r}{v}$$

Considerando que se trata de ondas con envolvente esférica:

$$I_1 = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_1}{4\pi r_1^2}; I_2 = \frac{P_2}{S_2} = \frac{P_2}{4\pi r_2^2}$$

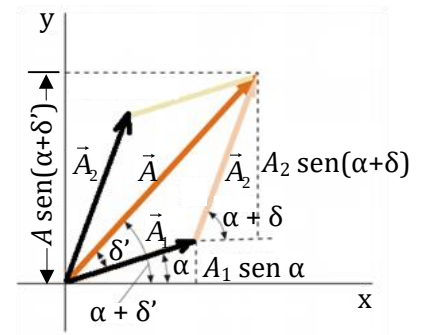
Desta maneira, substituíndo na ecuación da intensidade e tomando a velocidade do son de 340 m/s, resulta:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \delta$$

$$I = \frac{P_1}{4\pi r_1^2} + \frac{P_2}{4\pi r_2^2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{P_1}{4\pi r_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{P_2}{4\pi r_2^2}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi \nu \Delta r}{v}\right)$$

$$I = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 4^2} + \frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 3^2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 4^2}} \cdot \sqrt{\frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 3^2}} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot (4-3)}{340}\right)$$

$$I = 5,97 \cdot 10^{-6} + 1,59 \cdot 10^{-5} + 19,49 \cdot 10^{-6} \cdot (-0,850) \rightarrow \boxed{I = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}}$$



- b) Dado que os alt falantes vibran en fase, as ondas chegan ao punto medio tamén en fase (a diferenza de camiños é 0) polo que a amplitude duplícase.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \delta \xrightarrow{\text{en fase}} A = A_1 + A_2$$

Como ambos emiten coa mesma potencia de 1,0 mW: $A_1 = A_2$

$$A^2 = (2 A_1)^2 = 4 A_1^2$$

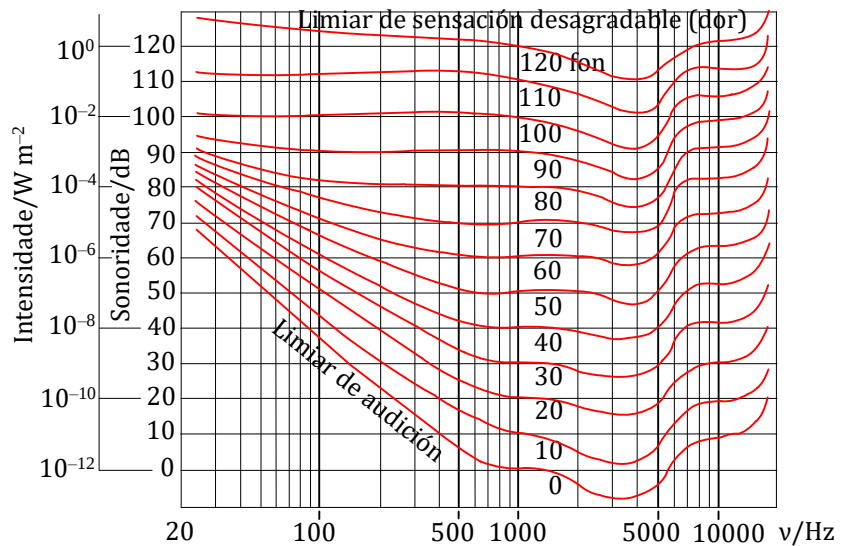
Como $I \propto A^2$, resulta: $I = 4 I_1$

$$I_1 = I_2 = \frac{P}{4 \pi r^2} \rightarrow I = 4 \cdot \frac{P}{4 \pi r^2}$$

Para determinar o nivel de intensidade sonora, en dB:

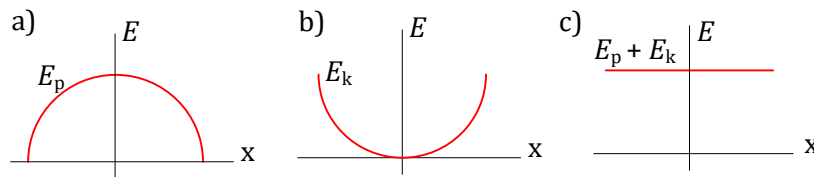
$$S = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 \cdot \log \left(\frac{4 \cdot \frac{P}{4 \pi r^2}}{I_0} \right) = 10 \cdot \log \left(\frac{4 \cdot \frac{1,0 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 2^2}}{10^{-12}} \right) \rightarrow \boxed{S = 79,00 \text{ dB}}$$

- c) Para determinar o nivel de sensación sonora, en fonios, observamos as curvas fónicas. Tomando a abscisa de 40 Hz e ordenada 79 dB obtemos unha curva isofónica de **60 fonios** de sensación sonora.



VIBRACIÓNS E ONDAS. CUESTIÓNS

1. Nun movemento harmónico simple, indica cal das seguintes gráficas se axusta á relación enerxía/elongación.



SOL.: c

A expresión da enerxía mecánica E_m dun oscilador harmónico de constante elástica k , que oscila cunha amplitude A , é: $E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$. Vemos que E_m é constante para calquera valor da elongación, como corresponde a unha forza conservativa.

As expresións da enerxía potencial E_p e da enerxía cinética E_k , en función da elongación x , respectivamente, son: $E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$ e $E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2)$.

Caso a): Non é correcto. A enerxía potencial ten o valor máximo nos extremos da traxectoria, $x = \pm A$, e o valor mínimo (nulo) no centro da traxectoria, $x = 0$. E, segundo a gráfica, nestas posicións a enerxía potencial é, respectivamente, mínima e máxima.

Caso b): Non é correcto. A enerxía cinética ten o valor máximo no centro de oscilación, $x = 0$, e o valor mínimo (nulo) nos extremos da traxectoria, $x = \pm A$. E, segundo a gráfica, nestas posicións a enerxía cinética é, respectivamente, mínima e máxima.

Caso c): É correcto. A enerxía mecánica dun oscilador harmónico é constante, independentemente do valor da elongación: $E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$. Esta é a situación que aparece na gráfica do ítem c).

2. De dous resortes elásticos con idéntica constante cólgase a mesma masa. Un dos resortes ten dobre lonxitude que o outro, entón, o corpo vibrará:
- Coa mesma frecuencia.
 - O de dobre lonxitude con frecuencia dobre.
 - O de dobre lonxitude coa metade da frecuencia.

SOL.: b

O período de vibración T dunha masa m colgada dun resorte elástico de constante k vén dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Se a masa e as constantes son iguais, o período de ambos e, polo tanto, a súa frecuencia serán iguais, ao non influír a lonxitude do resorte.

Pola mesma razón, a non influencia da lonxitude do resorte, as outras dúas opcións son falsas.

3. Cando un movemento ondulatorio se reflicte, a súa velocidade de propagación: a) aumenta; b) depende da superficie de reflexión; c) non varía.

SOL.: c

A reflexión é un fenómeno ondulatorio polo que as ondas modifican a dirección da velocidade de propagación ao chocar contra unha superficie. Polo tanto, non se produce cambio no módulo da súa velocidade de propagación, ao non cambiar o medio de propagación.

4. Se se cambian á vez o ton e a intensidade dun son procedente dunha trompeta, cales das seguintes magnitudes teñen que cambiar necesariamente?: a) frecuencia e lonxitude de onda; b) só a frecuencia; c) amplitude, frecuencia e lonxitude de onda.

SOL.: c

As calidades do son as que se refiren, intensidade e ton, están directamente relacionadas coa amplitude A (intensidade) e coa frecuencia f (ton). Por outra banda, frecuencia f e lonxitude de onda λ , para unha velocidade de propagación determinada, tamén están relacionadas entre si: $v = \lambda \cdot f$.

Por isto, unha modificación de ton e intensidade supoñen unha modificación de amplitude, frecuencia e lonxitude de onda.

5. A enerxía que transporta unha onda é proporcional: a) á frecuencia; b) á amplitude; c) aos cadrados da frecuencia e da amplitude.

