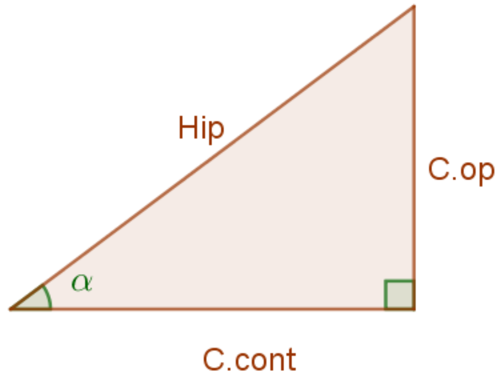
Índice

Definición de las razones trigonométricas

Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

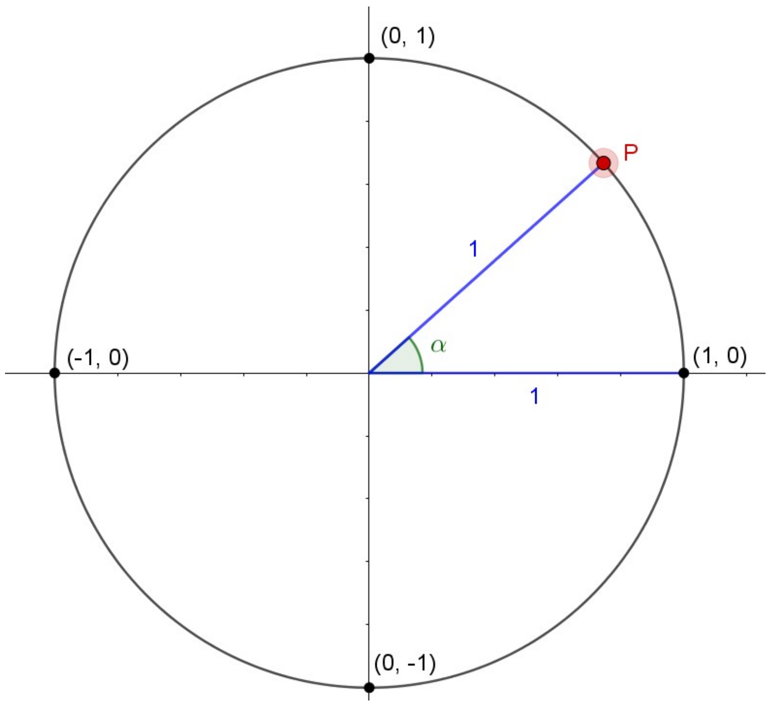


$$sen\,\alpha=\frac{C.op}{Hip}\quad \cos\alpha=\frac{C.cont}{Hip}\quad \tan\alpha=\frac{C.op}{C.cont}$$

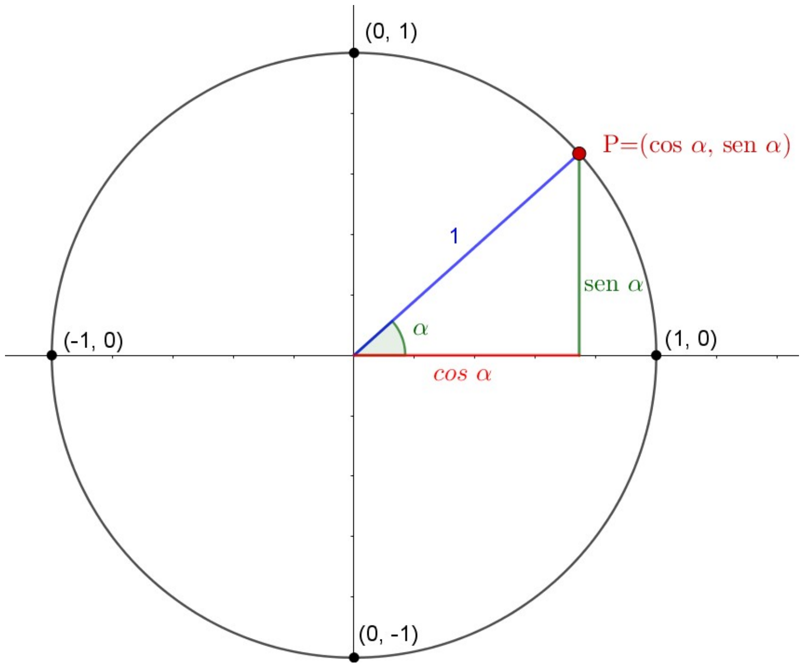
El **problema** es que esta definición solo es válida para **ángulos menores de 90º**

