

Análisis - Parte II

<i>Primitiva de una función</i>	2
Definición:	2
<i>Integral Indefinida</i>	2
Propiedades	2
<i>Cálculo de primitivas</i>	2
Integrales inmediatas	2
Regla de la cadena y cambio de variable	3
Integración por partes	4
Funciones racionales	5
<i>Integral Definida</i>	8
Partición de un intervalo	8
Suma de Riemann	8
Sumas superior e inferior	9
Definición de integral definida	10
Funciones integrables	10
Propiedades de la integral definida	11
<i>Integral y derivada</i>	11
Teorema del valor medio del cálculo integral	11
Teorema fundamental del cálculo	12
Regla de Barrow	12

Primitiva de una función

Definición:

Dada una función f , decimos que F es una primitiva de f si $F' = f$

Ejemplos:

- $\frac{x^3}{3}$ es primitiva de x^2
- $-\cos x$ es primitiva de $\sin x$
- $\ln |x|$ es primitiva de $\frac{1}{x}$

Observaciones:

- La primitiva no es una única función, sino un conjunto de funciones que se diferencian en una constante. Es decir $\frac{x^3}{3} + k$; $k \in \mathbb{R}$ serían las primitivas de x^2
- No toda función tiene una primitiva que se pueda expresar analíticamente. Esto quiere decir que hay funciones cuya primitiva no se puede escribir utilizando las funciones habituales (exponenciales, trigonométricas, ...), por ejemplo la función e^{-x^2} es de este tipo.

Integral Indefinida

Se conoce como integral indefinida de una función f , al conjunto de todas las primitivas de f . Suele representarse como $\int f(x) dx = F(x) + k$; $k \in \mathbb{R}$ donde F es una primitiva de f .

El símbolo \int se llama integral y la expresión $f(x) dx$ integrando. $k \in \mathbb{R}$ se conoce como constante de integración.

Propiedades

$$\int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int (k \cdot f)(x) dx = k \cdot \int f(x) dx ; \quad k \in \mathbb{R}$$

Cálculo de primitivas

Como veréis el cálculo de primitivas es bastante más complejo que el de derivadas, y a diferencia de este, los métodos que veremos a continuación no funcionan para cualquier función. Como por ejemplo para aquellas funciones cuya primitiva no se pueda expresar de forma analítica.

Integrales inmediatas

(Consecuencia de la tabla de derivadas)

Integral de una potencia

$\int c \, dx = c \cdot x + k ; \quad c, k \in \mathbb{R}$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k ; \quad n \neq -1 ; \quad n, k \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + k ; \quad k \in \mathbb{R}$

Integrales trigonométricas

$\int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x) + k ; \quad k \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + k ; \quad k \in \mathbb{R}$
$\int \cos(x) \, dx = \operatorname{sen}(x) + k ; \quad k \in \mathbb{R}$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arccos} x + k ; \quad k \in \mathbb{R}$
$\int (1 + \tan^2 x) \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + k ; \quad k \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctan} x + k ; \quad k \in \mathbb{R}$

Integrales exponenciales

$\int e^x \, dx = e^x + k ; \quad k \in \mathbb{R}$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + k ; \quad k \in \mathbb{R}$
---	---

Regla de la cadena y cambio de variable

La regla de la cadena decía que $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, por tanto si podemos expresar nuestra integral en estos términos tendríamos:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int (f \circ g)'(x) \, dx = (f \circ g)(x)$$

Ejemplo:

$$\int \cos(x^2) \cdot 2x \, dx = \operatorname{sen}(x^2) + k ; \quad k \in \mathbb{R}$$

Otra forma de aprovechar la regla de la cadena sería haciendo un cambio de variable. En este caso introduciríamos una nueva variable que sería función de x , $t(x)$, entonces tendríamos que

$$dt = t'(x) \, dx \quad \text{o bien} \quad dx = \frac{dt}{t'(x)}$$

Ejemplos:

- Veamos como utilizar el cambio de variable para calcular la primitiva de $\tan x$:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx \quad \text{si hacemos } t = \cos x \text{ tendremos } dt = -\operatorname{sen} x \, dx \text{ con lo cual}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{t} dt = -\int \frac{1}{t} = -\ln |t| + k = -\ln |\cos x| + k$$

