**1.** $\int 3x^2+2x-4\,dx$

Solución:

$$\int 3x^2+2x-4\,dx=\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-4x+k=x^3+x^2-4x+k\quad ;k\in\Re$$

**2.** $\int \frac{3}{2x+3}\,dx$

Solución:

$$\int \frac{3}{2x+3}\,dx=3\int \frac{1}{2x+3}\,dx=3\int \frac{dt}{2t}=\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{3}{2}\ln|t|+k=\frac{3}{2}\ln|2x+3|+k\quad ;\ k\in\Re$$

$$\begin{cases} t=2x+3 \\ dt=2\,dx \Rightarrow dx=\dfrac{dt}{2} \end{cases}$$

**3.** $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

Solución

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\int \frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+k=\ln|x^2+1|+k\ ;\ k\in\Re$$

$$\begin{cases} t=x^2+1 \\ dt=2x\,dx \end{cases}$$

4. $\int x\cos(2x^2+2)\,dx$

Solución:

$$\int x\cos(2x^2+2)\,dx=\frac{1}{4}\int \cos(2x^2+2)\,4x\cdot dx=\frac{1}{4}\int \cos t\,dt=\frac{1}{4}sen\,t+k=\frac{1}{4}sen(2x^2+2)+k\quad ;k\in\Re$$

$$\begin{cases} t=2x^2+2 \\ dt=4x\,dx \end{cases}$$

5. $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}\,dx$

Solución:

$$\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}\,dx=\int \frac{5x}{x^2}\,dx+\int \frac{\sqrt{3x}}{x^2}\,dx=\int \frac{5}{x}\,dx+\int \sqrt{3}\,x^{\frac{-3}{2}}\,dx=5\ln|x|+\frac{\sqrt{3}}{-1/2}\,x^{\frac{-1}{2}}+k=$$

$$=5\ln|x|-2\sqrt{\frac{3}{x}}+k\ ;\quad k\in\Re$$

6. $\int \frac{2\,sen\,x\,\cos x}{1+sen^2 x}\,dx$

Solución:

$$\int \frac{2\,sen\,x\cos x}{1+sen^2 x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln\left(1+sen^2 x\right)+K$$
$$1+sen^2 x = t \Rightarrow 2\,sen\,x\cos x\,dx = dt$$

7. $\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\,dx$

Solución:

$$\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1-t^2}{1-t}\cdot 2t\;dt = \int \frac{(1-t)(1+t)\,2t}{1-t}\,dt = \int 2t+2t^2\;dt = t^2+\frac{2}{3}\,t^3+k =$$
$$\begin{cases} t=\sqrt{x} \\ dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,dt = 2\,t\,dt \end{cases}$$
$$= x+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+k\;;\;k\in\Re$$

8. $\int sen^2\,x\;dx$

Solución:

$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x = 1-2\,sen^2 x \Rightarrow sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\int sen^2\,x\;dx = \int \frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\;dx = \frac{x}{2}-\frac{sen\;2x}{4}+k\;\;;\;k\in\Re$$

9. $\int \cos^3\,x\;dx$

Solución:

$$\int \cos^3\,x\;dx = \int \cos x\cdot\cos^2\,x\;dx = \int \cos x\cdot\left(1-sen^2\,x\right)\,dx = \int 1-t^2\;dt =$$
$$\begin{cases} t = sen\,x \\ dt = \cos x\,dx \end{cases}$$
$$= t-\frac{t^3}{3}+k = sen\,x-\frac{sen^3 x}{3}+k\;;\;k\in\Re$$

10. $\int 1+\ln\,x\;dx$

Solución:

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(1+L\,x)dx \Rightarrow \left\{\int u\cdot dv = u\cdot v-\int v\cdot du\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u=1+L\,x \rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=dx \rightarrow v=x \end{Bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(x)=(1+Lx)\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=(1+Lx)\cdot x-\int dx=(1+Lx)\cdot x-x+C=x+x\,L\,x-x+C=\underline{x\,L\,x+C}$$

11. $\int 2x\,[\ln(x)]^2\;dx$

Solución:

$$I=2\int x\,[\ln(x)]^2dx=2\cdot\left(\frac{x^2}{2}\cdot[\ln(x)]^2\right)-2\int\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot 2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx=2\cdot\left(\frac{x^2}{2}\cdot[\ln(x)]^2\right)-2\int x\ \ln(x)\,dx$$

$$\begin{cases}[\ln(x)]^2=u\Rightarrow 2\cdot\ln(x)\cdot\dfrac{1}{x}dx=du\\ x\,dx=dv\Rightarrow v=\displaystyle\int x\,dx=\frac{1}{2}\cdot x^2\end{cases}$$

$$I=x^2[\ln(x)]^2-2\int x\ \ln(x)\,dx=x^2[\ln(x)]^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2\ln(x)+2\int\frac{1}{2}x^2\ \frac{dx}{x}=x^2[\ln(x)]^2-x^2\ln(x)+\int x\,dx$$

$$\begin{cases}\ln(x)=u\Rightarrow\dfrac{1}{x}dx=du\\ x\,dx=dv\Rightarrow v=\displaystyle\int x\,dx=\frac{1}{2}\cdot x^2\end{cases}$$

$$I=x^2\{[\ln(x)]^2-\ln(x)\}+\frac{1}{2}\cdot x^2=x^2\left\{[\ln(x)]^2-\ln(x)+\frac{1}{2}\right\}+K$$

12. $\int \arctan x\ dx$

Solución

$$\int\arctan x\ dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx=$$

$$\begin{cases}u=\arctan x\\ dv=1\ dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{1+x^2}\,dx\\ v=x\end{cases}$$ (integrando por partes)

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+k\ ;\ \ k\in\Re$$

13. $\int x\cos x\ dx$

Solución:

$$\int x\cos x\ dx=x\ sen\ x-\int sen\ x\ dx=x\ sen\ x-(-\cos x)=x\ sen\ x+\cos x$$

$$\begin{cases}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=cosx\ dx\Rightarrow v=sen\ x\end{cases}$$

14. $\int\frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx$

Solución:

$$x^3-4x=0\Rightarrow(x^2-4)x=0\Rightarrow x(x-2)(x+2)=0$$

$$\frac{x^2+x-4}{x^3-4x}=\frac{x^2+x-4}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}\Rightarrow$$

$$A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)=x^2+x-4\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=2\Rightarrow A(2-2)(2+2)+B\cdot 2\cdot(2+2)+C\cdot 2(2-2)=2^2+2-4\Rightarrow 8B=2\Rightarrow B=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}\\ x=0\Rightarrow A(0-2)(0+2)+B\cdot 0\cdot(0+2)+C\cdot 0(0-2)=0^2+0-4\Rightarrow -4A=-4\Rightarrow A=1\\ x=-2\Rightarrow A(-2-2)(-2+2)+B\cdot(-2)\cdot(-2+2)+C\cdot(-2)(-2-2)=(-2)^2+(-2)-4\Rightarrow 8C=-2\Rightarrow C=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\frac{x^2+x-4}{x^3-4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+2}\Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4}\,dx=\int \frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx-\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx=$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+K\ ;\ \ K\in\Re$$

15. $\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx$

$x^2+x-2=\underline{(x+2)(x-1)}.$

$$\frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{3x}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{Ax-A+Bx+2B}{x^2+x-2}=\frac{(A+B)x+(-A+2B)}{x^2+x-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=3 \\ -A+2B=0 \end{array}\right\} \rightarrow 3B=3\ ;;\ \underline{B=1}\ ;;\ A=3-1=\underline{2=A}.$$

$$I=\int\frac{3x}{x^2+x-2}\cdot dx=\int\left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-1}\right)\cdot dx=2\int\frac{1}{x+2}\cdot dx+\int\frac{1}{x-1}\cdot dx=$$

$$=\underline{\underline{2L|x+2|+L|x-1|+C}}.$$

16. $\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx$

Solución:

| | |
|---|---|
| $x^3$ | $\lvert x^2-5x+6$ |
| $\underline{-x^3+5x^2-6x}$ | $x+5$ |
| $5x^2-6x$ | |
| $\underline{-5x^2+25x-30}$ | |
| $19x-30$ | |

$$x^3=(x^2-5x+6)\cdot(x+5)+19x-30\Rightarrow\frac{x^3}{x^2-5x+6}=(x+5)+\frac{19x-30}{x^2-5x+6}=$$

$$=(x+5)+\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2)+B(x-3)=19x-30\Rightarrow\begin{cases}A=27\\B=-8\end{cases}$$

$$\int\frac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx=\int x+5\,dx+27\int\frac{1}{x-3}\,dx-8\int\frac{1}{x+2}\,dx=\frac{x^2}{2}+5x+27\ln|x-3|-8\ln|x+2|$$