Razones trigonométricas en la circunferencia

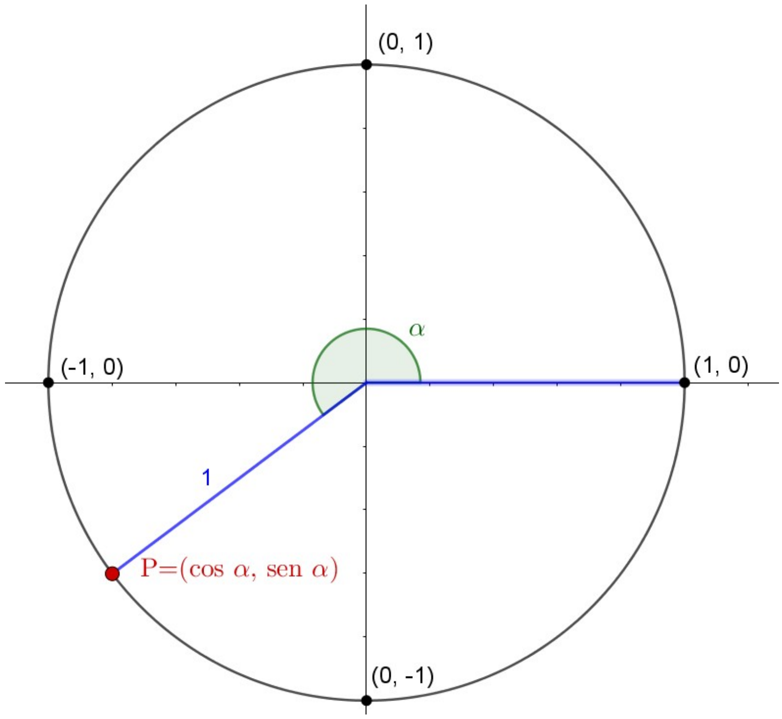
El objetivo es definir las razones trigonométricas para ángulos mayores de 90º. Para ello consideramos una circunferencia con centro en el punto (0,0) y **radio 1**.



Si nos fijamos en los ángulos con vértice en el (0,0) y que parten del semieje positivo x, entonces **podemos asociar cada ángulo entre 0º y 360º con un punto de la circunferencia.**

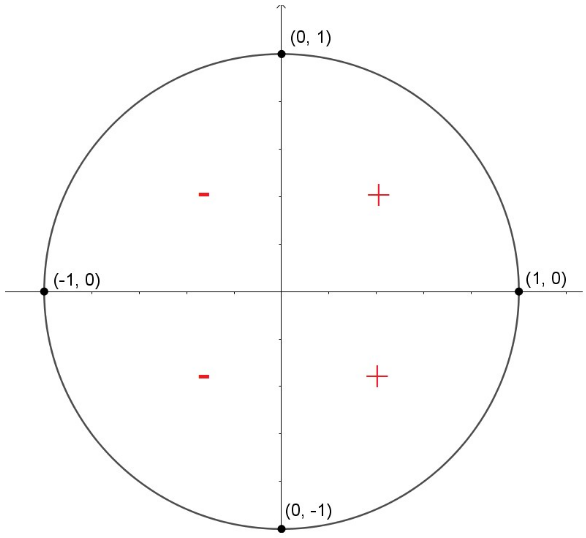


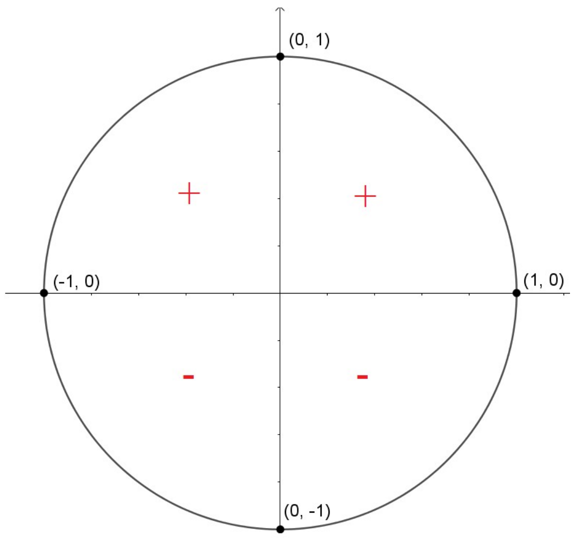
Si el ángulo que representamos está en el primer cuadrante (entre 0º y 90º), podemos comprobar que las **coordenadas cartesianas del punto P coinciden con las razones trigonométricas del ángulo**, es decir, $P=(\cos\alpha\,, sen\,\alpha)$ (para comprobar esto, hay que tener en cuenta que la hipotenusa del triángulo de la figura coincide con el radio de la circunferencia y por tanto vale 1).



Podemos utilizar este hecho para definir las razones trigonométricas para aquellos ángulos que son mayores de 90º. Por lo tanto, definimos $\cos\alpha$ y $sen\,\alpha$ como las coordenada cartesianas del punto de la circunferencia que se corresponde con el ángulo α

A partir de aquí, cabe observar que el seno y el coseno ya no van a tomar siempre valores positivos, sino que su signo dependerá del cuadrante en el que se ubique el ángulo.