- $\int \sqrt{3x+1} dx$ si hacemos $t^2 = 3x+1$, entonces tendremos que $x = \frac{t^2-1}{3}$ y $dx = \frac{2}{3} t dt$ con lo que la integral se transforma de la siguiente manera:

$$\int \sqrt{3x+1} dx = \int t \cdot \frac{2}{3} t dt = \frac{2}{3} \int t^2 dt = \frac{2}{9} t^3 + k = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+1)^3} + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

- $\int \sqrt{1-x^2} dx$ aquí hacemos $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t dt$ y por tanto

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt$$

Despejando en la fórmula $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t)$ queda

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

deshaciendo el cambio de variable $t = \operatorname{arcsen} x$ tenemos

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot \operatorname{arcsen} x)}{4} + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

que se puede simplificar a

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\operatorname{arcsen} x + x \cdot \sqrt{1-x^2}}{2} + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

Integración por partes

El método de integración por partes se basa en la derivación del producto

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow \int (u \cdot v)' dx = \int u' \cdot v dx + \int u \cdot v'$$

y por tanto

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

La dificultad de este método consiste en elegir adecuadamente las funciones u y v

Ejemplos:

- $\int x \cdot \operatorname{sen} x dx$ aquí haremos $u(x) = -\cos x \Rightarrow u'(x) = \operatorname{sen} x$ y $v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$, entonces:

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x dx = -\cos x \cdot x + \int -\cos x dx = -\cos x \cdot x - \operatorname{sen} x + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

- $\int \ln x dx$ en este caso $u'(x) = 1$ y $v(x) = \ln x$ con lo que $u(x) = x$ y $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

- $\int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx$ haremos $u'(x) = e^x$ y $v(x) = \operatorname{sen} x$:

$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$ haciendo otra vez integración por partes con $u'(x) = e^x$ y $v(x) = \cos x$ tendremos:

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \left[e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\operatorname{sen} x) \, dx \right]$$

Simplificando:

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx \quad \text{entonces}$$

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot \cos x}{2} + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

Funciones racionales

Las funciones racionales son de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son polinomios, por ejemplo

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \, dx$$

El método para integrar una función racional consiste en descomponerla en otras funciones racionales más sencillas.

La **primera simplificación** que se ha de hacer consiste en asegurarse que el grado de $p(x)$ es menor que el de $q(x)$. De no ser así se divide $p(x)$ entre $q(x)$, obteniéndose un cociente $c(x)$ y un resto $r(x)$, entonces como $p = q \cdot c + r$ tendremos $\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx = \int c(x) \, dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} \, dx$ en donde el grado de $r(x)$ es menor que el de $q(x)$

En nuestro ejemplo:

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \, dx = \int 1 \, dx + \int \frac{1}{x^2 + x - 2} \, dx$$

Una vez nos aseguramos que el grado de $p(x)$ es menor que el de $q(x)$ deberemos factorizar $q(x)$. A partir de aquí hay que estudiar varios casos posibles:

Caso 1: $q(x)$ tiene **todas las raíces reales y no tiene raíces múltiples**

En este caso $q(x) = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$, donde n es el grado de $q(x)$, y la integral se puede descomponer en integrales más sencillas de la siguiente forma:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx = \int \frac{A_1}{x - a_1} \, dx + \dots + \int \frac{A_n}{x - a_n} \, dx$$

Las integrales que aparecen son de tipo $1/x$ y el único problema radica en obtener los coeficientes A_1, \dots, A_n , para lo cual será necesario resolver un sistema de ecuaciones.