17. $\boldsymbol{\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx}$

Solución:

$$\int\frac{x-3}{x^2+9}\,dx=\int\frac{x}{x^2+9}\,dx-\int\frac{3}{x^2+9}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+9}\,dx-\frac{3}{9}\int\frac{1}{(x/3)^2+1}\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+9}\,dx-\int\frac{1/3}{(x/3)^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du-\int\frac{1}{v^2+1}\,dv=$$

$$\begin{cases} u = x^2 + 9 \\ du = 2x\, dx \end{cases} \quad \begin{cases} v = x/3 \\ dv = 1/3\, dx \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u| - arctg\, v + k = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 9| - arctg(x/3) + k\ ; \quad k \in \Re$$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 - 1}\, dx$

<u>Solución</u>

$$\int \frac{1}{x^4 - 1}\, dx = \int \frac{A}{x-1}\, dx + \int \frac{B}{x+1}\, dx + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 1}\, dx$$

$$A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx + D)(x-1)(x+1) = 1$$

De donde:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 0 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4 \\ B = -1/4 \\ C = 0 \\ D = -1/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^4 - 1}\, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1}\, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1}\, dx =$$

$$\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctan x + k\ ;\ k \in \Re$$

19. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{1 + 3 \ln x + (\ln x)^3}}{\mathbf{x \cdot [1 - (\ln x)^2]}}\, \boldsymbol{dx}$

<u>Solución</u>:

$$\int \frac{1 + 3 \ln x + (\ln x)^3}{x \cdot [1 - (\ln x)^2]}\, dx = \int \frac{1 + 3t + t^3}{1 - t^2}\, dt = \int -t\, dt - \frac{5}{2} \int \frac{1}{t-1}\, dt - \frac{3}{2} \int \frac{1}{t+1}\, dt =$$

$$\begin{cases} t = \ln x \\ dt = \dfrac{1}{x}\, dx \end{cases}$$

$$= \frac{-t^2 - 5 \ln|t-1| - 3 \ln|t+1|}{2} + k = \frac{-(\ln x)^2 - 5 \ln|\ln(x) - 1| - 3 \ln|\ln(x) + 1|}{2} + k\ ;\ k \in \Re$$

20. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 2}\, dx$

<u>Solución</u>:

Como el denominador tiene raíces complejas habrá que descomponer la fracción buscando las derivadas de las funciones $\ln x$ y $\arctan x$

$$\int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \frac{1}{2} \left( \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}\, dx + \int \frac{-4}{x^2 + 2x + 2}\, dx \right)$$

Por un lado

$$\int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \ln|x^2 + 2x + 2| + k$$

y por otro

$$\int \frac{-4}{x^2 + 2x + 2}\, dx = -4 \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1}\, dx = -4 \arctan(x+1) + k$$

entonces

$$\int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 2| - 2 \arctan(x+1) + k\ ; \quad k \in \Re$$

21. $\int \frac{10}{x^2 - x - 6}\, dx$

Solución:

$$\int \frac{10}{x^2-x-6}\, dx = \int \frac{2}{x-3}\, dx - \int \frac{2}{x+2}\, dx = 2\ \ln|x-3| - 2\ \ln|x+2| + k = 2\ \ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + k\ ;\ k \in \Re$$

22. $\int_0^{\pi} \frac{6\text{sen}\ x}{5-3\cos\ x}\, dx$

Solución:

$$\int \frac{6\ sen\ x}{5-3\cos\ x}\, dx = \int \frac{-6\ dt}{5-3\ t} = \int \frac{-2\ dt}{5/3-t} = \int \frac{2}{t-5/3}\, dt = 2\ \ln|t-5/3| + k =$$

$$\begin{cases} t = \cos x \\ dt = -sen\ x\ dx \end{cases}$$

$$= 2\ln|\cos x - 5/3| + k\ ;\quad k \in \Re$$

$$\int_0^{\pi} \frac{6\text{sen}\ x}{5-3\cos\ x}\, dx = \left[2\ln\left|\cos\ x - 5/3\right|\right]_0^{\pi} = \left[2\ln|\cos\pi - 5/3|\right] - \left[2\ln|\cos 0 - 5/3|\right] =$$

$$= 2\ln\left(\frac{|-1-5/3|}{|1-5/3|}\right) = 2\ \ln\left(\frac{8}{2}\right) = 2\ \ln 4 = \ln\ 16$$

23. $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\, dx$

Solución:

$$\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\, dx = \int_1^2 3\ x^{-3}\, dx - \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx + \int_1^2 x\ dx = \left[\frac{-3}{2}\ x^{-2}\right]_1^2 - [\ln|x|]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{-3}{8} + \frac{3}{2} - \ln 2 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{21}{8} - \ln 2$$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\ x\ dx$

Solución:

$$\cos 2\text{x} = \cos^2 x - sen^2\ x = 2\ \cos^2\ x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 + \cos 2\text{x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\ x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos\ 2\text{x}\ dx = \left[\ x + \frac{sen\ 2\text{x}}{2}\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

25. Calcula la siguiente integral en función de a y b:

$$\int \frac{ax+b}{x^2-3\text{x}+2}\, dx$$

Solución

$$\frac{ax+b}{x^2-3\text{x}+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow ax+b = A(x-2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} a = A+B \\ b = -2\text{A} - B \end{cases}$$

sumando:

$$a+b = -A \Rightarrow A = -(a+b)$$

sustituyendo:

$$B = 2\text{a} + b$$

entonces

$$\int \frac{ax+b}{x^2-3\ x+2}\, dx = -\int \frac{a+b}{x-1}\, dx + \int \frac{2\ a+b}{x-2}\, dx = (a+b)\ \ln|x-1| + (2\ a+b)\ \ln|x-2| + k\ ;\ k \in \Re$$

26. $\int x^2\ sen\ 2x\ dx$

Solución:

$$\int x^2\ sen\ 2x\ dx = -x^2 \cdot \frac{\cos\ 2x}{2} + \int x\ \cos\ 2x\ dx = \frac{-x^2 \cdot \cos\ 2x}{2} + \frac{x\ sen\ 2x}{2} - \int \frac{sen\ 2x}{2}\ dx =$$

$$= \frac{-x^2 \cdot \cos 2x}{2} + \frac{x\ sen\ 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + k\ ;\ \ k \in \Re$$

27. Calcula la siguiente suma de integrales definidas

$$\int_1^2 \frac{-2}{x^3}\ dx + \int_\pi^{2\pi} \left(-sen\ x \cdot e^{(-sen\ x)} + \cos^2 x \cdot e^{(-sen\ x)}\right)\ dx$$

cuyas integrales indefinidas asociadas son inmediatas

Solución:

$$\int_1^2 \frac{-2}{x^3}\ dx + \int_\pi^{2\pi} \left(-sen\ x \cdot e^{(-sen\ x)} + \cos^2 x \cdot e^{(-sen\ x)}\right)\ dx =$$

$$= \left[\frac{1}{x^2}\right]_1^2 + \left[\cos x \cdot e^{sen\ x}\right]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{4} - 1 + 1 - (-1) = \frac{5}{4}$$

28. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3\ e^x + 2}\ dx$

Solución:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3\ e^x + 2}\ dx = \int_1^e \frac{1}{t^2 + 3t + 2}\ dt = \int_1^e \frac{1}{t+1}\ dt - \int_1^e \frac{1}{t+2}\ dt =$$

$$= \left[\ln|t+1|\right]_1^e - \left[\ln|t+2|\right]_1^e = \ln(e+1) - \ln 2 - \ln(e+2) + \ln 3 = \ln\left(\frac{3e+3}{2e+4}\right)$$

29. $\int_1^e x^2\ \ln\ x\ dx =$

Solución:

Calculamos una primitiva integrando por partes

$$\int x^2\ \ln\ x\ dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln\ x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\ dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln\ x - \int \frac{x^2}{3} \cdot dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln\ x - \frac{x^3}{9} + k\ ;\ k \in \Re$$

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\ dx \\ dv = x^2\ dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int_1^e x^2\ \ln\ x\ dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2\ e^3 + 1}{9}$$

30. $\int \frac{3x+7}{(x^2 - 3x + 2)(x-3)}\ dx$

Solución:

$$\int \frac{3x+7}{(x^2 - 3x + 2)(x-3)}\ dx = \int \frac{5}{x-1}\ dx - \int \frac{13}{x-2}\ dx + \int \frac{8}{x-3}\ dx =$$

$$= 5\ln|x-1| - 13\ln|x-2| + 8\ln|x-3| + k\ ;\ \ k \in \Re$$

31. Sea $f : \Re \rightarrow \Re$ y $g : \Re \rightarrow \Re$ las funciones definidas respectivamente por:

$$f(x) = \frac{|x|}{2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

a) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g

Solución:

Recordamos que la gráfica del valor absoluto $|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ es la de **dos semirrectas que coinciden en (0,0)** porque |x| es continua en R por compuesta de continuas, **es simétrica respecto al eje OY** porque |-x| = |x|, por tanto la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ es muy parecida a la de |x| pero **pasa por los puntos (-1,1/2) y (1,1/2)**.

