

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula cuando sea

posible:

a) $C \cdot A + B$

b) $C \cdot (A+B)$

c) $A \cdot B$

d) $C \cdot A$

e) $B^t \cdot C$

f) $(A+B) \cdot C$

g) $A \cdot B^t$

h) $A^t \cdot B$

Solución:

$$C \cdot A + B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 22 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 25 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 35 \\ 6 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ No es posible

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 22 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$(A+B) \cdot C$ no se puede hacer

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -15 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -12 & 17 \end{pmatrix}$$

2. Calcula el rango de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 15 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \\ 5 & 10 & -15 & 25 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 - 5F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -21 & 12 \end{pmatrix} \xRightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 12 \end{pmatrix} \xRightarrow{F_4 = F_4 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango = 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{F_3 = F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango=3

$$\begin{array}{c}
F_1 = F_1/3 \\
F_2 = F_2 - 2F_1 \\
F_3 = F_3 - 5F_1 \\
\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 15 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \\ 5 & 10 & -15 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \\ 5 & 10 & -15 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
F_1 = F_1/3 \\
F_2 = F_2 - 7F_1 \\
F_3 = F_3 - 5F_1 \\
\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{-23}{2} & \frac{-27}{2} \\ 0 & \frac{-13}{2} & \frac{-21}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-27}{23} \\ 0 & \frac{-13}{2} & \frac{-21}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-27}{23} \\ 0 & 0 & \frac{-63}{23} \end{pmatrix} \\
F_2 = F_2 / (-23/2) \\
F_3 = F_3 + (13/2)F_2
\end{array}$$

3. Calcula la inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$F_1 = F_1/2$ $F_2 = F_2 - F_1$ $F_2 = F_2/(5/2)$ $F_1 = F_1 + (1/2)F_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

La inversa es $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{8}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{0}{10} & \frac{0}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$F_2 = F_2 + 2F_1$ $F_2 \leftrightarrow F_3$ $F_3 = F_3 - 3F_2$ $F_3 = F_3/(-10)$ $F_2 = F_2 - 4F_3$ $F_1 = F_1 - 2F_2$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \frac{-6}{10} & \frac{-8}{10} & \frac{4}{10} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{8}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{10} & \frac{10}{10} & \frac{10}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{array} \right)$$

La inversa es $\left(\begin{array}{ccc} \frac{-6}{10} & \frac{-8}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{8}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{array} \right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$F_3 = F_3 - 2F_1$ $F_3 = F_3 - F_2$

La matriz no tiene inversa.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$F_2 = F_2 - F_1$
 $F_3 = F_3 + F_1$ $F_2 \leftrightarrow F_3$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$F_4 = F_4 - 2F_2$ $F_4 \leftrightarrow F_3$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$F_3 = F_3 / (-5)$
 $F_4 = F_4 / 2$ $F_1 = F_1 - F_4$
 $F_3 = F_3 + (1/5)F_4$

$$\begin{array}{l}
 F_1 = F_1 - F_3 \\
 F_2 = F_2 - 2F_3
 \end{array}
 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0
 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \\
 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\
 & & & & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0
 \end{array} \right)$$

La inversa es

$$\left(\begin{array}{cccc}
 \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \\
 \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\
 \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\
 \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0
 \end{array} \right)$$

4. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ 2 & 1 & 2x & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 1 & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -10$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -5 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = -15$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 8 \cdot 6 \cdot 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot 7 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \cdot 4 = 45$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 8 & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$F_2 = F_2 / (-2)$ $F_4 = F_4 - 3F_2$

$$= -2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-11) = -22$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{(2+4)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 + 6 \cdot 48 = 138$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ 2 & 1 & 2x & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 1 & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ 0 & 1-2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-2x \end{vmatrix} =$$

$F_2 = F_2 - 2F_1$
 $F_3 = F_3 - F_2$
 $F_4 = F_4 - F_3$
 $F_5 = F_5 - F_4$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-2x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-2x \end{vmatrix} = (1-2x)^4$$