$\cos\alpha$ $\qquad\qquad$ $sen\,\alpha$

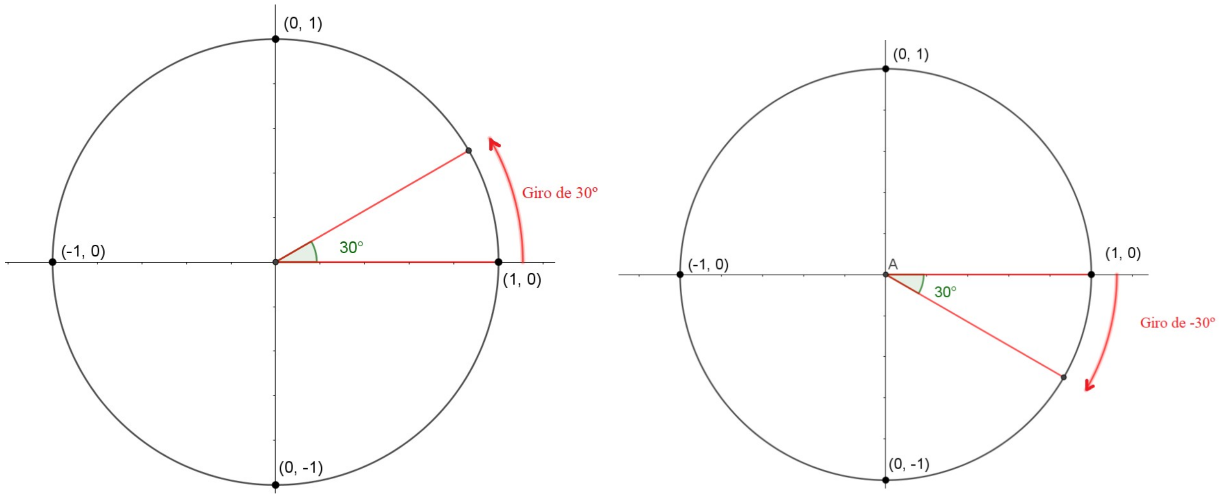
A partir del seno y coseno se pueden definir las restantes razones trigonométricas de un ángulo.

- $\tan\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$ (tangente)
- $cotan\,\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}$ (cotangente)
- $sec\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ (secante)
- $cosec\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha}$ (cosecante)

Razones trigonométricas para cualquier ángulo

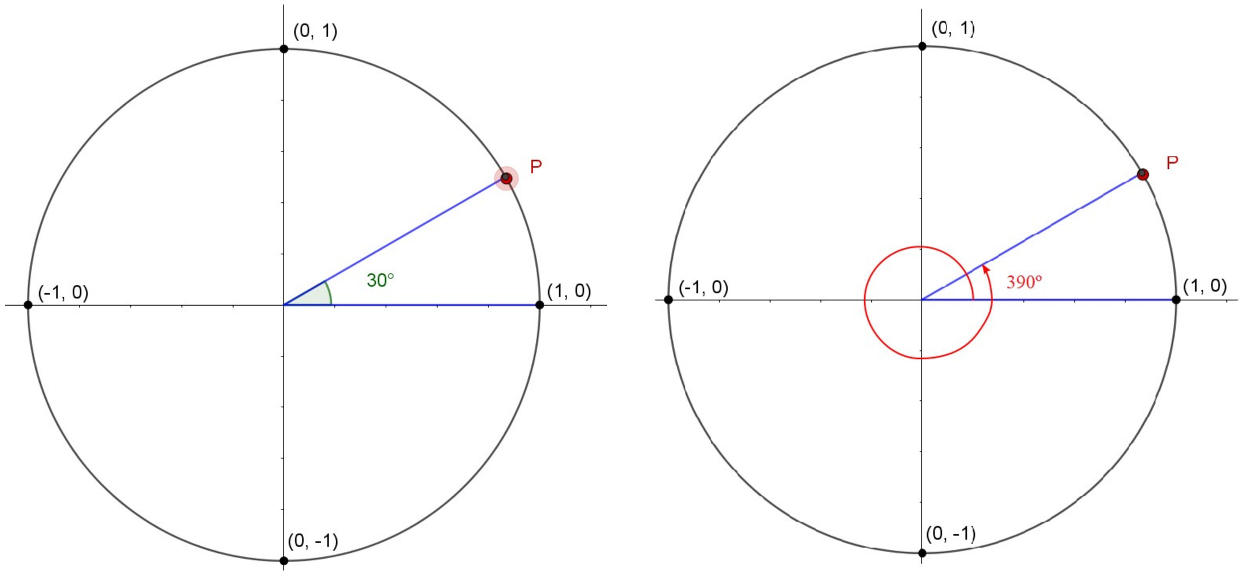
En el apartado anterior utilizamos una circunferencia de radio 1 para definir las razones trigonométricas para ángulos entre 0º y 360º (o entre 0 radianes y 2π radianes). Ahora veremos como definir el seno y el coseno para valores negativos y para valores mayores de 360º

Para esto, lo más sencillo es **identificar ángulos con giros** cuyo origen es el semieje positivo X



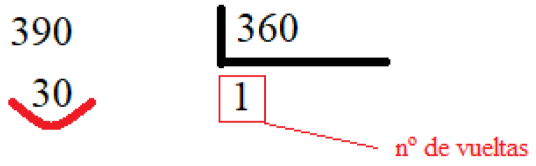
El la figura podemos ver el giro asociado a un ángulo de 30º, hay que fijarse que el giro se realiza en sentido antihorario (contrario a las agujas del reloj). Si realizamos el giro en sentido horario, estos se corresponden con ángulos de valor negativo.