La gráfica de $g(x) = 1/(1 + x^2)$, al ser una función racional podemos obtenerla calculando sus asíntotas y su corte con los ejes.

No tiene asíntotas verticales, porque ningún valor de "x" anula el denominador.

Vemos que **$g(0) = 1/(1 + 0^2) = 1$**, y que **$g(x) > 0$**. Como al aumentar el denominador disminuye el cociente, **el valor (0,1) el máximo relativo y absoluto** pues se alcanza para x = 0.

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1/(1 + x^2) = 1/(1 + (\pm\infty)^2) = 1/+\infty = 0^+$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal de g en ±∞**, y además g está por encima de la asíntota horizontal y = 0 en ±∞.

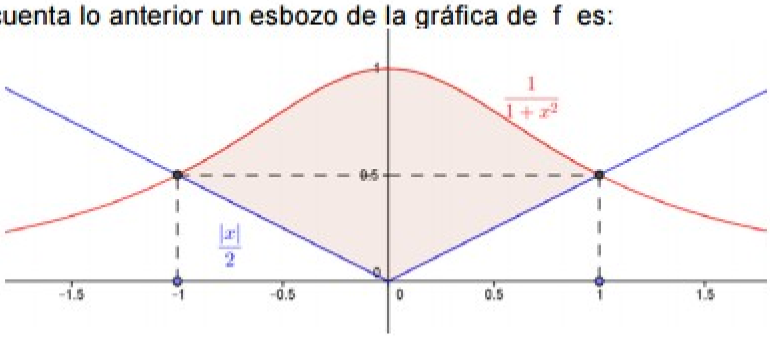
Como g(-x) = g(x), **la gráfica de g es simétrica respecto al eje OY**.

Veamos los puntos de corte de f y g. Lo estudiamos sólo para x > 0, por simetría.

De f(x) = g(x), tenemos (x > 0) $x/2 = 1/(1 + x^2) \rightarrow x(1+ x^2) = 2 \rightarrow x + x^3 = 2 \rightarrow x^3 + x - 2 = 0$.

Vemos que x = 1 es solución, porque $(1)^3 + 1 - 2 = 0$. Y ya no hay mas cortes entre las gráficas para x > 0, luego los punto de corte son (-1,1/2) y (1,1/2).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:




Para calcular el área observando la figura vemos que es simétrica respecto al eje OY, luego:

**Área** $= 2\cdot\int_0^1 ( 1/(1+x^2) - x/2)dx = 2\cdot[\text{artag}(x) - x^2/4]_0^1 =$

$= 2\cdot(\text{artag}(1) - 1/4 - \text{artag}(0)) =$ **$2\cdot(\pi/4 - 1/4 - 0) = \pi/2 - 1/2 \cong 1'0708\ u^2$**.

Si no te das cuenta que es simétrica tienes que calcular el área como suma de dos integrales: **Área** $= \int_{-1}^0 ( 1/(1+x^2) - (-x/2))dx + \int_0^1 ( 1/(1+x^2) - x/2)dx$ y se obtiene el mismo resultado.

32. Considere la función $f(x) = \frac{1}{2} - sen\ x$

a) Dibuje el recinto acotando comprendido entre la gráfica de f(x), el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

b) Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

$f(x) = \frac{1}{2} - sen\ x$

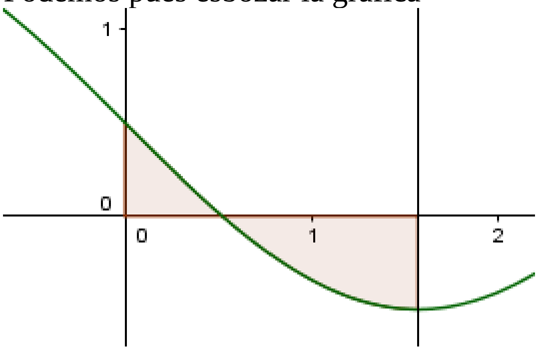
$f'(x) = -\cos x < 0$ $si$ $x \in (0, \pi/2) \Rightarrow f$ $decreciente$ $en$ $(0, \pi/2)$

$f(0) = \frac{1}{2}$ , $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{2}$

vemos que f tiene un único punto de corte con el eje OX en $(0, \pi/2)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow sen\ x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Podemos pues esbozar la gráfica




El área pedida será:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} - sen\ x\ dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - sen\ x dx = \left[\frac{x}{2} + \cos\ x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \left[\frac{x}{2} + \cos\ x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\pi}{12} + \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}4703\ u^2$$

33. Para cada $c \geq 2$ definimos $A(c)$ como el área de la región encerrada entre la gráfica de $f(x) = \frac{1+x^2}{x^4}$ , el eje de abscisas, y las rectas $x = 1$ y $x = c$

a) Calcula $A(c)$

b) Calcula $\lim_{c \to \infty} A(c)$

<u>Solución</u>:

a) La función $f(x) = \frac{1+x^2}{x^4}$ es positiva si $x \neq 0$ , por tanto

$$A(c) = \int_1^c \frac{1+x^2}{x^4} dx = A(c) = \int_1^c \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{3x^3} + \frac{-1}{x}\right]_1^c = \frac{-1}{3c^3} + \frac{-1}{c} + \frac{1}{3} + 1 = \left(\frac{-1}{3c^3} + \frac{-1}{c} + \frac{4}{3}\right) u^2$$

b) $\lim_{c \to \infty} A(c) = \lim_{c \to \infty} \frac{-1}{3c^3} + \frac{-1}{c} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

34. Hallar la función polinómica de grado 3 sabiendo que su gráfica pasa por el punto P (1,0), que tiene por tangente en el punto de abscisa x = 0 la recta de ecuación y = 2x + 1, y que su integral entre 0 y 1 vale 3.

<u>Solución:</u>

$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$f$ pasa por P (1,0) $\Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow A + B + C + D = 0$

la tangente en el punto de abscisa x = 0 es la recta de ecuación y = 2x + 1 implica:

$f(0) = 1 \Rightarrow D = 1$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ f'(0) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow C = 2$$

$A + B + 2 + 1 = 0 \Rightarrow B = -A - 3$

$$3=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 A\,x^3+(-A-3)\,x^2+2\,x+1\,dx=\left[\frac{A\,x^4}{4}-\frac{(A+3)\,x^3}{3}+x^2+x\right]_0^1=\frac{A}{4}-\frac{A+3}{3}+2$$

$$\Rightarrow 36=3A-4A-12+24\Rightarrow A=-24$$

Por tanto

$$f(x)=-24x^3+21x^2+2x+1$$

35. Sea la función $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

a) Calcular un punto de su gráfica tal que la tangente en dicho punto sea paralela al eje OX. Escribe la ecuación de la recta tangente.

b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas x=0 y x=ln 5

Solución:

a)

$$f'(x)=\frac{-(e^x)^2+e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}$$ por tanto $f'(x)=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

$$f(0)=\frac{1}{4}\Rightarrow el\ punto\ es\ \left(0,\frac{1}{4}\right)$$

La tangente buscada es la recta y=1/4

b)

Como f(x)>0 el área buscada es

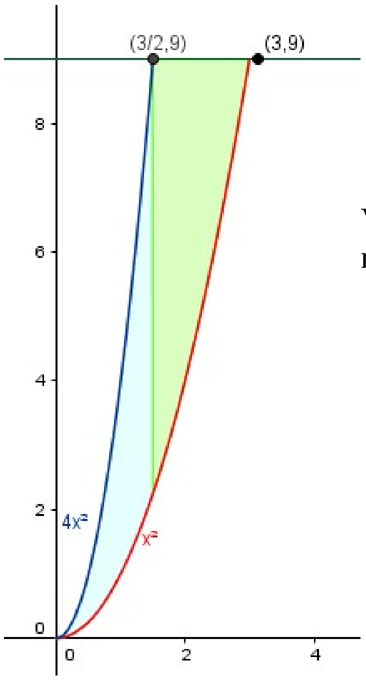
$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=\int_2^6\frac{1}{t^2}dt=\left[\frac{-1}{t}\right]_2^6=\frac{-1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} t=1+e^x \\ dt=e^x\,dx \\ x=\ln 5\Rightarrow t=1+e^{\ln 5}=6 \\ x=0\Rightarrow t=2 \end{cases}$$

36. Calcula el área de la región del plano limitada en el primer cuadrante por las gráficas de las funciones $y=x^2$ , $y=4x^2$ e $y=9$

Solución:

En primer lugar representaremos la región, para ello buscaremos los puntos de corte de las gráficas.




