Álgebra

Matrices

Definiciones

Una matriz puede definirse como una tabla rectangular de números.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ Matriz de m filas y n columnas (m x n)

Los números que forman una matriz A, suelen representarse como a_{ij} donde el primer índice hace referencia la la fila que ocupa el número dentro de la matriz mientras que el segundo hace referencia a la columna.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

La matriz A está formada por seis números, que se organizan en 2 filas y 3 columnas. Siguiendo la notación habitual, tendríamos

$a_{11}=5$, $a_{12}=4$, $a_{13}=3$, $a_{21}=-2$, $a_{22}=1$ y $a_{23}=7$

- La dimensión de una matriz se expresa indicando el número de filas y columnas que posee.

En nuestro ejemplo la matriz A tendría dimensión 2x3

Al conjunto de matrices de m filas y n columnas se le representa por $M_{m\,x\,n}$

- Una matriz se dice que es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas.
- Una matriz cuadrada, A, se dice triangular superior si $i>j \Rightarrow a_{ij}=0$. Análogamente será triangular inferior si $i<j \Rightarrow a_{ij}=0$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Triangular superior　　　　Triangular inferior

- Decimos que B es la matriz traspuesta de A, B=A^t , si se cumple que $b_{ij}=a_{ji}$.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$ (las filas de A^t son las columnas de A)

- Una matriz A es simétrica si cumple A=A^t

Operaciones con matrices

Suma:

Para que dos matrices se puedan sumar, han de tener la misma dimensión. En ese caso

$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 2 & 8 \\ -2 & 12 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 11 \\ -4 & 13 & 10 \end{pmatrix}$$

<u>Multiplicación por escalar</u>:

El resultado de multiplicar una matriz A por un escalar $k \in \Re$ es otra matriz B de la misma dimensión, tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Ejemplo:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ -10 & 5 & 35 \end{pmatrix}$$

<u>Multiplicación de matrices</u>:

Para multiplicar dos matrices, se han de multiplicar las filas de una por las columnas de la otra, de manera similar al producto escalar de vectores.

$$C = A \cdot B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Para que las matrices A y B se puedan multiplicar, el número de columnas de A ha de ser el mismo que el de las filas de B, es decir $A \in M_{mxk}$ y $B \in M_{kxn}$, en cuyo caso $C = A \cdot B \in M_{mxn}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 8 \\ -2 \cdot 7 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) & -2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 7 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 43 \\ -19 & 51 \end{pmatrix}$$

Observación:

La multiplicación de matrices no es conmutativa, es más, puede ocurrir que aunque se pueda calcular A·B no sea posible hacer B·A

$$\nexists \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 19 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 29 & 31 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las operaciones:

<u>Suma</u>:

- Asociativa: (A+B)+C=A+(B+C) ($A, B, C \in M_{mxn}$)
- Conmutativa: A+B= B+A
- Elemento neutro: A+0=A (la matriz 0 es la que tiene todos sus elementos iguales a cero)
- Elemento opuesto A+(-A)=0 (la matriz opuesta, -A, se obtiene cambiando el signo de todos los elementos de la matriz A)

<u>Multiplicación por escalar</u>:

($a, b \in \Re$ $A, B \in M_{mxn}$)

- Asociativa: $(a \cdot b) \cdot A = a \cdot (b \cdot A)$
- Distributiva respecto a $\Re$: $(a+b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
- Distributiva respecto a M_{mxn} : $a \cdot (A+B) = a \cdot A + a \cdot B$

Multiplicación:

- Asociativa: (A·B)·C= A·(B·C) $A \in M_{mxn}$, $B \in M_{nxq}$, $C \in M_{qxp}$
- Distributiva: A·(C+D)=A·C+A·C $A \in M_{mxn}$, $C \in M_{nxq}$, $D \in M_{nxq}$
  (A+B)·C=A·C+B·C $A \in M_{mxn}$, $B \in M_{mxn}$, $C \in M_{nxq}$

Espacios vectoriales y dependencia lineal

Un espacio vectoria real, es un conjunto V con dos operaciones:

- Suma: $VxV \to V$
  $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}; \quad \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$
- Multiplicación por escalar: $\Re x V \to V$
  $\alpha \cdot \vec{u}=\vec{v}; \quad \vec{u},\vec{w} \in V$

Para que V con estas dos operaciones (V,+,·) sea considerado un espacio vectorial, deben cumplirse las siguientes propiedades