Si nos fijamos en la posición final del giro, podemos observar que todo ángulo tiene un equivalente entre 0º y 360º

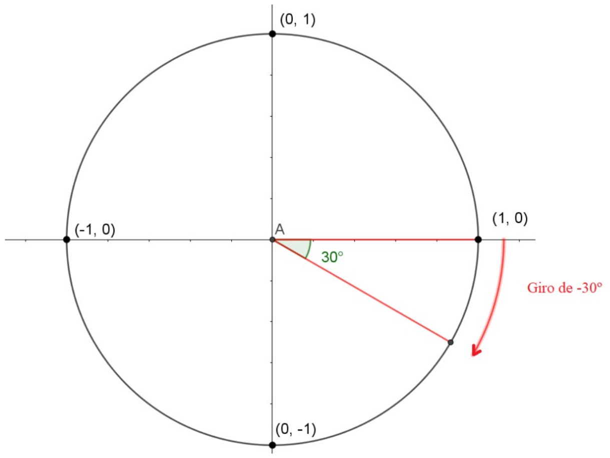


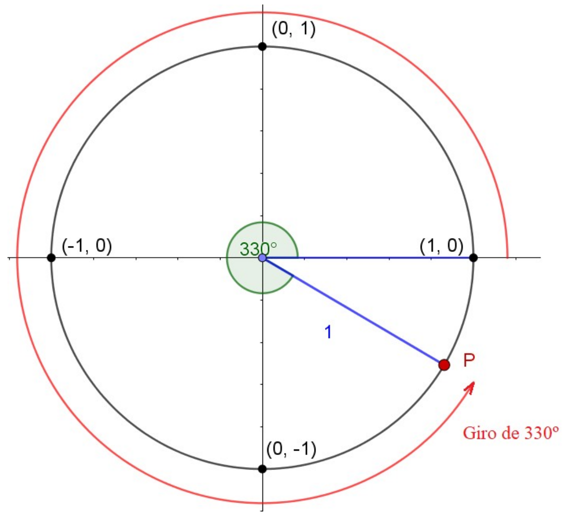
En la figura podemos observar que los ángulos de 390º y de 30º son equivalentes, dado que ambos giros colocan el punto P en el mismo lugar, por lo tanto $\cos 390^o = \cos 30^o$ y $sen 390^o = sen 30^o$

Para obtener el ángulo equivalente, tan solo tendremos que calcular el resto de dividir nuestro ángulo entre 360º:



Para ángulos negativos:





En la figura se puede ver la equivalencia entre los ángulos de -30º y 330º. Nótese que $330=-30+360$

Para otros ángulos negativos se combinan los dos razonamientos, por ejemplo, el ángulo de -1320º es equivalente a 120º

$-1360^{o} \equiv -240 \equiv \mathbf{120^{o}}$ (-240+360=120)

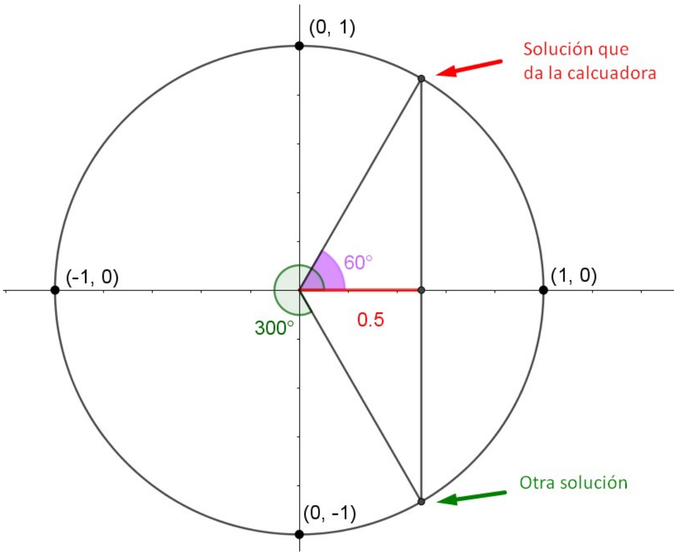
Inversas de las razones trigonométricas

El problema consiste en calcular el ángulo a partir de alguna de sus razones trigonométricas, por ejemplo, si $\mathbf{\cos\alpha=0.5}$, ¿cuánto vale α ?

El año pasado vimos que podíamos resolver este problema utilizando la función arco-coseno de la calculadora ($\cos^{-1}$), la cual nos da el resultado 60º.

Este resultado es correcto si trabajamos con ángulos agudos (trigonometría del triángulo), pero si consideramos que un ángulo puede tomar cualquier valor real, entonces la solución es incompleta, ya que existen varios ángulos con el mismo coseno.

En la figura podemos ver que $\mathbf{\cos 60^{o}=0.5}$, pero también $\mathbf{\cos 300^{o}=0.5}$



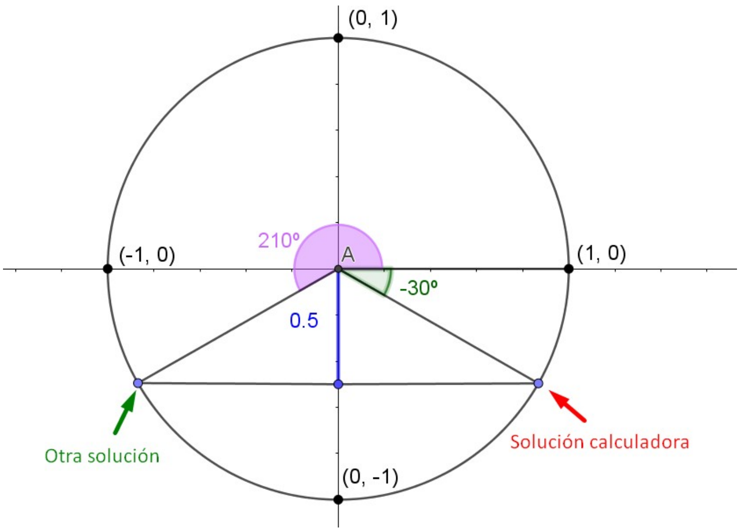
Además de 60º y 300º existen otros ángulos equivalentes a ellos, y por tanto con el mismo coseno. Esos ángulos se obtienen sumando (o restando) 360º un número arbitrario de veces.