$y=x^2$ e $y=4x^2$ se cortan en el punto (0,0)

$y=x^2$ e $y=9$ se cortan en el punto (3,9)

$y=4x^2$ e $y=9$ se cortan en el punto (3/2,9)

Viendo la representación, para calcular el área habrá que dividir la región en dos partes, la primera la limitada por $y=4x^2$ , $y=x^2$ , $x=0$ y $x=3/2$ mientras que la segunda estará limitada por $y=9$ , $y=x^2$ , $x=3/2$ y $x=3$

$$\int_0^{3/2}4x^2-x^2\,dx+\int_{3/2}^3 9-x^2\,dx=\left[x^3\right]_0^{3/2}+\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{3/2}^3=$$

$$=\frac{27}{8}+27-9-\frac{27}{2}+\frac{27}{24}=9u^2$$

37. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.
a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función f(x) en el intervalo [0, 12]. ¿Está la curva en este intervalo [0, 12] contenida completamente en el muro?
b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva f(x)?

Solución
a)
Derivamos la función:

$$f'(x)=-sen\left(\frac{\pi\,x}{9}\right)\cdot\frac{\pi}{9}$$

Hallamos los puntos críticos en el intervalo [0,12]

$$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; sen\left(\frac{\pi\,x}{9}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\frac{\pi\,x}{9}=0+k\cdot\pi\\ \frac{\pi\,x}{9}=\pi+k\cdot\pi\end{cases};\; k\in\Re$$

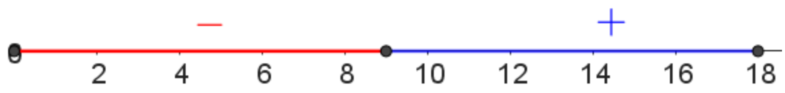
Los puntos críticos son x=0 y x=9, correspondientes a los casos:

$$\frac{\pi\,x}{9}=0\Leftrightarrow x=0$$

$$\frac{\pi\,x}{9}=\pi\Leftrightarrow x=9$$

ya que en el resto de posibilidades, la solución cae fuera del intervalo [0,12]

Si estudiamos el signo de la derivada:



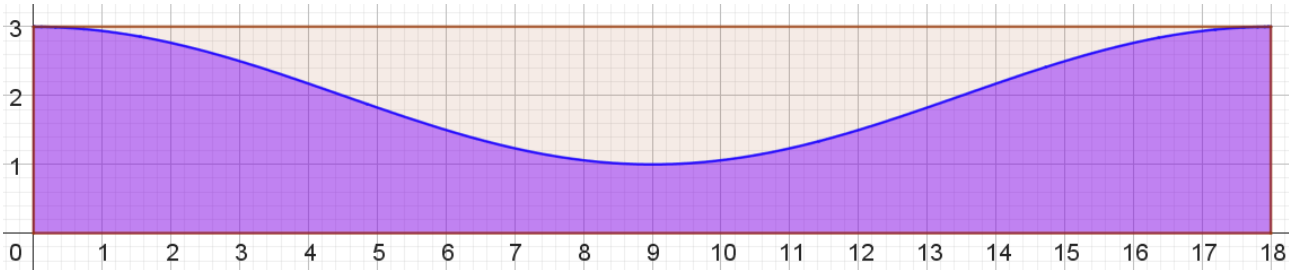

Observamos un mínimo (relativo y absoluto) en el punto de coordenadas (9,1)

Para el máximo observamos que f(0)=f(18)=3, con lo cual los puntos (0,3) y (18,3) serán los máximos absolutos.

Dado que la altura máxima es de 3 metros, concluimos que la curva está contenida en el muro.

b)

Teniendo en cuenta el crecimiento y los máximos y mínimos estudiados en el apartado a), podemos hacer un esbozo de las dos regiones a pintar.




Para calcular el área de la zona inferior, hacemos la integral definida:

$$\int_0^{18} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2 \; dx=\left[\frac{9}{\pi} sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2x\right]_0^{18}=\left(\frac{9}{\pi} sen(2\pi)+2\cdot 18\right)-\left(\frac{9}{\pi} sen(0)+2\cdot 0\right)=\mathbf{36\, m^2}$$

La zona superior será la diferencia respecto al rectángulo:

$A_{superior} = A_{rectángulo} - A_{inferior} = 54 - 36 =$ **18 m²**

c)

Sabiendo que el área bajo la curva mide 36 m² y que con cada spray se pintan 3 m², dividiendo, podemos concluir que se necesitan al menos 12 botes.

38. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de m para el cual la función $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x} & si\ x\leq 0 \\ \dfrac{(x+1)\,sen\,x}{x} & si\ x>0 \end{cases}$ sea continua en x=0

b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función $(x+1)e^{2x}$

c) La integral $\int (x+1)e^{2x}\,dx$ , y el área limitada por la curva $y=(x+1)e^{2x}$ y las rectas x=0, x=1 e y=0

a)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\,sen\,x}{x}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,x+(x+1)\cos x}{1}=sen\,0+(0+1)\cos 0=0+1=1$$

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=m\,(0+1)\,e^{2\cdot 0}=m\cdot 1\cdot e^0=m\cdot 1\cdot 1=m \\ \qquad\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow m=1$$

b)

$$g(x)=(x+1)e^{2x} \Rightarrow g'(x)=e^{2x}+2(x+1)e^{2x}=e^{2x}(1+2x+2)=e^{2x}(2x+3) \Rightarrow Creciente \Rightarrow g'(x)>0$$

$$e^{2x}(2x+3)>0 \Rightarrow \begin{cases} e^{2x}>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ 2x+3>0 \Rightarrow 2x>-3 \Rightarrow x>-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

| $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | $\infty$ |
|---|---|---|
| $e^{2x}>0$ | ( + ) | ( + ) |
| $x>-\frac{3}{2}$ | ( - ) | ( + ) |
| **Solución** | ( - ) | ( + ) |

**Decreciente** $\forall x \in \Re / x<-\dfrac{3}{2}$ **Creciente** $\forall x \in \Re / x>-\dfrac{3}{2}$

c)

$$\int (x+1)e^{2x}\,dx=\frac{(x+1)e^{2x}}{2}-\int \frac{e^{2x}}{2}dx=\frac{(x+1)e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{(x+1)e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2}$$

$$Por\ partes \Rightarrow \begin{cases} x+1=u \Rightarrow du=dx \\ e^{2x}\,dx=dv \Rightarrow v=\int e^{2x}\,dx=\dfrac{1}{2}\int e^{t}\,dt=\dfrac{e^{t}}{2}=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$2x=t \Rightarrow 2\,dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$$

$$\int (x+1)e^{2x}\,dx=\frac{(x+1)e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}=\frac{e^{2x}}{4}[2(x+1)-1]=\frac{(2x+1)e^{2x}}{4}+K$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow (x+1)e^{2x}=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$0<\frac{1}{2}<1 \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+1\right)e^{2\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}e>0$$

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}=\left[\frac{(2x+1)e^{2x}}{4}\right]_0^1=\frac{(2\cdot 1+1)e^{2\cdot 1}}{4}-\frac{(2\cdot 0+1)e^{2\cdot 0}}{4}=\frac{3}{4}e^{2}-\frac{3e^{0}}{4}=\frac{3}{4}e^{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}(e^{2}-1)u^{2}$$

39.

a) Encuentra una primitiva de la función f(x)=arctan x

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje de abscisas entre x=0 y x=1