Suma:

- Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}); \quad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$
- Conmutativa $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}; \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in V$
- Elemento nulo $\exists \vec{0} \in V / \vec{0}+\vec{u}=\vec{u}; \quad \forall \vec{u} \in V$
- Elemento opuesto $\forall \vec{u} \in V, \exists(-\vec{v}) \in V / \vec{v}+(-\vec{v})=0$

Multiplicación por escalar:

- Asociativa: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}); \quad \forall \alpha,\beta \in \Re \; \forall \vec{u} \in V$
- Distributiva: $\alpha \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}; \quad \forall \alpha \in \Re; \forall \vec{u},\vec{v} \in V$
  $(\alpha+\beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}; \quad \forall \alpha,\beta \in \Re; \forall \vec{u},\vec{v} \in V$
- Elemento neutro: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}; \quad \forall \vec{v} \in V$

Como ejemplos de espacios vectoriales, podemos citar los polinomios, las funciones continuas, los vectores del plano, ... , así como las matrices, sus filas y sus columnas.

Combinación lineal de vectores:

Una combinación lineal de vectores es una expresión de la forma

$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_{n\cdot} \vec{v}_n \; ; \quad donde \quad \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V \; ; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Re$

Vectores linealmente independientes:

Un conjunto de vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ se dice que son linealmente independientes si ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal del resto.

Esta definición es equivalente a decir que no existe ninguna combinación lineal de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ que sea igual a $\vec{0}$

$$\boxed{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V \; son \, linealmente \, independientes \Leftrightarrow \forall \alpha_{1,} \ldots, \alpha_n \in \Re - \{0\}, \quad \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_{n\cdot} \vec{v}_n \neq \vec{0}}$$

Rango de una matriz

Las filas de una matriz $A \in M_{mxn}$, pueden considerarse vectores. Lo mismo ocurre con las columnas.

Se define el rango de una matriz como el número máximo de filas que son linealmente independientes.

<u>Observación</u>:

El número máximo de filas linealmente independientes coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes. Por tanto el rango de una matriz también podría definirse como el número máximo de columnas línealmente independientes.

Método de Gauss para calcular el rango de una matriz

El método de Gauss consiste en "triangularizar" la matriz haciendo ceros por debajo (o por encima de la diagonal). Con la matriz "triangularizada", es fácil ver cual es el rango.

Para obtener los ceros deseados, se resta a cada fila (o columna) una combinación lineal de las otras. Si es necesario, en el proceso también se pueden intercambiar 2 filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 8 & -1 & 11 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_4=F_4-3F_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3+F_2 \\ F_4=F_4-3F_2}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_4=F4+F_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez triangularizada la matriz, su rango será el número de filas distintas de 0, en el ejemplo se ve una matriz de rango 3.

Matrices cuadradas

Recordemos que las matrices cuadradas son aquellas que tienen el mismo número de filas que de columnas.

Las matrices cuadradas poseen <u>elemento neutro</u> respecto a la multiplicación:

$$\boxed{A \cdot I = I \cdot A = A}$$

Donde la matriz I se conoce como matriz identidad y es tal que sus elementos valen 0 salvo los de la diagonal que valen 1.

$$\boxed{\begin{array}{l} i_{ij}=0 \quad si \quad i \neq j \\ i_{ii}=1 \end{array}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz identidad de dimensión 3

Las matrices cuadradas pueden tener inversa respecto a la multiplicación, es decir la inversa de A será otra matriz, A^{-1}, tal que:

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$$

Método de Gauss para el cálculo de la inversa

El método de Gauss consiste en colocar la matriz y a continuación escribimos la matriz identidad.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora diagonalizamos la matriz operando con las filas. En la parte de la derecha haremos con la matriz identidad las mismas operaciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3+F_1}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+2/5F_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1=F_1+5/4F_3 \\ F_2=F_2-5/2F_3}}{\Rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & -5 & 0 & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{F_1=F_1+2/5F_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -5 & 0 & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right)$$

Ahora dividiremos cada fila entre el número que aparece en la diagonal de la parte izquierda.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -5 & 0 & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2/(-5) \\ F_3=F_3/(4/5)}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{array}\right)$$

Después de todo el proceso obtendrémos la identidad en la parte izquierda y A^{-1} en la derecha.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Es importante saber que no todas las matrices cuadradas poseen inversa. Discernir cuando una matriz tiene inversa antes de calcularla es algo que veremos más adelante.