Así pues:

$$\cos\alpha = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 60^o + k \cdot 360^o \\ \alpha = 300^o + k \cdot 360^o \end{cases} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

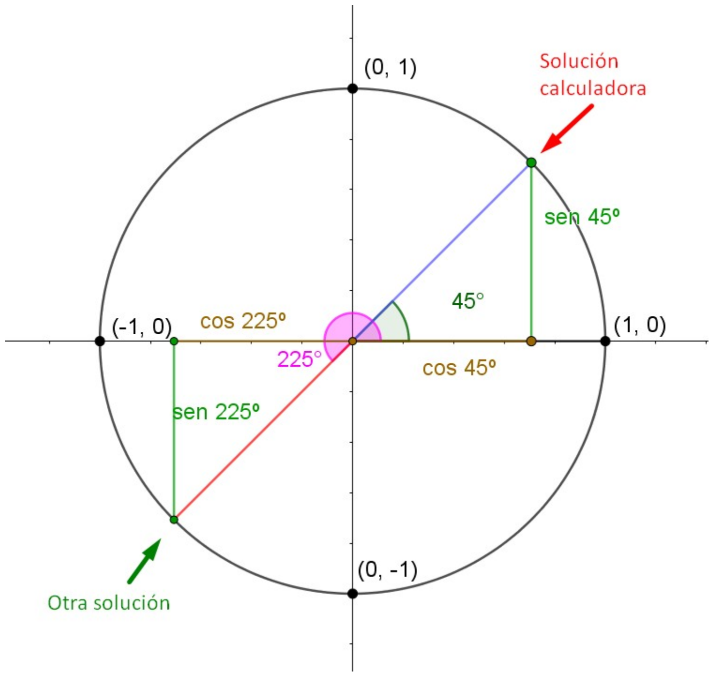
con lo cual tenemos todos los posibles valores de α.

Para las otras razones trigonométricas podemos calcular el ángulo correspondiente, utilizando un razonamiento análogo (interpretación gráfica en la circunferencia). Por ejemplo, si $\boldsymbol{sen\,\alpha = -0.5}$



$$sen\,\alpha = -0.5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -30^o + k \cdot 360^o \\ \alpha = 210^o + k \cdot 360^o \end{cases} \; ; \; k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 330^o + k \cdot 360^o \\ \alpha = 210^o + k \cdot 360^o \end{cases} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

Consideremos ahora un ángulo que cumpla $\tan\alpha = 1$, la calculadora nos devolverá la solución $\alpha = 45^o$, no obstante:

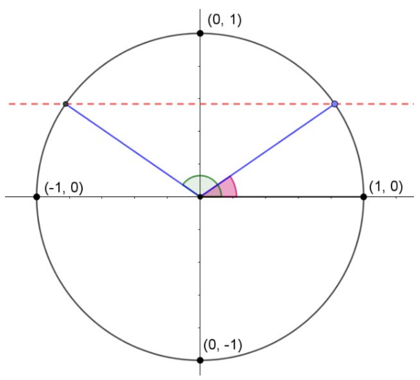


Como los triángulos son semejantes $\frac{sen\,45^o}{\cos 45^o}=\frac{sen\,225^o}{\cos 225^o}$, por lo que tienen la misma tangente.

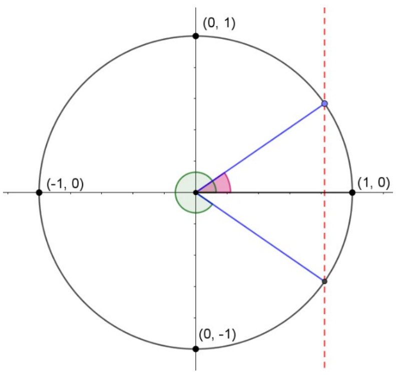
Así pues:

$$\tan\alpha=1 \iff \begin{cases}\alpha=45^o+k\cdot 360^o\\ \alpha=225^o+k\cdot 360^o\end{cases} ;k\in\mathbb{Z} \iff \alpha=45^o+k\cdot 180^o \;\; ;k\in\mathbb{Z}$$

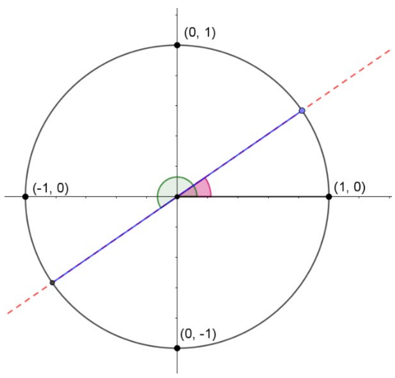
En resumen, para obtener otras soluciones, diferentes de las que nos da la calculadora:



Mismo seno



Mismo coseno



Misma tangente

Relación entre razones trigonométricas

$$\boxed{\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1}$$

Esta relación se debe simplemente, a la definición de seno y coseno en la circunferencia, los cuales coinciden con las coordenadas del punto de la circunferencia correspondiente al ángulo. Si tenemos en cuenta que la circunferencia está centrada en (0,0) y tiene radio 1, entonces

$$d(centro, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x^2 + y^2 = 1}$$

Si dividimos la fórmula anterior entre $\cos^2\alpha$ obtenemos:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{1 + \tan^2\alpha = sec^2\alpha}$$

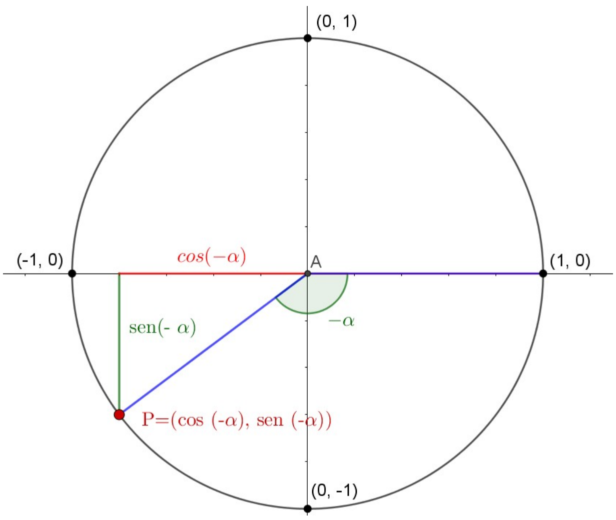
Y si la dividimos entre $sen^2\alpha$ obtenemos:

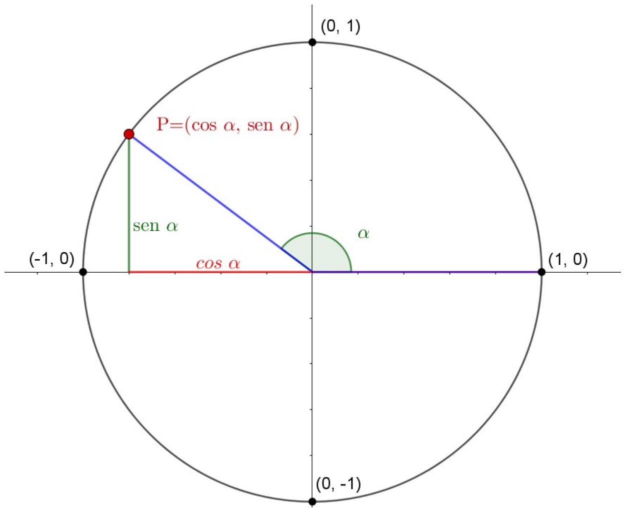
$$\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{(cotan^2\alpha) + 1 = cosec^2\alpha}$$

Simetría de las razones trigonométricas

Las funciones trigonométricas cumplen las siguientes propiedades

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ sen(-\alpha) = -sen(\alpha)\end{array}}$$

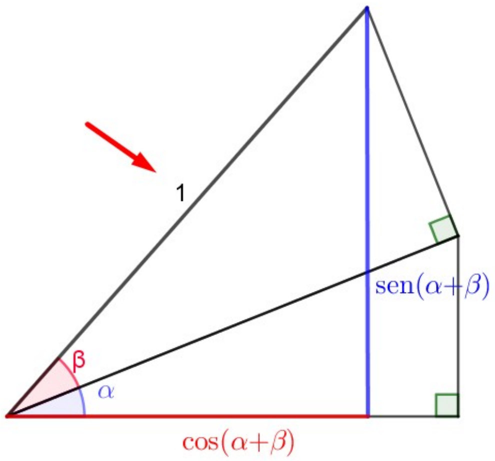




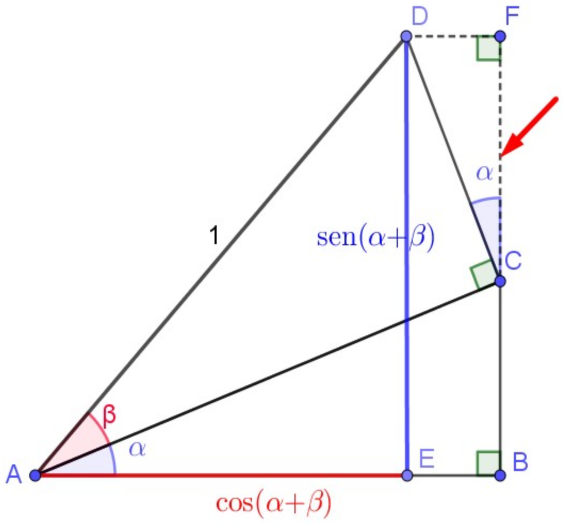
A partir de estas propiedades, podemos estudiar la simetría de las restantes razones trigonométricas, por ejemplo:

$$\tan(-\alpha) = \frac{sen(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha)$$