Solución

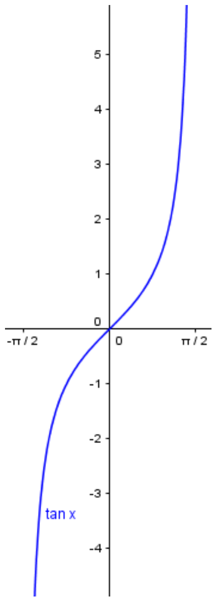
a)

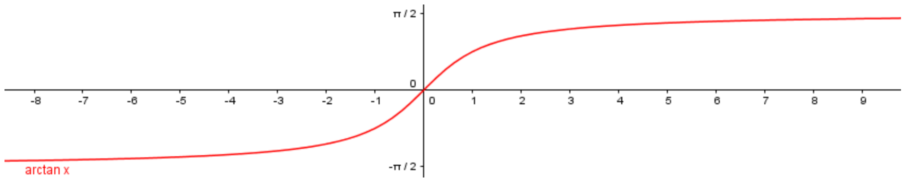
$$\int \arctan x\ dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+k\ ;\quad k\in\Re$$

Ver ejercicio 11

b)

f(x)=arctan x es la inversa de la función tan x en el intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$




Por tanto $f(x) \geq 0$ en el intervalo [0,1]. Así pues el área buscada es

$$\int_0^1 \arctan x\, dx = \left[ x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0{,}4388$$

40.

a) Define primitiva e integral indefinida de una función.

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y=-3x^2+3$ y la recta y=-9 .
(Nota: para el dibujo de las gráficas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y concavidad o convexidad)

Solución:

a)

Ver teoría

b)

La parábola corta al eje OY en el punto (0,3)

Para ver los puntos de corte con el eje OX debemos resolver la ecuación:

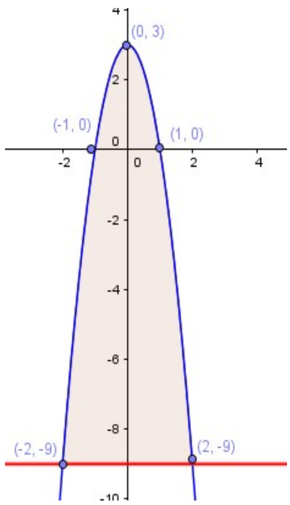
$$-3x^2+3=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

por tanto los puntos de corte son el (-1,0) y el (1,0)

La parábola es cóncava ya que $f''(x)=-6<0$

Para buscar el máximo hacemos $f'(x)=-6x=0 \Leftrightarrow x=0$ . El máximo por tanto es el punto (0,3)

Necesitamos los puntos de corte de las dos gráficas para delimitar el área a calcular, para ello haremos $-3x^2+3=-9 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$




Para calcular el área haremos

$$\int_{-2}^{2} -3x^2+3+9\, dx = \left[-x^3+12x\right]_{-2}^{2} = 16-(-16) = 32$$

41. Calcula el valor del parámetro $a \in \Re$ , $a>0$ , para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f(x)=-x^2+a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=-a$ .

Solución:

La parábola es cóncava, tiene el vértice en el punto $(0,a^2)$ y corta al eje OX en los puntos $(-a,0)$ y $(a,0)$ . Por lo tanto el área buscada nos la da la integral:

$$\int_{-a}^{a} -x^2+a^2\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+a^2x\right]_{-a}^{a}=\left(-\frac{a^3}{3}+a^3\right)-\left(\frac{a^3}{3}-a^3\right)=\frac{4a^3}{3}$$

Por otra parte, la pendiente de la tangente será $f'(-a)=2a$ . Así pues, el parámetro buscado deberá cumplir:

$$\frac{4a^3}{3}=2a \Leftrightarrow 4a^3=6a \Leftrightarrow 4a^3-6a=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

De las soluciones obtenidas el caso a=0 se corresponde a una región inexistente, y el caso $a=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ no tiene sentido ya que se correspondería con un área negativa. (además el enunciado especifica $a>0$ )

Así pues, la solución es $a=\sqrt{\frac{3}{2}}$

42. $\int 3x\sqrt[3]{x^2+1}\,dx$

Solución:

$$\int 3x\sqrt[3]{x^2+1}\,dx=\frac{3}{2}\int 2x\sqrt[3]{x^2+1}\,dx=\frac{3}{2}\int \sqrt[3]{t}\,dt=\frac{3}{2}\int t^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot t^{\frac{4}{3}}+C=\frac{9}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}}+C$$

$$\left|\begin{array}{l} t=x^2+1 \\ dt=2x\,dx \end{array}\right.$$

43. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$

Solución:

$$\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx=\int -\cos(t)\,dt=-sen\,t+C=-sen\,(1/x)+C$$

$$\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{x} \\ dt=\dfrac{-1}{x^2}\,dx \end{array}\right.$$

44. Halla el área del recinto limitado por la curva $y=\frac{1}{x^2+3}$ , la recta tangente a la curva en el punto de inflexión de abscisa positiva y la recta x=0

Solución:

$$y'=\frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$y''=\frac{-2(x^2+3)^2+2x\cdot2(x^2+3)\cdot2x}{(x^2+3)^4}=\frac{(-2(x^2+3)+8x^2)(x^2+3)}{(x^2+3)^4}=\frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}$$

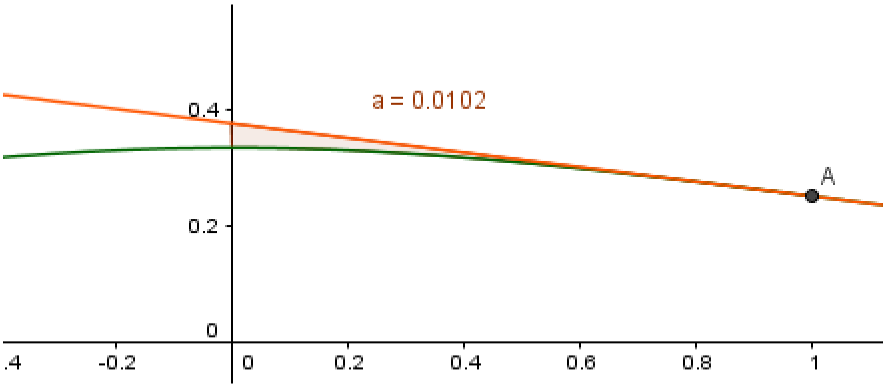
$y''(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Estudiando el signo de y"

| x | $(-\infty,-1)$ | (-1,1) | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| y" | + | - | + |

El punto de inflexión buscado es el $\left(1,\frac{1}{4}\right)$ y la tangente $\left(y-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}(x-1) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}$

Que la función sea cóncava en (0,1) implica que en este intervalo la gráfica está por debajo de la recta.




El área buscada será

$$\int_0^1 -\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}-\frac{1}{x^2+3}dx=\int_0^1 -\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}dx-\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx=\left[\frac{-x^2}{16}+\frac{3x}{8}\right]_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{(x/\sqrt{3})^2+1}dx=$$

$$\begin{cases} t=\frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt=\frac{dx}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx=\sqrt{3}\cdot dt \\ x=1 \Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$=\frac{5}{16}-\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{\sqrt{3}}{t^2+1}dt=\frac{5}{16}-\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{5}{16}-\frac{\sqrt{3}}{3}[\arctan t]_0^{\sqrt{3}/3}=\frac{5}{16}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}\approx 0{,}0102$$

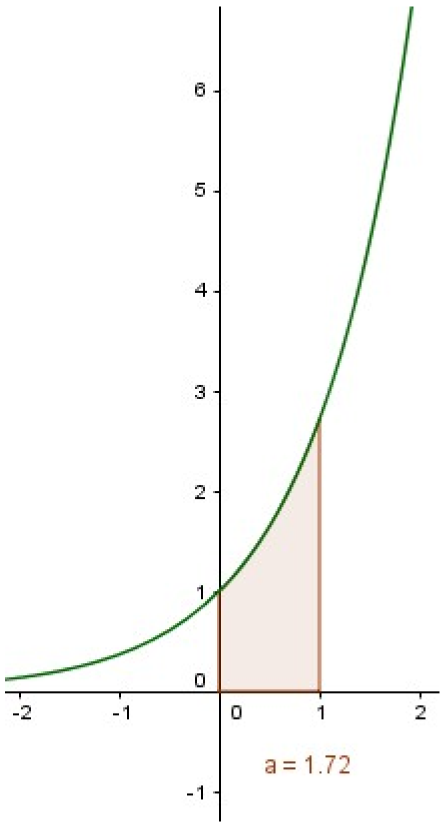
45. Se considera la curva $y=e^{kx}, k>0$ . Escribe la ecuación de la función A (k) que nos da el área de la región limitada por esta curva y las rectas y = 0, x = 0, x = 1. Calcular $\lim_{k\to 0} A(k)$ . Hacer un dibujo aclaratorio .