SOL.: c

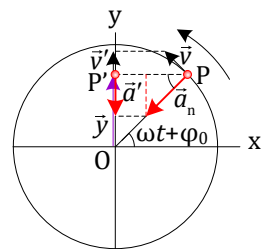
Un punto material de masa m alcanzado por unha onda empeza a vibrar e adquire enerxía E , podendo ser cinética, E_k , e/ou potencial, E_p : $E = E_k + E_p = E_{k \text{ máxima}} = E_{p \text{ máxima}} = 2 \pi^2 m A^2 f^2$, sendo A a amplitude e f a frecuencia. Polo tanto, a enerxía que transporta unha onda é directamente proporcional aos cadrados da súa frecuencia e amplitude.

6. Un movemento harmónico sinxelo determinado é a proxección dun movemento circular uniforme sobre un diámetro da circunferencia. A aceleración centrípeta no movemento circular é: a) maior ou igual á aceleración no MHS; b) sempre menor; c) menor ou igual á aceleración no MHS.

SOL.: a

A aceleración $\vec{a}'$ do MHS é unha función sinusoidal do tempo: $\vec{a}' = -\omega^2 y \vec{j}$, cuxo módulo é máximo no punto de elongación máxima, $y = A$, sendo: $a' = \omega^2 \cdot A$, e nula no centro de oscilación, $y = 0$, sendo: $a' = 0$.

A aceleración centrípeta do movemento circular uniforme correspondente, $a = \omega^2 \cdot r$, será igual á devandita aceleración do MHS cando $y = r = A$, e será sempre maior para valores $y < A$.



7. Unha onda sen rozamentos amortécese de tal xeito que a amplitude é proporcional á inversa da raíz cadrada da distancia á orixe. Isto débese a que é unha onda: a) esférica; b) cilíndrica; c) lineal.

SOL.: b

Tendo en conta que a intensidade I do movemento ondulatorio é a relación entre a potencia P (ou enerxía por unidade de tempo) e a superficie normal á dirección de propagación, teremos para ondas cilíndricas: $I = P/(2 \pi r h)$.

A intensidade é proporcional á enerxía E e esta é directamente proporcional ao cadrado da amplitude A de oscilación ($E = \frac{1}{2} k A^2$), resultando que I será directamente proporcional a A^2 e inversamente proporcional a r . Polo tanto, A será inversamente proporcional a $r^{1/2}$.

8. Escoitando un coro, atopamos nunha nota mantida que se producen altibaixos de sonoridade. Popularmente dise que é debido a que alguén "desentoa". Na realidade, o que pasa é que alguén:
- a) Está dando unha frecuencia sonora diferente ao resto.
 - b) Está producindo unha intensidade diferente.
 - c) A composición das frecuencias que constitúen a súa voz nese momento é diferente á dos seus compañeiros.

SOL.: a

Unha das calidades do son, o ton, que nos permite distinguir os sons agudos dos graves, depende da súa frecuencia fundamental. Cando as frecuencias fundamentais das ondas que se compoñen son diferentes, a composición das ondas pasa por intervalos de tempo nas que se producen interferencias construtivas e outros nas que son destrutivas, interpretadas como altibaixos de sonoridade. Polo tanto "desentoar" supón modificar esta frecuencia fundamental.

9. A velocidade dunha onda:

- a) Varía coa fase na que se atope o punto.
- b) Varía coa distancia do punto á orixe.
- c) Varía ao cambiar o medio de propagación.

SOL.: c

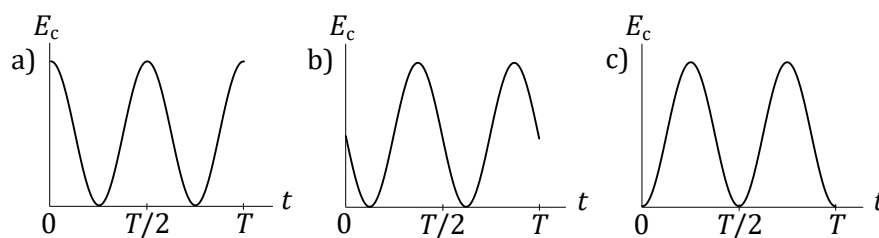
A velocidade dunha onda é o resultado do produto da lonxitude de onda pola frecuencia, e depende do medio no que se está a propagar a onda. Ao cambiar o medio de propagación producirase unha modificación da súa lonxitude de onda que implicará un cambio da velocidade da onda. A frecuencia non se modifica ao depender exclusivamente do foco emisor.