5. Calcula el rango de las siguientes matrices estudiando sus menores:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -3 & -8 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{rango} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{rango} = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -3 & -8 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow \text{rango} \geq 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & -8 \end{vmatrix} = -72 \Rightarrow \text{rango} \geq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -3 & -8 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 10 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot (-36) - 10 \cdot 18 = 180 - 180 = 0$$

Por tanto el rango es 3

6. Calcula la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{adj}(B) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(B)^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\text{adj}(C) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(C)^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

7.

a) Estudia como es el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-4z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$$

b) Resuelve el anterior sistema de ecuaciones.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Dos filas iguales} \Rightarrow$$

Como $|A| = 0 \Rightarrow$ No es Compatible Determinado

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 7 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow -3y + 7z = -3 \Rightarrow y - \frac{7}{3}z = 1 \Rightarrow y = 1 + \frac{7}{3}z \Rightarrow x + 1 + \frac{7}{3}z - 4z = 2 \Rightarrow x - \frac{5}{3}z = 1 \Rightarrow$$

$$x = 1 + \frac{5}{3}z \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(1 + \frac{5}{3}\lambda, 1 + \frac{7}{3}\lambda, \lambda \right) \equiv (1 + 5\lambda, 1 + 7\lambda, 3\lambda)$$

8. Encuentra la solución del siguiente sistema aplicando el teorema de Rouché.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + 2y - 8z = 0 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

Solución:

En un sistema homogéneo siempre se cumple $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$, ya que la última columna de A' son todos ceros.

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ entonces } \text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2$$

Tenemos por tanto un sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x - y = z \\ 3x + 2y = 8z \end{cases} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & z \\ 3 & 2 & 8z \end{array} \right)$$

Resolviendo por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & -1 \\ 8z & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2z - 8z}{5} = \frac{-6}{5}z \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 3 & 8z \end{vmatrix}}{5} = \frac{8z - 3z}{5} = z$$

Por tanto la solución será de la forma: $(x, y, z) = \left(\frac{-6}{5}\lambda, \lambda, \lambda \right); \lambda \in \mathbb{R}$

9. Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x-5y+az=4 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

es compatible indeterminado.

a) Calcula a y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro.

b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que $x=y$

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -5 & a & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & a-3 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & a-8 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Para ser Compatible indeterminado} \Rightarrow$$

$$a-8=0 \Rightarrow a=8 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 3y-5z=0 \Rightarrow 3y=5z \Rightarrow y=\frac{5}{3}z \Rightarrow x-\frac{10}{3}z+3z=4 \Rightarrow$$

$$x-\frac{1}{3}z=4 \Rightarrow x=\frac{1}{3}z+4 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow \left(4+\frac{1}{3}\lambda, \frac{5}{3}\lambda, \lambda \right) \equiv (4+\lambda, 5\lambda, 3\lambda)$$

b)

$$4+\lambda=5\lambda \Rightarrow 4\lambda=4 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (4+1, 5 \cdot 1, 3 \cdot 1) \equiv (5, 5, 3)$$

$$4+\frac{1}{3}\lambda=\frac{5}{3}\lambda \Rightarrow \frac{4}{3}\lambda=4 \Rightarrow \lambda=\frac{12}{4}=3 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow \left(4+\frac{1}{3} \cdot 3, \frac{5}{3} \cdot 3, 3 \right) \equiv (5, 5, 3)$$

10. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ ax-y+2z=2 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de a

b) Resolver el sistema cuando tenga más de una solución

Solución:

a)

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 3a - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-3/2 \end{cases}$$

Entonces si $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}, 3\}$ $\text{rango}(A)=3=\text{rango}(A')$ y el sistema es compatible determinado

Como $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ entonces $\text{rango}(A) \geq 2$

Si orlamos el menor tenemos $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} = 5a - 15 = 0 \Leftrightarrow a=3$

Por tanto si $a=3$ entonces $\text{rango}(A)=2=\text{rango}(A')$ y el sistema es compatible indeterminado

Si $a=-3/2$ $\text{rango}(A)=2 \neq 3=\text{rango}(A')$ y por tanto el sistema es incompatible.

b)