Determinantes

A cada matriz cuadrada es posible asociarle un número llamado determinante ($|A|$ determinante de la matriz A)

Como la definición general de determinante es compleja, vamos a ver directamente la manera de calcularlo para dimensiones bajas.

Determinantes de matrices cuadradas de dimensión 2:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$$

Determinantes de matrices cuadradas de dimensión 3:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}$$

Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz y el de su traspuesta son iguales
   $|A|=|A^t|$
2. Si se intercambian dos filas (o columnas) de una matriz, su determinante cambia de signo.
3. $|A|=0$ si:
   a) Todos los elementos de una fila (o columna) valen cero.
   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}=0$$
   b) A tiene dos filas (o columnas) iguales.
   c) Una fila (o columna) es combinación lineal de otras
4. Si $|A|=0$ entonces alguna fila (y también alguna columna) es combinación lineal de otras.
5. Si se multiplica toda una fila (o columna) por un mismo escalar, el determinante queda multiplicado por dicho escalar.
   $$\begin{vmatrix} a_{11} & k\cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & k\cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k\cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
6. Si descomponemos una fila (o columna) en dos sumandos, entonces el determinante también se puede descomponer como suma:
   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
7. Si sumamos a una fila (o columna) una combinación lineal de otras, el determinante no varía.
8. El determinante del producto de matrices es igual al producto de los determinantes
   $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|; \quad A,B\in M_{nxn}$
9. El determinante de una matriz triangular se obtiene multiplicando los elementos de su diagonal.

Menor, menor complementario y adjunto

Si en una matriz seleccionamos k filas y k columnas, entonces el determinante formado por los elementos comunes de esas k filas y k columnas será un menor de orden k de la matriz.

Ejemplo:

Si $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & -1 \\ 7 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=41$ es el menor de orden 2 de A, formado con las filas 2 y 3 y las columnas 1 y 3

Dada una matriz A, el menor complementario de un elemento $a_{i\,j}\in A$, es el menor que se forma suprimiendo la fila i y la columna j. Lo denotaremos como $\alpha_{i\,j}$

Ejemplo:

Si $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & -1 \\ 7 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $\alpha_{23}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-48$

En matriz A, el adjunto de un elemento $a_{i\,j}\in A$, será su menor complementario $\alpha_{i\,j}$ multiplicado por $(-1)^{(i+j)}$. Al adjunto de $a_{i\,j}$ se le representa como $A_{i\,j}$

$$A_{i\,j}=(-1)^{(i+j)}\cdot\alpha_{i\,j}$$

Ejemplo:

Si $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & -1 \\ 7 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces

$$A_{34}=(-1)^{(3+4)}\cdot\alpha_{3\,4}=(-1)^{(3+4)}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 7 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 152=-152$$

Relación entre determinantes y adjuntos

En una matriz $A\in M_{nxn}$ si se multiplican los elementos de una fila (o columna) por sus respectivos adjuntos y se suman todos los resultados, se obtiene el determinante de A

$$\boxed{|A|=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+...+a_{in}\cdot A_{in}}$$

Por otra parte, si multiplicamos los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de otra el resultado sería cero (sería lo mismo que calcular el determinante de una matriz con 2 filas iguales)

Cálculo de determinantes de orden superior

Básicamente hay dos métodos:

- Desarrollar el determinante mediante los adjuntos de los elementos de una fila (o columna):

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & -1 \\ 7 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-133) - 2 \cdot (-129) + 4 \cdot (-232) + 1 \cdot (-149) = -1484$$

El problema de este método es que hay que realizar muchas operaciones, por tanto es aconsejable buscar una manera de simplificar los cálculos. Para ello intentaremos conseguir que una fila o columna tenga el mayor número de ceros posible, esto lo haremos utilizando la propiedad que nos dice que si a una fila (o columna) le sumamos una combinación lineal de otras el determinante no varía.