10. Na composición de dúas ondas luminosas das mesmas características prodúcense lugares onde non hai iluminación apreciable.
- a) Isto é unha reflexión.
 - b) Prodúcese unha interferencia.
 - c) Non é certo, non se produce nunca.

SOL.: b

As interferencias prodúcense por superposición de dous movementos ondulatorios. Neste caso estamos a considerar o comportamento ondulatorio da luz. Cando dúas ondas luminosas producidas por focos distintos que se propagan polo mesmo medio se atopan nun mesmo punto, prodúcese o fenómeno das interferencias. Posto que a luz ten natureza electromagnética, as perturbacións mutuas preséntanse como reforzos ou diminucións dos campos eléctricos e magnéticos, equivalentes á composición construtiva ou destrutiva das mesmas.

11. As condicións iniciais dun oscilador harmónico son: tempo: $t=0$, elongación: $x=0$ e velocidade: $v>0$. Que perfil representa correctamente a variación da E_c co tempo nun período?



SOL.: a

A enerxía cinética: $E_c = \frac{1}{2} \cdot k \cdot v^2 \xrightarrow[v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}]{k = m \cdot \omega^2} E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$, ten o máximo valor cando $x = 0$ que, neste caso, coincide con $t = 0$, e para o tempo de un período a gráfica correcta é a).

12. A enerxía mecánica dun oscilador harmónico:

- a) Duplícase cando se duplica a amplitude da oscilación.
- b) Duplícase cando se duplica a frecuencia da oscilación.
- c) Cuadríplícase cando se duplica a amplitude da oscilación.

SOL.: c

Como a enerxía mecánica é $E = (1/2) k A^2$, resulta que se duplicamos A se cuadríplícase E .

13. Unha corda colga do alto dunha torre de xeito que o extremo superior é invisible e inaccesible, pero o extremo inferior si se ve. Como averiguarías a lonxitude da corda?

- a) É imposible.
- b) Medindo a amplitude da oscilación.
- c) Medindo o período da oscilación.

SOL.: c

Considerando un comportamento de péndulo simple, se medimos o período T , $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, e

coñecido g , poderemos calcular o valor l da lonxitude da corda.

(Nota: se a densidade lineal da corda non é desprezable, teriamos que aplicar a relación que nos da o período nun péndulo físico, o que tornaría máis complicada a solución polo cálculo de l en función da densidade e lonxitude).

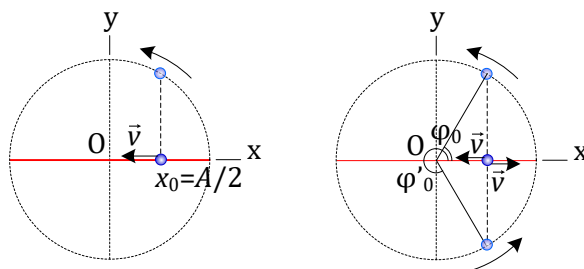
14. Se no instante $t = 0$, un móbil que describe un MAS se atopa en $x = A/2$, dirixíndose cara ao centro de oscilación, a súa ecuación do movemento é:

- a) $x = A \cdot \cos(\omega t + \pi/3) \text{ m}$
- b) $x = A \cdot \sin(\omega t + \pi/3) \text{ m}$
- c) $x = A \cdot \cos(\omega t + 5\pi/3) \text{ m}$

SOL. a

A fase inicial φ_0 obtémola a partir das condicións iniciais:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t=0 \rightarrow x=A/2} A/2 = A \cdot \cos(0 + \varphi_0) \rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = \pi/3 \text{ rad} \\ \varphi'_0 = 5\pi/3 \text{ rad} \end{cases}$$



Solo para a fase inicial $\varphi_0 = \pi/3$ rad, a velocidade é negativa.

A partir da expresión da velocidade comprobamos que a solución $\varphi_0 = \pi/3$ rad é a que cumpre que $v < 0$ no instante inicial $t = 0$.