Si $a=3$ el sistema queda:

$$\begin{cases} -2y - z = -1 - x \\ -y + 2z = 2 - 3x \end{cases} \Rightarrow B' = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & -1-x \\ -1 & 2 & 2-3x \end{array} \right)$$

resolviendo por Cramer

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1-x & -1 \\ 2-3x & 2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-2-2x+2-3x}{-5} = x \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1-x \\ -1 & 2-3x \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-4+6x-1-x}{-5} = 1-x$$

por tanto la solución será de la forma $(x, y, z) = (t, t, 1-t)$; $t \in \mathbb{R}$

11. En el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - 2y + kz = 5 \end{cases}$$

a) Discute para que valores de k el sistema es compatible

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & k & 5 \end{array} \right)$$

$$|M| = 3 - 7k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{7}$$

- Si $k \neq \frac{3}{7}$ entonces $\text{rango}(M) = 3 = \text{rango}(M')$ y el sistema es compatible determinado.
- Si $k = \frac{3}{7}$ entonces $\text{rango}(M) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$.

Por otra parte $\text{rango}(M') = 3$ ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

y por tanto el sistema es incompatible.

b)

Si $k = \frac{3}{7}$ podemos resolver el sistema utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & k \end{vmatrix}}{3-7k} = \frac{9-22k}{3-7k}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & k \end{vmatrix}}{3-7k} = \frac{6-17k}{3-7k}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{3-7k} = \frac{-3}{3-7k}$$

$$\text{Para } k=0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango de } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -15 - 16 - 6 + 72 - 1 - 20 = 72 - 58 = 14 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } M' = 3.$$

$$\text{Para } k=0 \Rightarrow \text{Rango } M = 2 \text{ ; ; Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$$

El sistema dado es compatible para $k \neq 0$.

b)

Para la resolución del sistema se utiliza el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x+2y-z=8 \\ 2x-3y+z=-1 \\ 3x-y+kz=5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y-z=8 \\ -7y+3z=-17 \\ -7y+(k+3)z=-19 \end{array} \right\} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x+2y-z=8 \\ -7y+3z=-17 \\ kz=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{z = -\frac{2}{k}}} \text{ ; ; } -7y - \frac{6}{k} = -17 \text{ ; ; } 7y = 17 - \frac{6}{k} = \frac{17k-6}{k} \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{17k-6}{7k}}} \text{ ; ;}$$

$$x = 8 - 2y + z = 8 - \frac{34k-12}{7k} - \frac{2}{k} = \frac{56k+34k-12-14}{7k} = \underline{\underline{\frac{90k-26}{7k}}} = x.$$

$$12. \begin{cases} y+z=1 \\ (m-1) \cdot x + 3y+z=2 \\ x+(m-1) \cdot y-z=0 \end{cases}$$

a) Discute para qué valores de m el sistema es compatible.

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

Solución:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & m-1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + (m-1)^2 - 3 + m - 1 = m^2 - m - 2 \quad \text{por tanto, } |A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Tenemos, por tanto, que si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ entonces $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A')$ y según el teorema de Roché el sistema es compatible determinado.

Si $m = -1$ entonces

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ entonces $\text{rango}(A)=2$

mientras que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3$ implica $\text{rango}(A')=3$

Por tanto si $m=-1$ el sistema es incompatible

Si $m=2$ entonces $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ entonces $\text{rango}(A)=2$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ entonces $\text{rango}(A')=2$ y el

teorema de Roché nos dice que el sistema es compatible indeterminado

b)

Cuando $m=2$ despreciamos la tercera ecuación y pasamos las z para el segundo miembro, entonces el sistema queda:

$$B' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1-z \\ 1 & 3 & 2-z \end{array} \right)$$

Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 2-z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3-3z-2+z}{-1} = 2z-1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-1+z}{-1} = 1-z$$

Las soluciones, por tanto, serán de la forma $(2t-1, 1-t, t)$; $t \in \mathbb{R}$

13. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula α, β, γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $A \cdot X = B$

b) Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $A \cdot X = O$ sea compatible determinado.

c) Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $A \cdot X = B$

Solución:

a)

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ \gamma + 3\alpha = 0 \\ 1 + 2\beta + 3\gamma = 1 \end{cases}$$

De las ecuaciones primera y tercera se deduce que $\alpha = 1$. Sustituyendo en la segunda ecuación: $\gamma = -3$. Sustituyendo en la tercera ecuación: $1 + 2\beta - 9 = 1$;; $\beta = \frac{9}{2}$.