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 2} \, dx = \int \frac{A_1}{x - 1} \, dx + \int \frac{A_2}{x + 2} \, dx \quad \text{para calcular } A_1 \text{ y } A_2 \text{ tendremos que}$$

$$1 = A_1 \cdot (x + 2) + A_2 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -1/3 & (\text{sustituyendo } x \text{ por } 1) \\ A_2 = 1/3 & (\text{sustituyendo } x \text{ por } -2) \end{cases}$$

y por tanto

$$\int \frac{1}{x^2+x-2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

Caso 2: $q(x)$ tiene todas las raíces reales pero tiene raíces múltiples

En este caso $q(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x-a_k)^{m_k}$, donde m_i es la multiplicidad de la raíz a_i en esta ocasión la integral se descompone:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{A_1}{x-a_1} dx + \dots + \int \frac{A_{m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} dx + \int \frac{B_1}{x-a_2} dx + \dots + \int \frac{B_{m_2}}{(x-a_2)^{m_2}} dx + \dots$$

Ejemplo:

$$\int \frac{2x^2-3x+4}{x^3+3x^2-4} dx = \int \frac{2x^2-3x+4}{(x+2)^2 \cdot (x-1)} dx = \int \frac{A_1}{x-1} dx + \int \frac{A_2}{x+2} dx + \int \frac{A_3}{(x+2)^2} dx$$

en este caso

$$2x^2 - 3x + 4 = A_1 \cdot (x+2)^2 + A_2 \cdot (x-1) \cdot (x+2) + A_3 \cdot (x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 9A_1 & (\text{si } x=1) \\ 18 = -3A_3 & (\text{si } x=-2) \\ 4 = 4A_1 - 2A_2 - A_3 & (\text{si } x=0) \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad A_3 = -6$$

con lo cual

$$\int \frac{2x^2-3x+4}{(x+2)^2 \cdot (x-1)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{5}{3} \int \frac{1}{x+2} dx - 6 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{5}{3} \ln|x+2| + \frac{6}{x+2} + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

Caso 3: $q(x)$ tiene raíces complejas.

Como $q(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, las raíces complejas serán pares conjugados $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ tal que $(x-z) \cdot (x-\bar{z}) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$

Entonces en la descomposición de la fracción, para cada par de raíces complejas aparecerá un sumando de la forma $\frac{Ax+B}{x^2-2ax+(a^2+b^2)} = \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$

A continuación veremos como se integran estas expresiones:

Caso 3.1

$$\int \frac{1}{x^2+a} dx \quad \text{en este caso hay que recordar la derivada } (\arctg)' x = \frac{1}{1+x^2} \text{ así pues}$$

$$\int \frac{1}{x^2+a} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x/\sqrt{a})^2+1} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t^2+1} \cdot \sqrt{a} dt = \frac{\sqrt{a}}{a} \arctg t + k = \frac{\sqrt{a}}{a} \arctg \frac{x}{\sqrt{a}} + k$$

$$\text{con el cambio } t = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{a}} \Rightarrow dx = \sqrt{a} dt$$

Caso 3.2

$\int \frac{1}{x^2+ax+b} dx$ en este caso habrá que buscar dos números m y n tales que

$\int \frac{1}{x^2+ax+b} dx = \int \frac{1}{(x+m)^2+n} dx$ para luego hacer cambio de variable, buscando la derivada del arco tangente, como en el caso anterior.

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \text{ como } x^2+x+1 = (x+m)^2+n \Leftrightarrow \begin{cases} 1=2m \\ 1=m^2+n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1/2 \\ n=3/4 \end{cases} \text{ así pues}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1} dx$$

$$\text{haciendo } t = \frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}, \quad dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt \text{ tenemos}$$

$$\frac{4}{3} \int \frac{1}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{t^2+1} \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg t + k = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

Caso 3.3

$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{cx+d}{x^2+ax+b} dx$ en este caso buscaremos una expresión del tipo

$p(x) = k \cdot q'(x) + r(x)$ con lo que la integral se descompondría de la siguiente forma

$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int k \frac{q'(x)}{q(x)} dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx = k \cdot \ln|q(x)| + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$ siendo $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$ ya estudiada en el caso 3.2

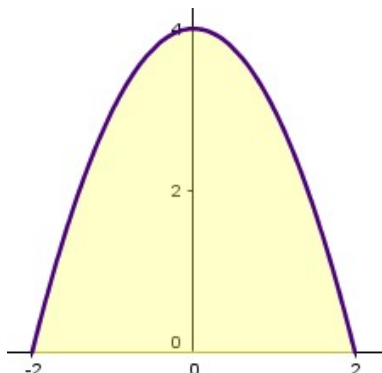
Ejemplo:

$\int \frac{3x-8}{x^2+x+1} dx$ como $(x^2+x+1)' = 2x+1$ al dividir $3x-8$ entre $2x+1$ tenemos cociente $3/2$ y resto $-19/2$ con lo cual

$$\int \frac{3x-8}{x^2+x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{19}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{19}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

Integral Definida

La integral definida surge del problema del cálculo de áreas limitadas por curvas.