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} \xrightarrow{\vec{x} = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{i}} \vec{v} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{i} \xrightarrow[t_0 = 0 \text{ s}]{\varphi_0 = \pi/3 \text{ rad}} \vec{v} < \vec{0}$$

15. A ecuación dunha onda transversal de amplitude 4 cm e frecuencia 20 Hz que se propaga no sentido negativo do eixo X cunha velocidade de $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ é:

d) $y(x, t) = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \cos[\pi(40t + 2x)] \text{ m}$

e) $y(x, t) = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \cos[\pi(40t - 2x)] \text{ m}$

f) $y(x, t) = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \cos[2\pi(40t + 2x)] \text{ m}$

SOL. a

A única resposta posible é a a), xa que cumpre que: $\nu = 20 \text{ Hz}$ e $v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$y(x, t) = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(40\pi t + 2\pi x) \text{ m}$$

Comparando coa ecuación xeral, $y(x, t) = A \cos(\omega t + kx)$:

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2\pi\nu \rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} \\ \omega = 40\pi \text{ s}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \nu = \frac{40\pi}{2\pi} \rightarrow \nu = 20 \text{ Hz}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nu = \frac{x}{t} \rightarrow \nu = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \\ k = 2\pi \text{ m}^{-1} \\ \nu = 20 \text{ Hz} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ m} \rightarrow \nu = 1 \cdot 20 \rightarrow \nu = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

16. Nun medio homoxéneo e isótropo, unha fonte sonora produce, a unha distancia r , un son de 40 dB. Se a intensidade do son se fai 100 veces maior, a nova sonoridade, á mesma distancia, será: a) 50 dB ; b) 60 dB ; c) 70 dB.

SOL. b

$$\left. \begin{array}{l} S' = 10 \cdot \log \frac{100I}{I_0} \rightarrow S' = 10 \cdot \left(\log 100 + \log \frac{I}{I_0} \right) \\ S = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 40 \text{ dB} \rightarrow \log \frac{I}{I_0} = \frac{40}{10} \end{array} \right\} \rightarrow S' = 10 \cdot \left(\log 100 + \frac{40}{10} \right) \rightarrow S' = 60 \text{ dB}$$

17. Nun medio homoxéneo e isótropo, unha fonte sonora produce, a unha distancia de 1 m, un son de 40 dB. A unha distancia de 10 m, a sonoridade será: a) 10 dB; b) 20 dB; c) 30 dB.

SOL. b

A sonoridade S diminúe coa distancia r ao foco emisor segundo a expresión:

$$S = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{I}{I_0} = \frac{r_0^2}{r^2} \end{array} \right\} \rightarrow S = 10 \cdot \log \frac{r_0^2}{r^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} S = 10 \cdot \log \frac{r_0^2}{1^2} \\ S' = 10 \cdot \log \frac{r_0^2}{10^2} \end{array} \right\} \rightarrow S - S' = 10 \cdot \left(\log \frac{r_0^2}{1^2} - \log \frac{r_0^2}{10^2} \right) = 10 \cdot \log \frac{r_0^2}{\frac{r_0^2}{10^2}} = 10 \cdot \log 100 = 20 \text{ dB}$$

$$40 - S' = 20 \rightarrow S' = 20 \text{ dB}$$

18. O chifre dunha locomotora emite un son de 435 Hz de frecuencia. Se a locomotora móvese achegándose a un observador en repouso, a frecuencia percibida polo observador é: a) 435 Hz; b) maior ca 435 Hz; c) menor ca 435 Hz.