Solución: $\alpha = 1, \beta = \frac{9}{2}, \gamma = -3$.

b)

Para $\beta = \gamma = 1$ tiene que ser compatible determinado el siguiente sistema:

$$A \cdot X = O \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x + y + z = 0 \\ x + \alpha z = 0 \\ 1 + y + z = 0 \end{cases}.$$

Para que el sistema homogéneo resultante sea compatible determinado (solución trivial) es necesario que la matriz de coeficientes sea invertible, es decir: su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \alpha - \alpha^2 - 1 = a - a^2 = a(1 - a) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \;; \; \underline{a_2 = 1}.$$

$A \cdot X = O$ es compatible determinado tiene que ser

$$\underline{A \cdot X = O \text{ es compatible determinado } \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}}$$

c)

$$\text{Para } \alpha = -1, \beta = 1 \text{ y } \gamma = 0 \text{ es } A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ cu-}$$

ya solución es: $x=0, y=1, z=0$.

14. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa

b) Calcular la matriz inversa de A en el caso $a=2$

Solución:

a) Si una matriz tiene inversa su determinante no es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ 0 & 5 & -2a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 5 - 2a^2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 5 - 2a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$2a^2 = 5 \Rightarrow a^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{10}}{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2} \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

b)

$$\text{Con } a = 2 \Rightarrow |A| = 5 - 2 \cdot 2^2 = 5 - 8 = -3 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A' \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } A' = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & -4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & -4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

15. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$, calcula, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada caso qué propiedad se está utilizando.

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$

Solución:

a)

Si toda una fila está multiplicada por un número, ese número se puede sacar como factor

$$\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Si se intercambian dos filas, el determinante cambia de signo

$$\frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot 4 = -6$$

b)

Si a una fila le restamos una combinación lineal de otras, el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} F_2 = F_2 - 3F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{array}$$

Si toda una fila está multiplicada por un número, ese número se puede sacar como factor

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si se intercambian dos filas, el determinante cambia de signo

$$2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 = 8$$

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ encuentra todas las matrices B que cumplen $ABA=A$

Solución:

Como B se puede multiplicar por A, tanto por la derecha como por la izquierda, tenemos que B tiene que ser de 3×2 . Es decir:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

Multiplicando:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ e & f \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A \cdot B \cdot A = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & -(a-c) & b-d \\ e & -e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Igualando tenemos:

$$\begin{cases} a-c=1 \Rightarrow a=c+1 \\ b-d=0 \Rightarrow b=d \\ e=0 \\ f=1 \end{cases}$$

Por tanto, la matriz B será de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} c+1 & d \\ c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad c, d \in \mathbb{R}$$

17. Sea m un número real y A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina todos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) Determina, si existe, la inversa de A cuando $m=0$

c) Determina, si existe, la inversa de A^2 cuando $m=0$

Solución:

a)

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$|A| = -1 - m^2 \Rightarrow |A| < 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

b)

Si $m=0$ entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = -1$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$|A^2| = |A|^2 = 1 \Rightarrow \exists (A^2)^{-1}$$

$$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2$

Solución:

Como $|A| = -1$ existe la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y podemos multiplicar la ecuación por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X + A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot A^2 \Leftrightarrow X + A^{-1} \cdot B = A \Leftrightarrow X = A - A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

19. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1}

b) Calcula A^{2013} y su inversa.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

Podemos calcular la inversa por el método habitual, o bien como

$$A \cdot A = 2I \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot A \cdot A = I \Rightarrow \frac{1}{2} A = A^{-1}$$

tenemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{2013} = A \cdot A^{2012} = A \cdot (A^2)^{1006} = A \cdot (2I)^{1006} = A \cdot 2^{1006} \cdot I = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}$$

$$(A^{2013})^{-1} = (A^{-1})^{2013} = \left(\frac{1}{2} A\right)^{2013} = \frac{1}{2^{2013}} \cdot 2^{1006} \cdot A = \frac{1}{2^{1007}} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}} \\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}} \end{pmatrix}$$

20.

a) Determina el rango de la matriz A , que aparece a continuación, según los diferentes valores de a :

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

b) Determina, si existe, una matriz $A \in M_{2 \times 2}$, que verifique la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el rango de la matriz A ?