<u>Solución</u>:

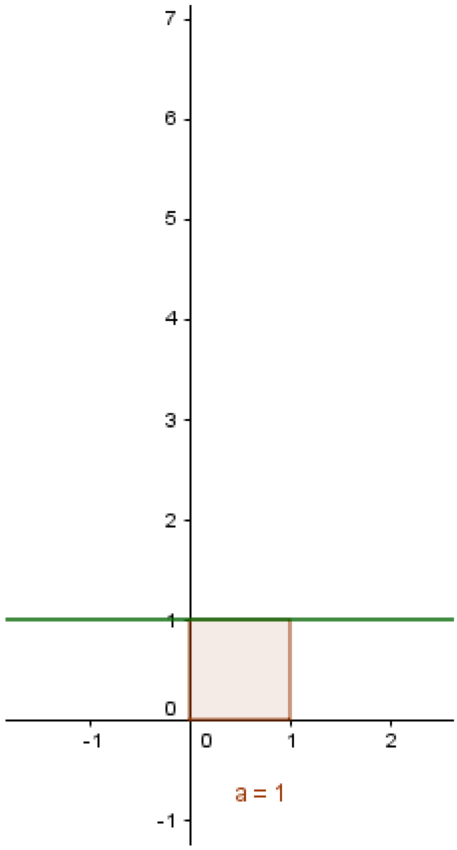
Como $e^{kx}>0$ el área viene dada por la integral

$$A(k)=\int_0^1 e^{kx}dx=\left[\frac{e^{kx}}{k}\right]_0^1=\frac{e^k-1}{k}$$

$$\lim_{k\to 0} A(k)=\lim_{k\to 0}\frac{e^k-1}{k}=\lim_{k\to 0}\ e^k=1$$



Caso k=1



Caso k=0 (coincide con el límite)

46. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 0 & si\, x=0 \\ x\cdot Ln\, x & si\, x>0 \end{cases}$ se pide:

a) Estudiar su continuidad

b) Calcular el área de la región limitada por la curva y = f(x) y las rectas y=0, x=k, x=1, donde k es la abscisa del mínimo de la función. Hacer un dibujo de la región.

Solución:

a)

La función es continua en $(0,+\infty)$ por ser un producto de funciones continuas.

Para que f sea continua en x=0 es necesario que $f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (f no está definida cuando x<0)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\cdot Ln\, x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0=f(0)$$

Por tanto la función es continua en su dominio, es decir, en $[0,+\infty)$

b)

Empezaremos calculando el mínimo de la función:

$$f'(x)=\ln x+1=0 \Leftrightarrow x=e$$

$$f''(e)=\frac{1}{e}>0$$

Por tanto la función tiene un mínimo en (e,f(e))

Para calcular el área de la región comprendida entre la curva y la recta y=0 hay que estudiar el signo de la función.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot Ln\, x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (no\ vale) \\ x=1 \end{cases}$$

| $x$ | $(0,1)$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | - | + |

Por lo tanto el área vendrá dada por la integral:

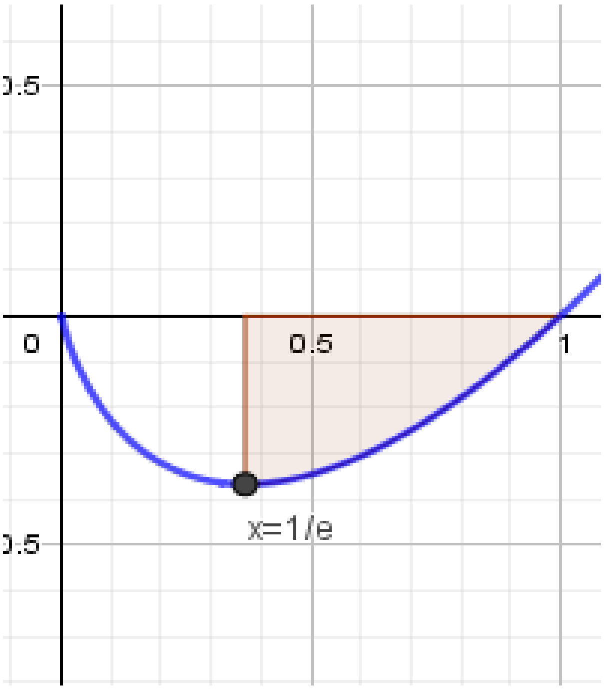
$$A=-\int_{e^{-1}}^{1} x\cdot Ln\, x\, dx$$

Para encontrar una primitiva utilizamos el método de integración por partes:

$$\int x\cdot ln\, x\, dx=\frac{x^2}{2}\cdot lnx-\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}+C$$

Con lo cual:

$$A=-\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_{e^{-1}}^{1}=-\left(\frac{1^2}{2}\cdot\ln 1-\frac{1^2}{4}\right)+\left(\frac{e^{-2}}{2}\cdot\ln e^{-1}-\frac{e^{-2}}{4}\right)=\frac{1}{4}+\left(\frac{-e^{-2}}{2}-\frac{e^{-2}}{4}\right)=\frac{1-3e^{-2}}{4}\approx 0{,}1485$$




Para representar la función debemos tener en cuenta:

El dominio es $[0,+\infty)$

La función corta al eje x en (0,0) y (1,0)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=1+\ln x=0\Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

| $x$ | $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ | $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | + |

La función decrece en $\left[0,\frac{1}{e}\right)$ y crece en $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$

47.

a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo integral para funciones continuas.

b) Sea $f:[-2,2]\subset\Re\to\Re$ continua en [-2,2] tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt=\int_{1}^{2} f(t)dt$. ¿Se puede asegurar que existen b y c en [-2,2] tales que $b\le -1$, $c\ge 1$ y $f(b)=f(c)$ ? Justifica la respuesta.

<u>Solución</u>:

a)

Ver teoría

b)

Según el teorema del valor medio del cálculo integral, y teniendo en cuenta que los intervalos $[-2,-1]$ y $[1,2]$ tienen longitud 1:

$$\exists b\in(-2,-1)\,/\,f(b)=\int_{-2}^{-1} f(t)dt$$

$$\exists c\in(1,2)\,/\,f(c)=\int_{1}^{2} f(t)dt$$

y como

$$\int_{-2}^{-1} f(t)dt=\int_{1}^{2} f(t)dt$$
entonces f(b)=f(c)

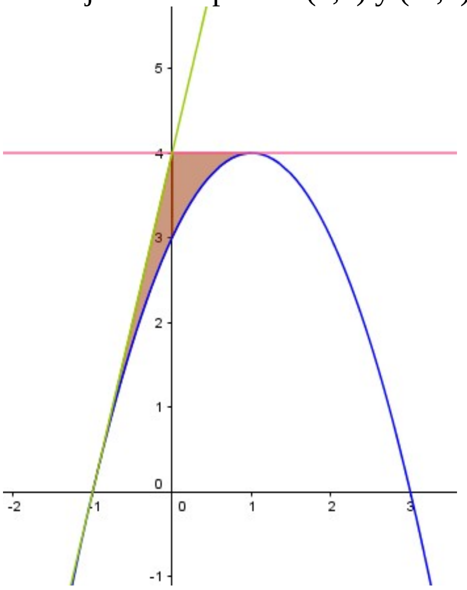
48. Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. Sabiendo que $\int_{0}^{x} f(t)dt=x^2\cdot(1+x)$ con f una función continua en todos los puntos de la recta real, calcula f(2)

Solución:
Si f es una función continua en el intervalo [a,b], entonces la función $F(x)=\int_a^x f(y)\,dy$ es derivable y además $F'(x)=f(x)$

En este caso
$$F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt=x^2\cdot(1+x)\Rightarrow f(x)=F'(x)=3x^2+2x\Rightarrow f(2)=16$$

49. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y=-x^2+2x+3$, la recta tangente en el punto donde la parábola tiene un extremo y la tangente a la parábola en el punto en el que la tangente es paralela a la recta y=4x. (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad)