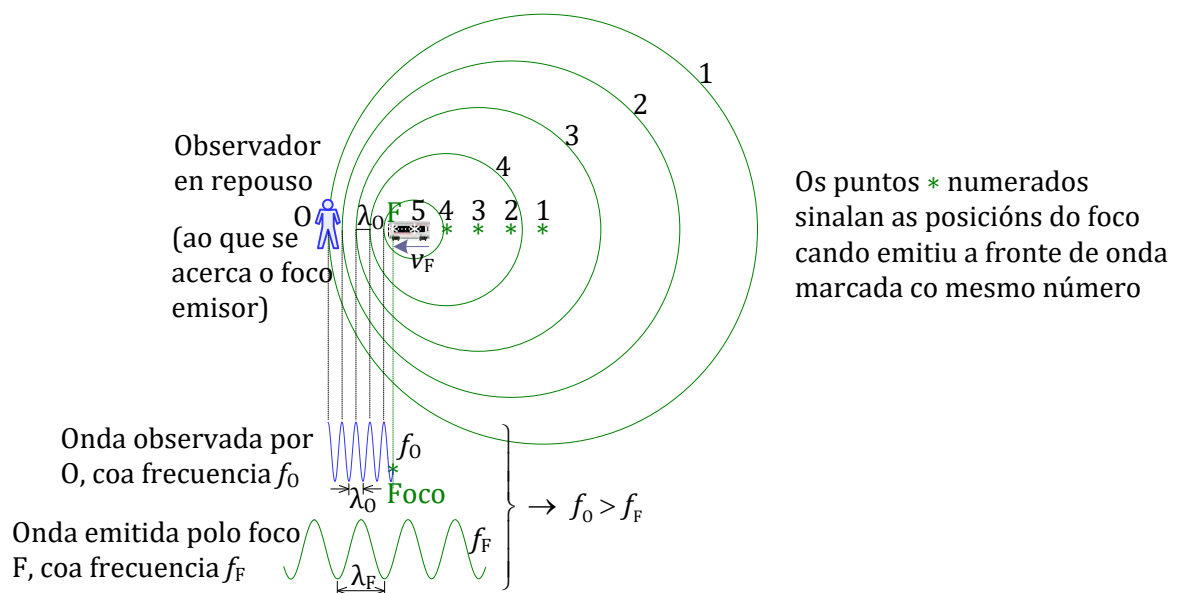
SOL. **b**

Cando o foco emisor de ondas e e/ou o observador están en movemento relativo con respecto ao medio en que a onda se propaga, a frecuencia das ondas observadas é distinta da frecuencia das ondas emitidas. Este cambio de frecuencia recibe o nome de **efecto Doppler**.

A relación da frecuencia f_0 , que aparece no efecto Doppler, percibida polo observador, que permanece en repouso, coa frecuencia f_F do foco emisor, que se acerca ao observador coa celeridade

v_F , vén dada pola expresión: $\frac{f_0}{f_F} = \frac{v}{v - v_F}$, sendo v a rapidez da onda no medio en que se propaga.

Desta expresión vemos que $f_0 > f_F$.



19. Un ciclista desprázase en liña recta por unha estrada a velocidade constante. Nesta estrada hai dous coches parados, un diante, C_1 , e outro detrás, C_2 , do ciclista. Os coches teñen bucinas idénticas pero o ciclista sentirá que a frecuencia das bucinas é: a) maior a de C_1 ; b) a mesma; c) maior a de C_2 .

SOL. b

Cando o foco emisor de ondas e e/ou o observador están en movemento relativo con respecto ao medio en que a onda se propaga, a frecuencia das ondas observadas é distinta da frecuencia das ondas emitidas. Este cambio de frecuencia recibe o nome de **efecto Doppler**. E a relación da frecuencia f' que aparece no efecto Doppler, percibida polo observador, coa frecuencia f do foco emisor, cando o observador se move con respecto ao foco, que permanece en repouso, vén dada polas expresións:

- Cando o observador se acérca ao foco emisor, que permanece en repouso:

$$\frac{f'_{C1}}{f_{C1}} = \frac{v_{\text{onda no medio}} + v_{\text{Observador}}}{v_{\text{onda no medio}}}$$

- Cando o observador se afasta do foco emisor, que permanece en repouso:

$$\frac{f'_{C2}}{f_{C2}} = \frac{v_{\text{onda no medio}} - v_{\text{Observador}}}{v_{\text{onda no medio}}}$$

De comparar as anteriores expresións resulta que a frecuencia observada polo ciclista do son emitido pola bucina do coche C_1, f'_{C1} , ao cal se acerca, é maior que a que observa do coche C_2, f'_{C2} , do cal se afasta.