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix} = -4a^2 + 24a - 36 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Entonces si $a \neq 3$ el rango de A es 3

Si $a = 3$ entonces el rango de A es 2, ya que el menor $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 40 \neq 0$

b)

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, estas matrices tienen inversa, por tanto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Haciendo cuentas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

El rango de A es uno, ya que $\begin{vmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{vmatrix} = 0$

21. Dado el número real a, se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla el rango de la matriz $A^2 - A^t$ según los distintos valores de A

Solución:

$$A^2 - A^t = \begin{pmatrix} a+2 & 2a & 1 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 2a-1 & 0 \\ 2-a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2 - A^t| = \begin{vmatrix} a+1 & 2a-1 & 0 \\ 2-a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \underset{F_2 = F_2 - F_3}{=} \begin{vmatrix} a+1 & 2a-1 & 0 \\ 2-a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a+1 & 2a-1 \\ 2-a & 0 \end{vmatrix} = -(2-a) \cdot (2a-1)$$

Por tanto, si $a \neq 2$ y $a \neq \frac{1}{2}$ entonces $\text{rango}(A^2 - A^t) = 3$

Si $a = 2$ tenemos:

$$A^2 - A^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y en este caso $\text{rango}(A^2 - A^t) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

Si $a = \frac{1}{2}$:

$$A^2 - A^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

y también $\text{rango}(A^2 - A^t) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0$

22.

a) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determina la matriz B que verifica $A+B=A \cdot B$

b) Sea M una matriz cuadrada tal que $\det(M) = -1$ y $\det[-2M] = 8$. Calcula el tamaño de la matriz M.

Solución:

a)

$$A+B=A \cdot B \Leftrightarrow A=A \cdot B-B \Leftrightarrow A=(A-I) \cdot B$$

Entonces, si existe $(A-I)^{-1}$ tendremos que $(A-I)^{-1} \cdot A=B$

$$A-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A-I|=2 \Rightarrow \exists (A-I)^{-1}$$

Haciendo cuentas:

$$(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = (A-I)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$M \in M_{n \times n} \Rightarrow \det[-2M] = (-2)^n \cdot \det[M]$$

por tanto

$$8 = (-2)^n \cdot (-1) \Rightarrow n=3$$

$$M \in M_{3 \times 3}$$

23. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resolver el sistema: $\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X+4Y=B \end{cases}$

b) Calcular el rango de $M=A \cdot B$

Solución:

a)

$$\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X+4Y=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8X-12Y=4A \\ 9X+12Y=3B \end{cases} \Rightarrow 17X=4A+3B \Rightarrow X=\frac{1}{17} \cdot (4A+3B)$$

$$X = \frac{1}{17} \cdot \left[4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X+4Y=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6X+9Y=-3A \\ 6X+8Y=2B \end{cases} \Rightarrow 17Y=-3A+2B \Rightarrow Y=\frac{1}{17} \cdot (-3A+2B)$$

$$Y=\frac{1}{17} \cdot \left[-3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$M=A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|M|=0 \Rightarrow \text{rango}(M) < 3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow \text{rango}(M) = 2$$

24. Dado el sistema $\begin{cases} ax-3y+az=1 \\ 3x+2y=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$

a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a

b) Resolverlo cuando sea compatible

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2a - 3a - 2a + 9 = 9 - 3a \Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -3 & a & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

a)

Si $a \neq 3$ entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A') = 3$ y el sistema es compatible determinado.