Solución:
Para calcular el vértice de la parábola hacemos $y'=-2x+2=0\Leftrightarrow x=1$, por tanto el vértice es el punto de coordenadas (1,4). Como $y''=-2$ la parábola es cóncava y se trata, por tanto, de un máximo.
La parábola corta al eje OY en el punto (0,3). Para calcular los cortes con el eje OX hacemos
$-x^2+2x+3=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\x=3\end{cases}$ por tanto la parábola corta al eje OX en los puntos (-1,0) y (3,0)
La recta tangente a la parábola en el máximo tiene ecuación y=4
Para encontrar el punto donde la tangente es paralela a la recta y=4x haremos
$y'=-2x+2=4\Leftrightarrow x=-1$, por tanto el punto es el (-1,0) y la tangente, la recta y=4x+4, que corta a los ejes en los puntos (0,4) y (-1,0)




Para calcular el área deberemos dividir la región en dos partes:

$$A=\int_{-1}^{0} 4x+4-(-x^2+2x+3)\,dx+\int_{0}^{1} 4-(-x^2+2x+3)\,dx=\int_{-1}^{0} x^2+2x+1\,dx+\int_{0}^{1} x^2-2x+1\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

50. Considera la función $f(x)=\begin{cases} sen\,x & si\ x\in[-2\pi,0) \\ x^2-2x & si\ x\in[0,3] \end{cases}$

a) Estudia si la función f es derivable en x=0.
b) Calcula los puntos de corte con los ejes. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f. Dibuja su gráfica.
c) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas (y=0) y las rectas verticales x=0 y x=3.

Solución:

a)

La función es continua en 0 ya que

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} sen\,x=0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2-2x=0 \\ f(0)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f\ continua\ en\ x=0$$

Una vez comprobada que es continua, para ver si es derivable hacemos

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-} (sen\,x)'=\lim_{x\to 0^-} \cos x=1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+} (x^2-2x)'=\lim_{x\to 0^+} (2x-2)=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow f\ no\ es\ derivable\ en\ x=0$$

b)

Cortes con el eje OX:

$$sen\,x=0\Leftrightarrow x=k\cdot\pi:\ k\in Z\Rightarrow\begin{cases} f(-2\pi)=0 \\ f(-\pi)=0 \end{cases}$$

$$x^2-2x=0\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=0 \end{cases}$$

Corte con el eje OY: (0,0)

Crecimiento:

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & si\ x\in[-2\pi,0) \\ 2x-2 & si\ x\in(0,3] \end{cases}$$

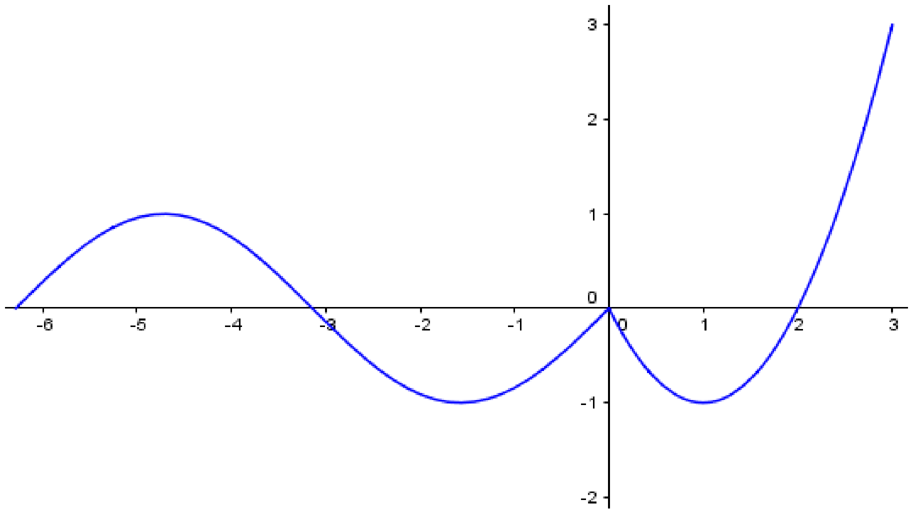
Si estudiamos el signo de f':

| x | $\left[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right)$ | $\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ | $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ | $(0,1)$ | $(1,3)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | - | + | - | + |

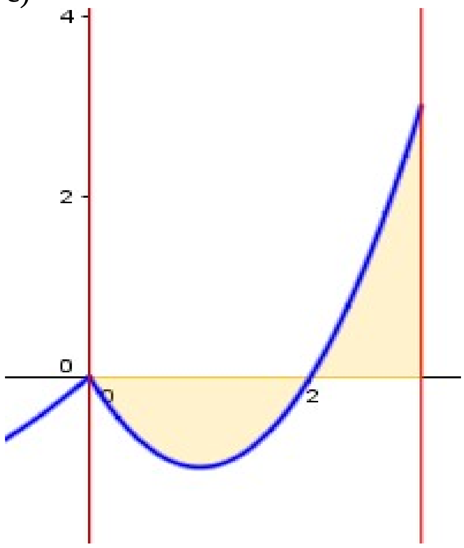
Crece : $\left[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup(1,3)$

Decrece: $\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)$

Máximos relativos: $\left(-\frac{3\pi}{2},1\right)$ y (0,0)




c)




El área pedida vendrá dada por la expresión:

$$A=-\int_0^2 x^2-2x\ dx+\int_2^3 x^2-2x\ dx=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3=\left(\frac{-8}{3}+4\right)+\left(9-9-\frac{8}{3}+4\right)=\frac{8}{3}\ \ u^2$$

51. Dibuja la región limitada por las curvas $y=sen\,x$ , $y=\cos x$ , y las rectas x = 0 y x = π . Calcula el área del recinto.

Solución:

$y=sen\,x$ cortará al eje OX en los puntos $(0{,}0)$ y $(\pi,0)$

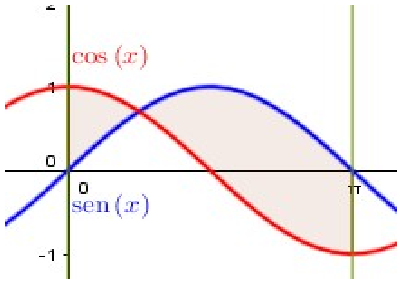
y=cos x cortará al eje OX en el punto $(\frac{\pi}{2},0)$ y al eje OY en el $(0{,}1)$

$y=sen\,x$ crece en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ con un máximo en $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$

$y=\cos x$ decrece en $(0,\pi)$

Las dos gráficas se cortarán cuando $sen\,x=\cos x \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ , es decir, en el punto $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Con todo esto se puede esbozar las gráficas de las dos curvas en el intervalo $[0,\pi]$ :




El área, por tanto vendrá dada por la expresión:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x-sen x\ dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} sen x-\cos x\ dx=[sen x+\cos x]_0^{\pi/4}+[-\cos x-sen x]_{\pi/4}^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}\ u^2$$

**52. Determina la función $f:(0,+\infty)\to\Re$ sabiendo que f es dos veces derivable, que $f(1)=e+2$, que $f'(1)=e+2$ y que $f''(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$**

Solución:

Como f' es una primitiva de f'':

$$f'(x)=\int e^x-\frac{1}{x^2}\ dx=e^x+\frac{1}{x}+C;\qquad C\in\Re$$

Ahora bien, como $f'(1)=e+2$ tenemos que

$$e+1+C=e+2\Rightarrow C=1\Rightarrow f'(x)=e^x+\frac{1}{x}+1$$

Como f es una primitiva de f':

$$f(x)=\int e^x+\frac{1}{x}+1\ dx=e^x+\ln x+x+K;\quad K\in\Re$$

y como $f(1)=e+2$, tenemos que:

$$e+1+K=e+2\Rightarrow K=1\Rightarrow f(x)=e^x+\ln x+x+1$$

**53. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx$**

Solución:

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx=2\int\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\ dx=2\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x-2\int\frac{\sqrt{x}}{x}\ dx=2\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x-4\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx=$$

$$=2\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x-4\cdot\sqrt{x}+K;\quad K\in\Re=2\sqrt{x}\cdot(lnx-2)+K;\quad K\in\Re$$