Suma y diferencia de ángulos

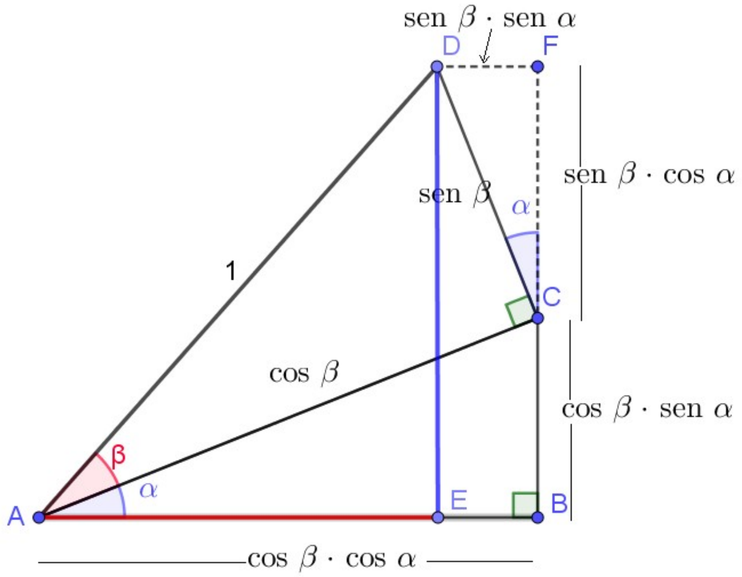


En esta figura podemos ilustrar las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos y su relación con las razones de cada uno de los ángulos. Para ello utilizamos el siguiente triángulo:



Ahora podemos ver que $sen(\alpha+\beta)=\overline{CB}+\overline{CF}$ y $sen(\alpha+\beta)=\overline{CB}+\overline{CF}$

Utilizando trigonometría en cada triángulo rectángulo vemos que



$\overline{AC}=\cos\beta$

$\overline{CD}=sen\,\beta$

$\overline{AB}=\cos\beta\cdot\cos\alpha$

$\overline{BC}=\cos\beta\cdot sen\,\alpha$

$\overline{CF}=sen\,\beta\cdot\cos\alpha$

$\overline{DF}=sen\,\beta\cdot sen\,\alpha$

Con lo que finalmente, obtenemos las expresiones:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$
$$sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

Para la **tangente**:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\cos\alpha\cdot sen\,\beta+sen\,\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\,\alpha\cdot sen\,\beta}=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cdot sen\,\beta+sen\,\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\,\alpha\cdot sen\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Para la resta tan solo tenemos que tener en cuenta que $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$, $sen(-\alpha)=-sen(\alpha)$ y $\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$. Con lo cual:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta)-sen(\alpha)\cdot sen(-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

$$sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha+(-\beta))=sen(\alpha)\cdot\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\cdot sen(-\beta)=sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\alpha+(-\beta))=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan(\beta)}{1+\tan\alpha\cdot\tan(\beta)}$$

Podemos observar que las fórmulas para la resta de ángulos son similares a las de la suma (solo hay que cambiar los signos ‘+’ por ‘-’).

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$
$$sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$
$$sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Ángulo doble y mitad

Según las fórmulas de la suma de ángulos, y teniendo en cuenta que $2\alpha=\alpha+\alpha$:

$$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-sen(\alpha)\cdot sen(\alpha)=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$$

$$sen(2\alpha)=sen(\alpha+\alpha)=sen(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\cos(\alpha)\cdot sen(\alpha)=2\cdot sen(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha)=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Si llamamos $A=\frac{\alpha}{2}$

$$\cos\alpha=\cos(2A)=\cos^2A-sen^2A=1-sen^2A-sen^2A=1-2\,sen^2A\Leftrightarrow 2\,sen^2A=1-\cos\alpha$$

despejando tenemos

$sen\frac{\alpha}{2}=sen\,A=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ (el signo depende del cuadrante en el que se encuentre $\frac{\alpha}{2}$)

Análogamente

$$\cos\alpha=\cos(2A)=\cos^2A-sen^2A=\cos^2A-(1-\cos^2A)-\Leftrightarrow 2\cos^2A=1+\cos\alpha$$

con lo que

$$\cos\frac{\alpha}{2}=sen\,A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

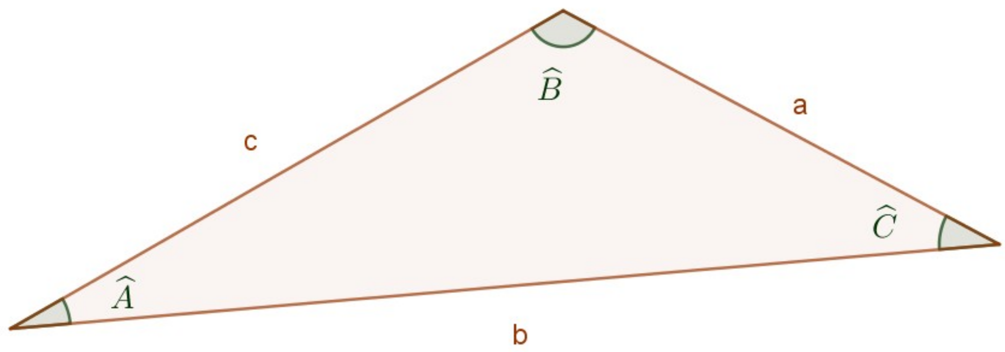
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$sen(2\alpha)=2\cdot sen(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$sen\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Teoremas del seno y del coseno

En un triángulo cualquiera (no hace falta que sea rectángulo)