Si $a = 3$ entonces $\text{rango}(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$ mientras que

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A') = 3$$

Por lo tanto si $a = 3$ el sistema es incompatible

b)

En el caso en que $a \neq 3$ podemos utilizar la regla de Cramer para resolver el sistema:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2-a+2a+3}{9-3a} = \frac{a+5}{9-3a}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a-3a-a-3}{9-3a} = \frac{-3a-3}{9-3a}$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2a - 3 - 3 - 2 + a - 9}{9 - 3a} = \frac{-a - 17}{9 - 3a}$$

25.

a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A|=5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes:

$$|-A| \quad |A^{-1}| \quad |A^t| \quad |A^3|$$

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ calcula, usando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución:

a)

$$|-A| = (-1)^2 \cdot |A| = 5 \text{ ya que } A \in M_{2 \times 2} \text{ tiene dos filas (o columnas)}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5} \quad (1 = |I| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|)$$

$$|A^t| = |A| = 5$$

$$|A^3| = |A|^3 = 5^3 = 125 \quad (|A \cdot B| = |A| \cdot |B|)$$

b)

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

Si una línea es múltiplo de otra el determinante es cero

Al intercambiar 2 filas el determinante cambia de signo

26. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calcula todos los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot \vec{v} = \vec{v}$

b) Calcula A^{-1}

Solución:

a)

$$A \cdot \vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} -x + 3y + z = x \\ -4x + 6y + 3z = y \\ 6x - 7y - 4z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ -4x + 5y + 3z = 0 \\ 6x - 7y - 5z = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo de matriz de coeficientes $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$.

$$\text{Rang } M \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 6 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 50 + 28 + 54 - 30 - 42 - 60 = 132 - 132 =$$

$= 0 \Rightarrow \text{Rang } M = 2 \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

El sistema admite infinitas soluciones. Resolviendo el sistema, despreciando una ecuación (por ejemplo la tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$$\begin{cases} -2x + 3y = -\lambda \\ -4x + 5y = -3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 6y = -2\lambda \\ 4x - 5y = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow y = \lambda; \quad 4x - 5\lambda = 3\lambda \Rightarrow x = 2\lambda.$$

$$\text{Solución: } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \forall \lambda \in R.$$

b)

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & -7 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \end{vmatrix} = 24 + 28 + 54 - 36 - 21 - 48 = 106 - 105 = 1.$$

$$A^{-1} = \text{Adj} \frac{(A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -8 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

27. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que se verifica $A \cdot B = 2C - D$, plantea un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son x, y, z , donde a es un parámetro.

b) Estudia el carácter del sistema para los distintos valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones)

Solución:

a)

$$A \cdot B = 2C - D \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax + y = -2 - z \\ x + ay = -2 - z \\ x = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax + y + z = -2 \\ x + ay + z = -2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1 - a + 1 = -a^2 - a + 2 = 0 \quad ; \quad a^2 + a - 2 = 0 \quad ; \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{a_1 = -2} \quad ; \quad \underline{a_2 = 1}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible determinado.}$$

$$\text{Para } a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 + 1 + 2 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}.$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{E = E\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado.}$$

$$\text{Resolvemos para } a \neq -2 \text{ y } a \neq 1, \text{ el sistema resulta } \begin{cases} ax + y + z = -2 \\ x + ay + z = -2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + y + z = -2 \\ x + ay + z = -2 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} az + y + z = -2 \\ z + ay + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + (a+1)z = -2 \\ ay + 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay + a(a+1)z = -2a \\ -ay - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(a^2 + a)z - 2z = 2 - 2a \quad ; \quad (a^2 + a - 2)z = 2(1 - a) \quad ; \quad z = \frac{2(1-a)}{a^2 + a - 2} = \frac{2(1-a)}{(a+2)(a-1)} = \underline{\underline{\frac{-2}{a+2}}}.$$

$$y = -2 - (a+1)z = -2 + \frac{2(a+1)}{a+2} = \frac{-2a - 4 + 2a + 2}{a+2} = \underline{\underline{\frac{-2}{a+2}}}.$$

Solución: $\left\{ x=y=z=\frac{-2}{a+2} ; \forall a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \right\}$

Para $\alpha = -2$ el sistema resulta $\begin{cases} -2x+y+z=-2 \\ x-2y+z=-2 \\ x-z=0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado;

despreciando, por ejemplo, la primera ecuación y haciendo $x=z=\lambda$:

$$y = -2 + 2x - z = -2 + 2\lambda - \lambda \Rightarrow \underline{y = -2 + \lambda} \Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para $\alpha = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x+y+z=-2 \\ x-z=0 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-z=0 \end{cases}$.