Partición de un intervalo

Llamamos partición de un intervalo $[a, b]$ a un conjunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de tal forma que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ (la partición divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$

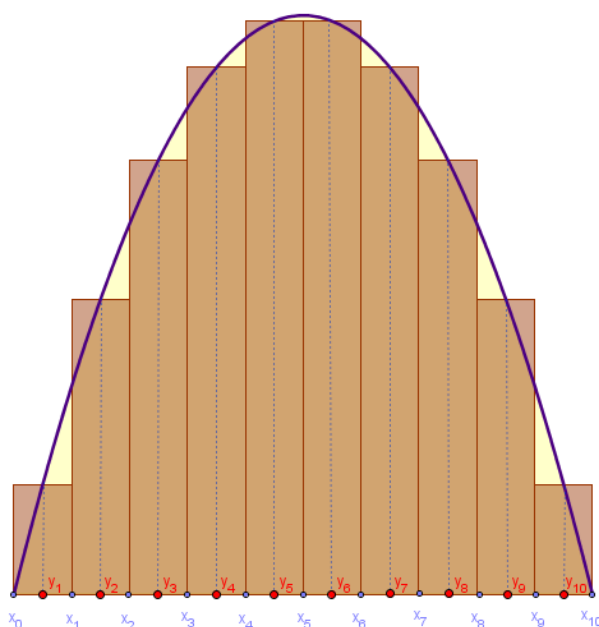
Definiremos el diámetro o norma de la partición $|P|$ como $|P| = \max \{x_k - x_{k-1}; k = 1, \dots, n\}$

Suma de Riemann

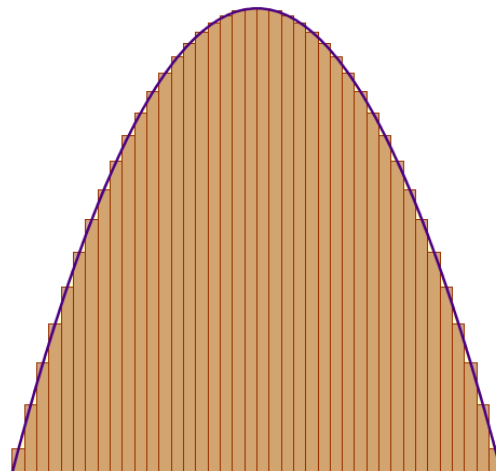
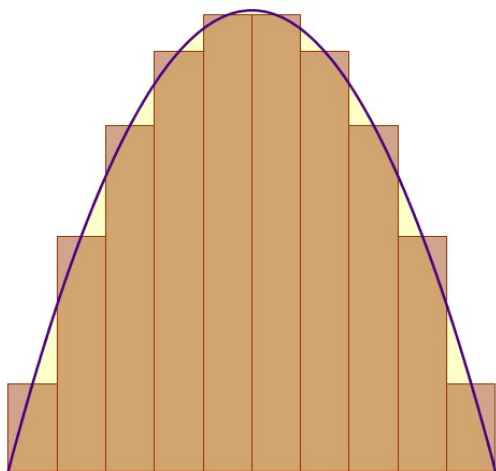
Se llama suma de Riemann de la función f relativa a la partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y a los

puntos intermedios $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$; $k = 1, \dots, n$ al número: $\sum_{k=1}^n f(y_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$

Gráficamente este número representa la suma de las áreas de los rectángulos, de base $(x_k - x_{k-1})$ y altura $f(y_k)$



Podemos observar que la suma de Riemann es una aproximación al área delimitada por el eje OX y la gráfica de la función f . Intuitivamente, esta aproximación será mejor si añadimos más puntos a la partición de tal manera que su diámetro sea más pequeño.