De este modo conseguimos resolver el problema mediante el cálculo de determinantes de menor orden.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & -1 \\ 7 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1+5C_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 27 & -1 & -2 & 4 \\ 38 & 4 & 5 & 7 \\ 10 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2=C_2+2C_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & -1 \\ 27 & 7 & -2 & 4 \\ 38 & 18 & 5 & 7 \\ 10 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3=C_3+4C_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 27 & 7 & 14 & 4 \\ 38 & 18 & 33 & 7 \\ 10 & 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot A_{14} = (-1) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 27 & 7 & 14 \\ 38 & 18 & 33 \\ 10 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -1484$$

- Triangularizar la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3+F_1 \\ F_4=F_4-5F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & -12 & 9 & -14 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3+6/5F_2 \\ F_4=F_4-12/5F_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} & \frac{-11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} \underset{F_4=F_4-1/2F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} & \frac{-11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-5) \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{3}{2} = -27$$

Relación entre rango y menores

Si observamos las propiedades de los determinantes (concretamente 3c y 4) tenemos que para una matriz cuadrada A

Las filas (o columnas) de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

Teniendo esto en cuenta, el cálculo del rango de una matriz es equivalente a buscar el menor distinto de cero más grande posible.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{como} \quad |A| = 0 \quad \text{entonces rango A} < 3$$

Si observamos el menor formado por las dos primeras filas y columnas vemos que:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y por tanto podemos concluir que el rango de A es 2.

Observación:

El problema del método de los menores es que en una matriz grande se pueden formar un número elevado de menores y lleva demasiado tiempo calcularlos todos para ver cual es el rango. Por este motivo se debe sistematizar el procedimiento de búsqueda.

El método recomendado consiste en buscar un menor de orden 1 que sea distinto de cero. A partir de ahí vamos aumentando el orden del menor añadiendo una fila y una columna, si el menor obtenido vale cero, entonces deberemos probar con otra columna. Cuando hayamos probado con todas las columnas posibles concluiremos que la fila añadida es combinación lineal de las anteriores y por tanto se descartará definitivamente.

El proceso concluye cuando agotemos todas las filas posibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|1| = 1$ entonces rango(A) ≥ 1

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ entonces rango (A) ≥ 2

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$ entonces rango (A) < 3

Por lo tanto rango (A) = 2

Determinantes y matriz inversa

Una matriz cuadrada A tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero

$$\boxed{\exists A^{-1} \Leftrightarrow det\, A \neq 0}$$

Si el determinante de A es distinto de cero, entonces su matriz inversa será:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} (adj\, A)^t}$$

Es decir, la traspuesta de la matriz adjunta de A, dividida entre el determinante de A.

La matriz adjunta de A es la matriz que se forma sustituyendo cada elemento por su adjunto.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\, A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ -5 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow (adj\, A)^t = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 1 = -12$$

Entonces

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(adj\ A)^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-7}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Supongamos un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+...+a_{1n}\cdot x_n=b_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+...+a_{2n}\cdot x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+...+a_{mn}\cdot x_n=b_m \end{cases}$$

Este sistema se puede expresar en forma matricial como:

$$A\cdot X=B$$

Donde:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\in M_{m\,x\,n} \quad , \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\in M_{n\,x1} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}\in M_{m\,x\,1}$$

<u>Ejemplo</u>:

$$\begin{cases} x+3y-z=4 \\ -x+y-2z=-1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

En este caso:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tipos de sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones se dice que es compatible si tiene solución, por otra parte, decimos que es incompatible si carece de ella.

Un sistema compatible puede ser determinado, si la solución es única o indeterminado, si el conjunto de soluciones viene dado en función de uno o varios parámetros.

Teorema de Rouché

Supongamos un sistema de m ecuaciones con n incógnitas expresado en forma matricial:

$$A\cdot X=B$$

Donde:

$$A\in M_{m\,x\,n} \quad , \quad X\in M_{n\,x1} \quad \text{y} \quad B\in M_{m\,x1}$$

Entonces definimos la matriz ampliada A' como:

$$A'=\left(A\,|\,B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)\in M_{m\ x\ (n+1)}$$

En estas condiciones, se cumple:

$$rango(A)\neq rango(A')\Leftrightarrow sistema\, incompatible$$

$$rango(A)=rango(A')=n\Leftrightarrow sistema\, compatible\ determinado$$

$$rango(A)=rango(A')=k<n\Leftrightarrow sistema\, compatible\, indeterminado$$

Método de Gauss

El método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales consiste básicamente en triangularizar la matriz A'. Para ello podemos restar (o sumar) a cada fila una combinación lineal de las otras. También está permitido intercambiar 2 filas.