Haciendo $\underline{x=z=\lambda} \Rightarrow y = -2 - x - z = \underline{-2 - 2\lambda}$.

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

28. (Aragón 2015)

a) Considera la matriz y los vectores siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & y & x \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde x, y, z son números reales.

Determina x, y, z para que el vector $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $M \cdot A = B$

b) Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a \neq 0$, $a+b=0$, $c=a$

Determina si el sistema $N \cdot X = B$ es compatible determinado.

Solución:

a)

Si es solución del sistema, ha de cumplirse:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y+2z+3x=0 \\ z+2y+3x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7/5 & 3/5 \\ 0 & -4 & -8 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & -12/5 & 2/5 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} z = -1/6 \\ y = 3/5 + 7/5 \cdot 1/6 = 5/6 \\ x = 1 + 3/6 - 10/6 = -1/6 \end{cases}$$

b)

Con las condiciones impuestas, la matriz N queda: $N = \begin{pmatrix} a & -a & a \\ -a & a & a \\ a & a & -a \end{pmatrix}$

Según el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema será compatible determinado si y sólo si el determinante de N es distinto de 0. En este caso, tanto el rango de la matriz de coeficientes como de la matriz ampliada sería 3, el mismo que el número de incógnitas.

$$|N| = -a^3 - a^3 - a^3 - a^3 - a^3 + a^3 = -4a^3$$

Como $a \neq 0$, el sistema es compatible determinado.

29. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^5

b) Calcula A^{-1}

Solución:

a) $A^2 = I \Rightarrow A^5 = A$

b) $A^2 = I \Rightarrow A^{-1} = A$

30. Dado el sistema $\begin{cases} x - y + z = k \\ 3x - 3y = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{cases}$

Clasifica el sistema en función del parámetro k.

Resuelve el sistema para aquellos valores de k en que sea compatible.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & k \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & k & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 3k + 3$ entonces $k \neq -1 \Rightarrow \text{rango}(A) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $k = -1$

Tenemos que $\text{rango}(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Para calcular el rango de A' estudiaremos las columnas 2, 3 y 4

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A') = 3$$

Por lo tanto si $k = -1$ el sistema es incompatible.

b)

Si $k \neq -1$ resolvemos el sistema mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-9k+3}{3k+3} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{3k+3} = \frac{-9k+3}{3k+3} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{3k+3} = \frac{3k^2+3k}{3k+3} = k$$

31. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifique: $B \cdot X - B^2 = A \cdot B$

Solución:

$$B \cdot X - B^2 = A \cdot B \Leftrightarrow B \cdot X = A \cdot B + B^2 \Leftrightarrow X = B^{-1} \cdot A \cdot B + B$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

32. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, calcula, usando las oportunas propiedades de los determinantes: (2,5 puntos)

a) $\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 = -6$$

b)

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 30 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=-5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 2 = -800$$

33. Sea M una matriz cuadrada que cumple $M^2 - 2M = 3I$, donde I es la matriz identidad. Razona si M tiene inversa, y de ser así expresa M^{-1} en función de M

Solución:

$$M^2 - 2M = 3I \Leftrightarrow M \cdot (M - 2I) = 3I \Leftrightarrow M \cdot \left(\frac{M - 2I}{3} \right) = I$$

$$\text{Así pues, } \exists M^{-1} = \frac{M - 2I}{3}$$

34.

a) **Calcula el rango de la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

b) **Dada la matriz** $B = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ m & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; m \in \mathbb{R}$, **indica para qué valores del parámetro m la matriz es regular (invertible)**

Solución:

a)