Sumas superior e inferior

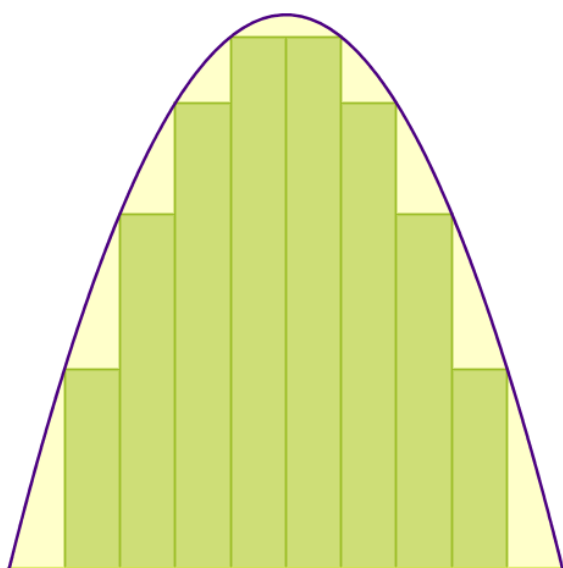
Si f es una función acotada en $[a,b]$, se define la **suma inferior** de f relativa a la partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ como

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad \text{donde } m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}$$

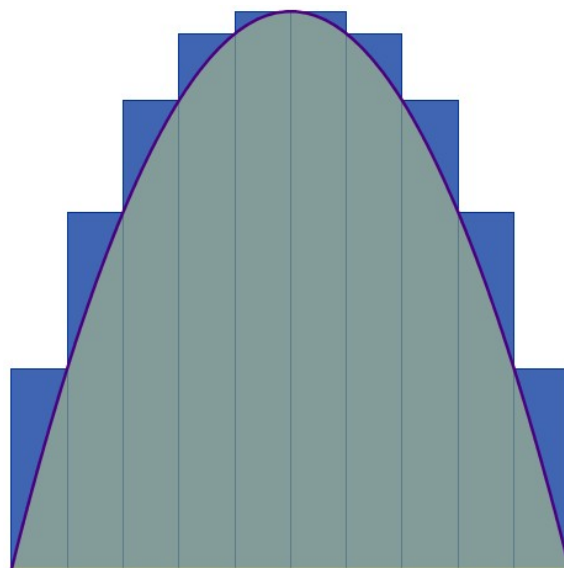
De manera similar se define la **suma superior**

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad \text{donde } M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}$$

Gráficamente:



Suma inferior



Suma superior

Como podemos ver, para cualquier partición P , se verifica:

$$L(f, P) \leq \text{Área} \leq U(f, P)$$

Definición de integral definida

Diremos que la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$ si se cumple

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} L(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} U(f, P)$$

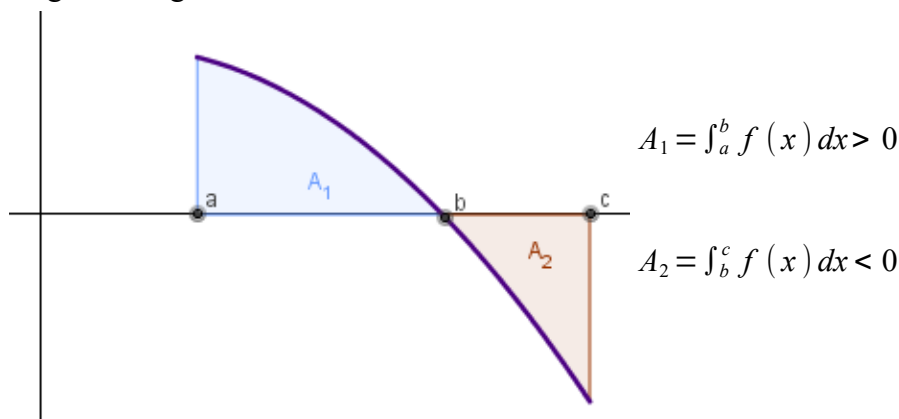
para cualquier sucesión de particiones, P , tal que $|P| \rightarrow 0$