**54.**

**a) Enuncia la regla de Barrow.**

**b) Dibuja el recinto finito, limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ , $g(x)=e^{-x}$ y $h(x)=e^2$**

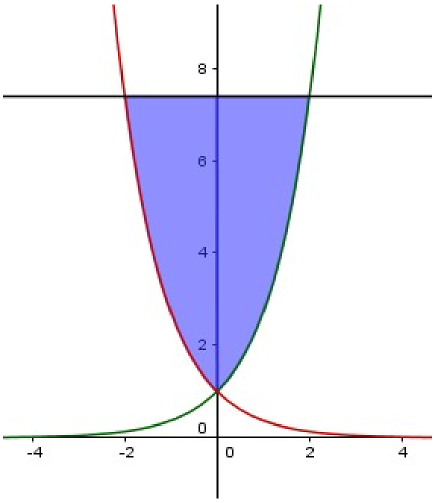
**c) Calcula el área de dicho recinto.**

Solución:

a)

Si f es una función continua en [a,b] y G es una función primitiva de f, es decir G'(x)=f(x), entonces $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$

b)




- $e^x$ está definida en todo R, es creciente, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- $e^{-x}$ está definida en todo R, es decreciente, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
- $e^2$ es constante.
- $e^x$ y $e^2$ se cortan en el punto $(2,e^2)$
- $e^{-x}$ y $e^2$ se cortan en el punto $(-2,e^2)$

c)

$$Área=\int_{-2}^{0} e^2-e^{-x}\,dx+\int_{0}^{2} e^2-e^x\,dx=\left[e^2x+e^{-x}\right]_{-2}^{0}+\left[e^2x-e^x\right]_0^2=\left(1+2e^2-e^2\right)+\left(2e^2-e^2+1\right)=\mathbf{2+2e^2}\ \ u^2$$

**55. Calcula las siguientes integrales:**

**a)** $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{(6x+4)^2+2}$

**b)** $\displaystyle\int \ln(x+1)\,dx$

Solución:

a) $\int \frac{5\,dx}{(6x+4)^2+2}=\frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{6x+4}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=\frac{5}{2}\int \frac{\sqrt{2}/6\,dt}{t^2+1}=\frac{5\sqrt{2}}{12}\,arctg\,t+C=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{12}\,arctg\,\frac{6x+4}{\sqrt{2}}+C}$

$$\begin{cases} t=\frac{6x+4}{\sqrt{2}} \\ dt=\frac{6}{\sqrt{2}}dx \Rightarrow dx=\frac{\sqrt{2}}{6}dt \end{cases}$$

b) $\int \ln(x+1)\,dx=x\cdot ln(x+1)-\int \frac{x}{x+1}\,dx=x\cdot ln(x+1)-\int 1-\frac{1}{x+1}\,dx=x\cdot ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C=$

$$\begin{cases} u=\ln(x+1)\Rightarrow u'=\frac{1}{x+1} \\ v'=1\Rightarrow v=x \end{cases}$$

$\boldsymbol{=(x+1)\ln(x+1)-x+C}$

**56. Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{8x}$ y $g(x)=x^2$**

**a) Representa gráficamente la región del plano limitada por la gráfica de las dos funciones. (0.5 puntos)**

**b) Calcula el área de la región del apartado a)**

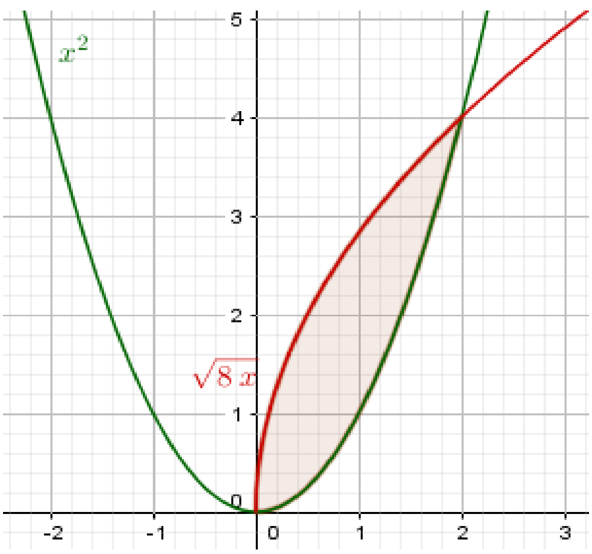
Solución:

Si calculamos los puntos de intersección de f y g:

$x^2=\sqrt{8x}\Rightarrow x^4=8x\Rightarrow x^4-8x=0\Rightarrow$

$x(x^3-8)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Así pues los puntos de corte son el (0,0) y el (2,4)



El área vendrá dada por la expresión:

$$\int_0^2 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^2 \sqrt{8x}-x^2dx=\int_0^2 \sqrt{8}\cdot x^{\frac{1}{2}}-x^2\,dx=\left[\frac{\sqrt{8}x^{\frac{3}{2}}}{3/2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{2\sqrt{8}\sqrt{8}}{3}-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}\ u^2$$

**57. Considera la función $f:\Re\rightarrow\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases} 2x & si\ x<0 \\ x^2-x & si\ x\geq 0\end{cases}$**

**a) Determina si es derivable en x=0**

**b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y dibuja su gráfica.**

**c) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas (y=0) y las rectas verticales x=-3 y x=2**

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\rightarrow 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\rightarrow 0^-}\dfrac{2h}{h}=\lim\limits_{h\rightarrow 0^-}2=2 \\ \lim\limits_{h\rightarrow 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\rightarrow 0^+}\dfrac{h^2-h}{h}=\lim\limits_{h\rightarrow 0^+}h-1=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow \nexists f'(0)$$

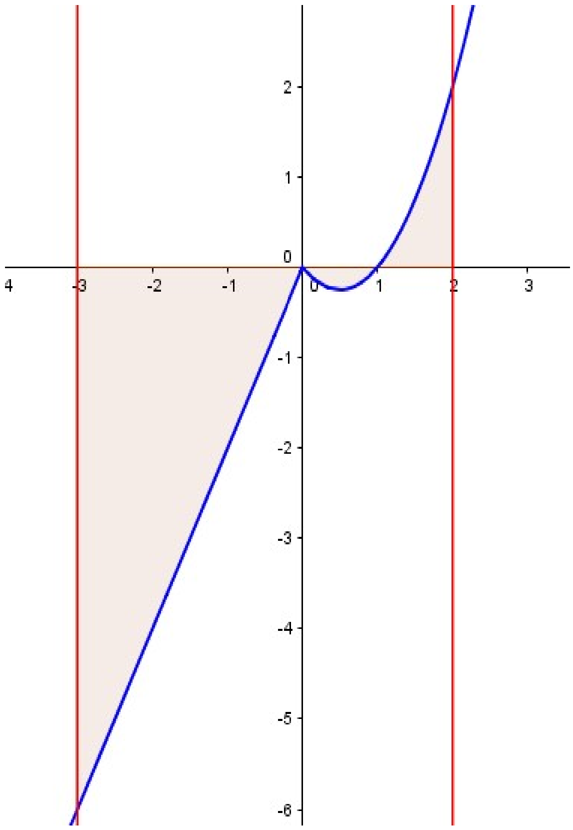
b)

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & si\ x<0 \\ 2x-1 & si\ x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \quad si\ x\in(-\infty,0) \\ f'(x)<0 \quad si\ x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \\ f'(x)>0 \quad si\ x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right) \end{array}\right\}\Rightarrow f\ decreciente\ en\left(0,\frac{1}{2}\right)y\ creciente\ en(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$$

Como $\lim\limits_{x\rightarrow 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\rightarrow 0^+}f(x)=f(0)$ , f es continua en 0 y por tanto hay un máximo relativo cuando x=0

Hay un mínimo relativo cuando x=1/2





**c)** $\text{Área}=-\int_{-3}^{0} 2x\,dx-\int_{0}^{1} x^2-x+\int_{1}^{2} x^2-x\;dx=-\left[x^2\right]_{-3}^{0}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}=9+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{30}{3}=10\,u^2$

**58. Calcula:**

**a)** $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}}$

**b)** $\boldsymbol{\int (x+1)\cdot e^{2x}\,dx}$

<u>Solución</u>:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+\operatorname{tg}^2 x-\cos x}=\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2\operatorname{tg} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+\operatorname{sen} x}=$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^2+4\operatorname{tg}^2 x\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+\cos x}=\frac{1}{2\cdot(1+0)^2+4\cdot 0\cdot(1+0)+1}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

b)

$$\int (x+1)\cdot e^{2x}\,dx=\frac{(x+1)\cdot e^{2x}}{2}-\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx=\boldsymbol{\frac{(x+1)\cdot e^{2x}}{2}-\frac{1}{4}e^{2x}+K;\quad K\in\Re}$$

$$\begin{cases} u=x+1\Rightarrow u'=1 \\ v'=e^{2x}\Rightarrow v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

**59.**