Al triangularizar la matriz nos podemos encontrar 3 casos:

<u>Sistema compatible determinado</u>

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} ? & ? & \dots & \dots & ? & ? & ? \\ 0 & ? & \dots & \dots & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \dots & \dots & ? & ? & ? \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(? indica números distintos de cero)

En este caso tenemos m-n ecuaciones superfluas (se pueden poner como combinación lineal de las otras) representadas en las filas del tipo $\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$

Se calcula el valor x_n en la fila n $\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & ? & ? \end{array}\right)$ y se sustituye en las ecuaciones anteriores.

<u>Sistema incompatible</u>

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} ? & ? & \dots & \dots & ? & ? & ? \\ 0 & ? & \dots & \dots & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \dots & \dots & ? & ? & ? \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso la fila n tiene la forma $\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & ? \end{array}\right)$

<u>Sistema compatible indeterminado</u>

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} ? & ? & ? & ... & ... & ... & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ... & ... & ... & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ... & ... & ... & ? & ? & ? \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & ? & ... & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso sólo hay k filas distintas de 0 (k < n). Aquí lo que se hace es convertir el sistema en otro de k ecuaciones con k incógnitas:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1k} & ... & a_{1(n-1)} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2k} & ... & a_{2(n-1)} & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3k} & ... & a_{3(n-1)} & a_{3n} & b_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{kk} & ... & a_{k(n-1)} & a_{kn} & b_k \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

se transforma en un sistema de k ecuaciones con k incógnitas y (n-k) parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1k} & b_1 - a_{1(k+1)} \cdot x_{k+1} - ... - a_{1n} \cdot x_n \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2k} & b_2 - a_{2(k+1)} \cdot x_{k+1} - ... - a_{2n} \cdot x_n \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3k} & b_3 - a_{3(k+1)} \cdot x_{k+1} - ... - a_{3n} \cdot x_n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{kk} & b_k - a_{k(k+1)} \cdot x_{k+1} - ... - a_{kn} \cdot x_n \end{array}\right)$$

Regla de Cramer

Si tenemos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \quad .... \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + ... + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

escrito matricialmente como:

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\,x\,n} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\,x1} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n\,x1}$$

Entonces, si el determinate de A es distinto de cero, el sistema tiene una única solución, y el valor de cada incógnita x_i , se podrá calcular de la siguiente forma:

$$x_i=\frac{|A_{x_i}|}{|A|}$$

en donde A_{x_i} es la matriz que resulta de sustituir en la matriz A la columna i por el vector B

$$A_{x_i}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+y+z=7 \\ -x+y=1 \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-6\neq 0 \quad \text{entonces:}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-6}{-6}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-12}{-6}=2 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-18}{-6}=3$$

Observación

La regla de cramer también se puede usar para otro tipo de sistemas compatibles. Lo único que hay que hacer es buscar un menor con el mismo rango que la matriz de coeficientes, a partir de ahí se desechan el resto de filas (ecuaciones redundantes) y el resto de columnas pasan a la matriz ampliada multiplicando a las correspondientes incógnitas:

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ x+y-2z=1 \\ x+4y-7z=1 \end{cases} \Rightarrow A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

Como:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}=0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0 \quad \text{entonces rango(A)=2}$$

Mientras que $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0$ implica rango(A')=2 y por tanto el sistema es compatible indeterminado.

Este sistema puede reducirse a:

$$\begin{cases} 2x-y=2-z \\ x+y=1+2z \end{cases} \Rightarrow A'=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2-z \\ 1 & 1 & 1+2z \end{array}\right)$$

y la regla de Cramer dice que:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2-z & -1\\ 1+2z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2-z+1+2z}{3}=\frac{z+3}{3} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2-z\\ 1 & 1+2z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2+4z-2+z}{3}=\frac{5z}{3}$$

En forma paramétrica:

$$\begin{cases} x=1+\frac{t}{3} \\ y=\frac{5}{3}t \\ z=t \end{cases} \; ; t\in\Re$$

Sistemas homogéneos

Un sistema de m ecuaciones con m incógnitas, se dice que es homogéneo si en todas las ecuaciones el término independiente vale cero.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=0 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=0 \end{cases}$$

En este tipo de sistemas, el rango de la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\in M_{m\,x\,n}$

será igual al rango de la matriz ampliada $A\,'=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$, por lo tanto el sistema tendrá al menos una solución ($x_1=0$, $x_2=0$, ... , $x_n=0$) llamada solución trivial.

Para que un sistema homogéneo tenga una solución distinta de la trivial debe darse la condición:

Rango (A) = Rango (A´) = k < n