Si f es integrable en $[a, b]$ entonces cualquier suma de Riemann tendrá el mismo límite que $L(f, P)$ y $U(f, P)$. Además, si f es positiva, ese límite coincidirá con el valor del área de la región limitada por la gráfica de la función en el intervalo $[a, b]$ y el eje OX . Este valor se conoce como integral definida y se representa como $\int_a^b f(x) dx$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} L(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} U(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(y_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Observación:

Hay que tener en cuenta que la integral definida, a diferencia del área, tiene signo. Cuando la gráfica esté por encima del eje OX , la integral será positiva, mientras que si está por debajo, la integral es negativa.



Funciones integrables

- Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es integrable.
- Si f es continua en (a, b) y existen y son finitos los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ entonces f es integrable en (a, b) .
Este resultado sirve para justificar la integrabilidad en funciones definidas a trozos (siempre que no tengan asíntotas verticales)
- La función de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$ no es integrable en ningún intervalo

- La función $\frac{1}{x}$ no es integrable en $(0,1)$

Propiedades de la integral definida

Sean f y g una funciones integrables en el intervalo $[a,b]$

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$
2. $\int_a^b k dx = k \cdot (b-a); \quad k \in \mathbb{R}$
3. $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$
4. $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
5. $\int_a^b (k \cdot f)(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx; \quad k \in \mathbb{R}$
6. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx; \quad c \in (a, b)$
7. $\left\{ f(x) \leq 0; \quad \forall x \in [a, b] \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0$
8. $\left\{ f(x) \leq g(x); \quad \forall x \in [a, b] \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Integral y derivada

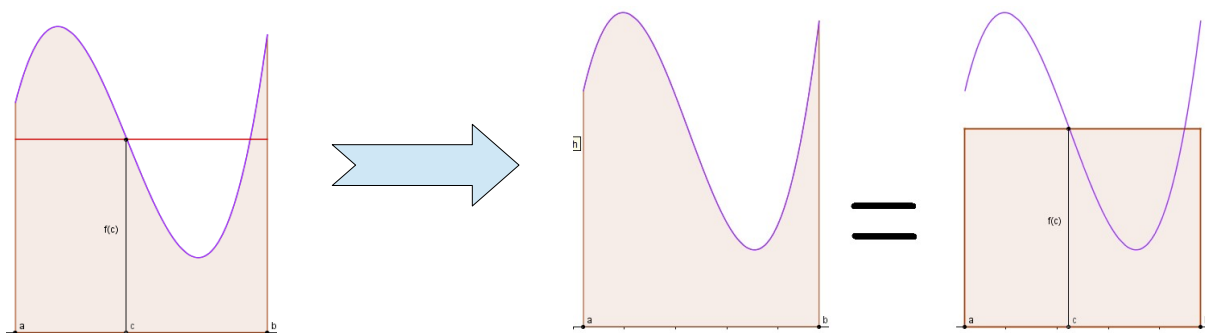
Teorema del valor medio del cálculo integral

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que

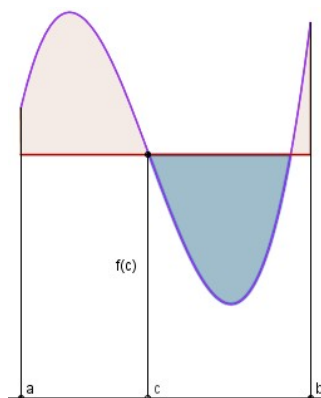
$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Interpretación geométrica

Existe algún valor $c \in [a, b]$ tal que el área del rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f(c)$ coincide con el área bajo la curva de la función f en el intervalo $[a, b]$



Una interpretación alternativa consiste en decir que existe un valor $c \in [a, b]$ tal que si calculamos el área de la región limitada por la gráfica de f y por la recta $y = f(c)$ en el intervalo $[a, b]$, obtenemos que el área situada por encima de la recta es igual al área de la región situada por debajo de esta.



Teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f(y) dy$$

es derivable y además

$$F'(x) = f(x)$$

Regla de Barrow

Si f es una función continua en $[a, b]$ y G es una función primitiva de f , es decir $G'(x) = f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$