Por Gauss:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 5F_1 \\ F_3 = F_3 - 9F_1 \\ F_4 = F_4 - 13F_1}]{\substack{F_3 = F_3 - 2F_2 \\ F_4 = F_4 - 3F_2}} \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

b)

$$\exists B^{-1} \Leftrightarrow |B| \neq 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ m & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2m - 3m - 2 + m^2 = m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Por tanto B es regular si y sólo si $m \neq -1$ y $m \neq 2$

35. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2y + a^2z = a + 4 \\ ax - y + (a+2)z = 1 \\ ax - 2y + az = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a^2 \\ a & -1 & a+2 \\ a & -2 & a \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a^2 & a+4 \\ a & -1 & a+2 & 1 \\ a & -2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2a \cdot (a+2) - 2a^3 + a^3 - 2a^2 = -a^3 + 4a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \\ a=-2 \end{cases}$$

Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$ entonces $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A')$ y el sistema es compatible determinado

Si $a=0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}(A) = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$\text{Rango}(A') = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

Por lo tanto, cuando $a=0$ el sistema es **incompatible**.

Si $a=2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}(A) = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\text{Rango}(A') = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Por lo tanto, cuando $a=2$ el sistema es **incompatible**.

Si $a=-2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}(A) = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \text{ y } \text{rango}(A') = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, cuando $a=-2$, el sistema es compatible indeterminado.

Resolveremos el sistema cuando $a=-2$. Teniendo en cuenta que el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ sabemos

que el sistema $\begin{cases} 2y = 2 - 4z \\ -2x - y = 1 \end{cases}$ es compatible determinado. Resolviendo por sustitución:

$$y = 1 - 2z \text{ y } x = -1 + z. \text{ Así pues, las soluciones son } \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

36.

a) Comprueba que la matriz M es invertible y calcula su inversa

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Encuentra las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones:

$$8A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$a) \quad |M|=5 \Rightarrow M \text{ invertible}; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & -0.2 \\ -1 & 0.6 & 0.2 \\ 1 & -0.4 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$b) \text{ Llamemos a las matrices } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = C \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = D$$

$$\begin{cases} 8A - 5B = C \\ 2A - B = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{5D - C}{2} \\ B = 4D - C \end{cases} \text{ entonces } A = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 0 \\ 10 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

37. Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule el determinante de A.

b) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4 y A^5 . Calcule A^{2016}

Solución:

a) Desarrollando por los adjuntos de la tercera fila, el determinante queda

$$|A| = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

b) Si calculamos A^2

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha & \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha & \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto $A^2 = I$.

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{2016} = (A^2)^{1013} = I^{1013} = I$$

38. (Aragón 2025) Queremos encriptar el mensaje “HOLA” con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:

Paso 1: Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra “HOLA”) en un número según la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Paso 2: Construimos una matriz columna, M_c , con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.

Paso 3: Multiplicamos la matriz de encriptado, $M_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, por la matriz M_c

obtenida en el paso anterior. El resultado del último paso, M_{final} , es el mensaje encriptado.

a) (0,5 puntos) Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje “HOLA” inicial.

b) (0,5 puntos) Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.

c) (1 punto) Si hemos obtenido el mensaje encriptado $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$ con el proceso descrito

arriba, ¿cuál es el mensaje original?

d) (0,5 puntos) Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que M_e , ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas?

Solución:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$$

b) Habría que resolver la ecuación matricial $M_e \cdot M_c = M_{final}$, una vez obtenida M_c obtendríamos el mensaje a partir de la tabla.

Para ello habría dos opciones, por un lado resolver el sistema 4x4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M_{final}$$

Y por otra calcular $M_e = M_e^{-1} \cdot M_{\text{final}}$ para ello primero hemos de comprobar que $\det(M_e) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Podemos resolver este sistema haciendo Gauss en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -21 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -25 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -16 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1 \\ F_4=F_4+F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=9 \\ z=5 \\ t=14 \end{cases}$$

Con lo que el mensaje original sería **BIEN**

d) Como se ha dicho, necesitaríamos $\det(M_e) \neq 0$, de este modo, $\text{rango}(M_e)=4 = \text{rango}((M_e \mid M_{\text{final}}))$, con lo cual, el teorema de Roché nos garantiza que el sistema es compatible determinado (hay un único mensaje original para cada mensaje encriptado).