1. Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcula cuando sea posible:

a) $C\cdot A+B$
b) $C\cdot(A+B)$
c) $A\cdot B$
d) $C\cdot A$
e) $B^t\cdot C$
f) $(A+B)\cdot C$
g) $A\cdot B^t$
h) $A^t\cdot B$

2. Calcula el rango de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 15 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \\ 5 & 10 & -15 & 25 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Calcula la inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ 2 & 1 & 2x & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 1 & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

5. Calcula el rango de las siguientes matrices estudiando sus menores:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -3 & -8 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. Calcula la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7.

a) Estudia como es el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-4z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$$

b) Resuelve el anterior sistema de ecuaciones.

8. Encuentra la solución del siguiente sistema aplicando el teorema de Rouché.

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x+2y-8z=0 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases}$$

9. Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x-5y+az=4 \end{cases} \quad a\in\Re$$

es compatible indeterminado.

a) Calcula a y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro.

b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que x=y

10. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ ax-y+2z=2 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de a

b) Resolver el sistema cuando tenga más de una solución

11. En el sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x-3y+z=-1 \\ 3x-2y+kz=5 \end{cases}$$

a) Discute para que valores de k el sistema es compatible

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible.

12. $$\begin{cases} y+z=1 \\ (m-1)\cdot x+3y+z=2 \\ x+(m-1)\cdot y-z=0 \end{cases}$$

a) Discute para qué valores de m el sistema es compatible.

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

13. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad ; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula α, β, γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema A·X=B

b) Si $\beta=\gamma=1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo A·X=O sea compatible determinado.

c) Si $\alpha=-1, \beta=1$ y $\gamma=0$, resuelve el sistema A·X=B

14. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa
b) Calcular la matriz inversa de A en el caso a=2

15. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4$, calcula, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada caso qué propiedad se está utilizando.

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$

16. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ encuentra todas las matrices B que cumplen ABA=A

17. Sea m un número real y A la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina todos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.
b) Determina, si existe, la inversa de A cuando m=0
c) Determina, si existe, la inversa de A^2 cuando m=0

18. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A\cdot X+B=A^2$

19. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2=2I$ y calcula A^{-1}
b) Calcula A^{2013} y su inversa.

20.

a) Determina el rango de la matriz A, que aparece a continuación, según los diferentes valores de a:

$$A=\begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

b) Determina, si existe, una matriz $A\in M_{2x2}$, que verifique la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el rango de la matriz A?

21. Dado el número real a, se considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla el rango de la matriz A^2-A^t según los distintos valores de A

22.

a) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Determina la matriz B que verifica A+B=A·B

b) Sea M una matriz cuadrada tal que det(M)=-1 y det [-2M]=8. Calcula el tamaño de la matriz M.

23. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Resolver el sistema: $\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases}$

b) Calcular el rango de M=A·B

24. Dado el sistema $\begin{cases}ax-3y+az=1\\ 3x+2y=1\\ x-y+z=-1\end{cases}$

a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro α

b) Resolverlo cuando sea compatible

25.

a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A|=5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes:

$|-A|$ $\quad |A^{-1}|$ $\quad |A^t|$ $\quad |A^3|$

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=2$ calcula, usando las propiedades de los determinantes:

$\begin{vmatrix}3-a-b & & 1-c\\ 1+a & 1+b & 1+c\\ 3a & 3b & 3c\end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2a & 2b & 2c\\ 0 & 30 & 0 & 10\\ 1 & 4 & 4 & 4\end{vmatrix}$

26. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -4 & 6 & 3\\ 6 & -7 & -4\end{pmatrix}$

a) Calcula todos los vectores $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ tales que $A\cdot\vec{v}=\vec{v}$

b) Calcula A^{-1}

27. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix}$

a) Sabiendo que se verifica $A\cdot B=2C-D$, plantea un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son x, y , z , donde α es un parámetro.

b) Estudia el carácter del sistema para los distintos valores del parámetro α y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones)

28. (Aragón 2015)

a) Considera la matriz y los vectores siguientes:

$M=\begin{pmatrix}x & y & z\\ y & z & x\\ z & y & x\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

donde x, y, z son números reales.

Determina x, y, z para que el vector $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ sea solución del sistema M·A=B

b) Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$N=\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a\neq 0$, $a+b=0$, $c=a$
Determina si el sistema N·X=B es compatible determinado.

29. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcula A^5

b) Calcula A^{-1}

30. Dado el sistema $\begin{cases} x-y+z=k\\ 3x-3y=0\\ x+ky+3z=1\end{cases}$

a) Clasifica el sistema en función del parámetro k.

b) Resuelve el sistema para aquellos valores de k en que sea compatible.

31. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifique: $B\cdot X-B^2=A\cdot B$

32. Sabiendo que $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=2$, calcula, usando las oportunas propiedades de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix}3-a & -b & 1-c\\ 1+a & 1+b & 1+c\\ 3a & 3b & 3c\end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2a & 2b & 2c\\ 0 & 30 & 0 & 10\\ 1 & 4 & 4 & 4\end{vmatrix}$

33. Sea M una matriz cuadrada que cumple $M^2-2M=3I$, donde I es la matriz identidad. Razona si M tiene inversa, y de ser así expresa M^{-1} en función de M

34.

a) Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

b) Dada la matriz $B=\begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ m & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $;m\in\Re$, indica para qué valores del parámetro m la matriz es regular (invertible)

35. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2y+a^2z=a+4 \\ ax-y+(a+2)z=1 \\ ax-2y+az=0 \end{cases}$$

36.

a) Comprueba que la matriz M es invertible y calcula su inversa

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Encuentra las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones:

$$8A-5B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 2A-B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

37. Considere la siguiente matriz $A=\begin{pmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule el determinante de A.

b) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4 y A^5. Calcule A^{2016}

38. (Aragón 2025) Queremos encriptar el mensaje “HOLA” con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:

Paso 1: Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra “HOLA”) en un número según la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Paso 2: Construimos una matriz columna, M_c, con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.

Paso 3: Multiplicamos la matriz de encriptado, $M_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, por la matriz Mc obtenida en el paso anterior. El resultado del último paso, M_{final}, es el mensaje encriptado.

a) (0,5 puntos) Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje “HOLA” inicial.

b) (0,5 puntos) Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.

c) (1 punto) Si hemos obtenido el mensaje encriptado $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$ con el proceso descrito arriba, ¿cuál es el mensaje original?

d) (0,5 puntos) Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que M_e, ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas?

39.