Teorema del seno

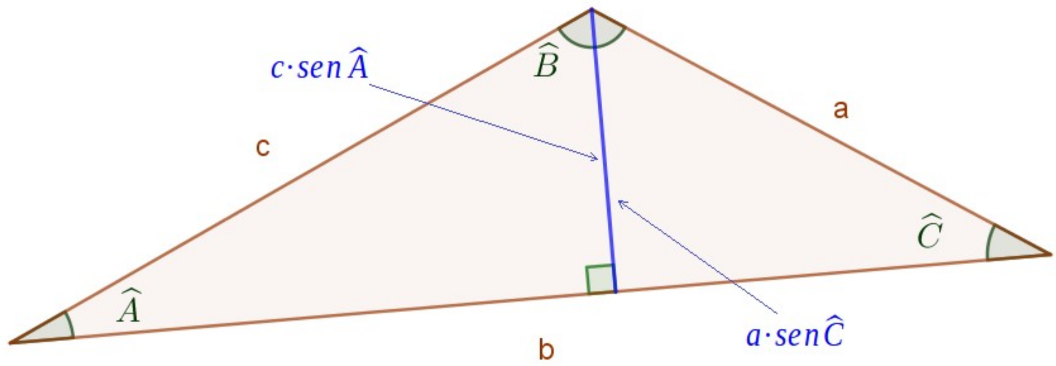
$$\frac{sen\hat{A}}{a}=\frac{sen\hat{B}}{b}=\frac{sen\hat{C}}{c}$$

Teorema del coseno

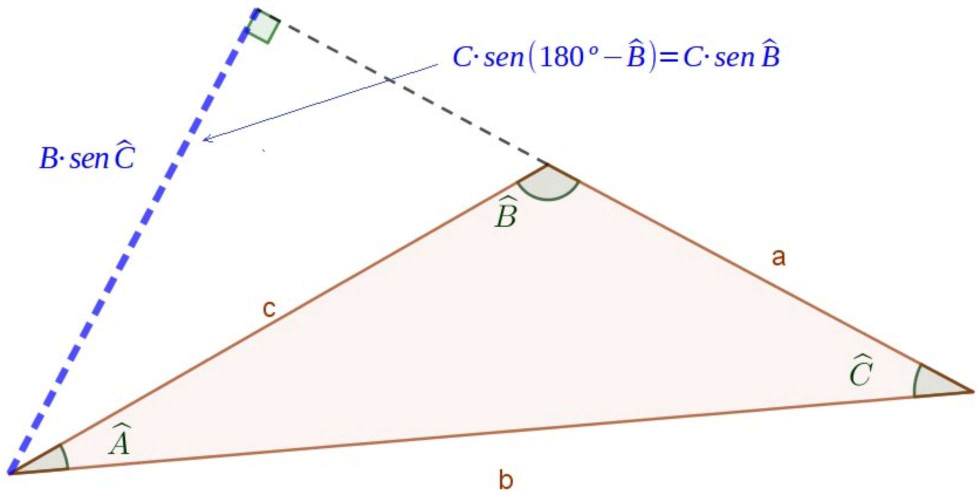
$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\hat{B}$$
$$c^2=b^2+a^2-2\cdot b\cdot a\cdot\cos\hat{C}$$

(nótese que en realidad es la misma expresión pero intercambiando las letras)

Los teoremas del seno y coseno, en realidad, son las extensiones para un triángulo cualquiera de las fórmulas que conocíamos para triángulos rectángulos. De hecho, su demostración se basa en la construcción de triángulos rectángulos.

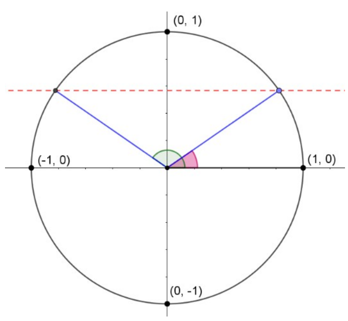


Si trazamos la altura sobre el lado b, obtenemos dos triángulos rectángulos. Si utilizamos las razones trigonométricas en cada uno de ellos podemos expresar la altura bien como $c \cdot sen\,\hat{A}$ o bien como $a \cdot sen\,\hat{C}$, con lo que $c \cdot sen\,\hat{A} = a \cdot sen\,\hat{C} \Leftrightarrow \frac{c}{sen\,\hat{C}} = \frac{a}{sen\,\hat{A}}$

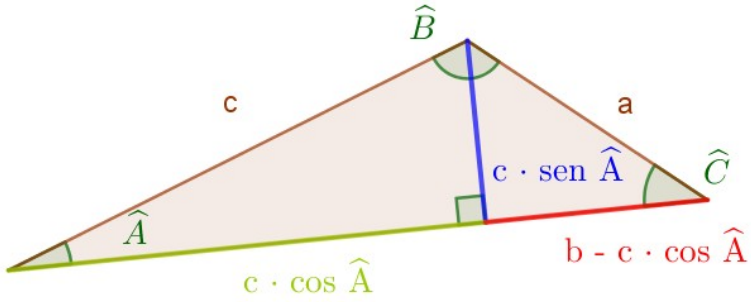


Si trazamos la altura sobre a, también obtenemos dos triángulos rectángulos y podemos razonar que $c \cdot sen\,\hat{B} = b \cdot sen\,\hat{C} \Leftrightarrow \frac{c}{sen\,\hat{C}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$

Nota: en la circunferencia es fácil comprobar que s $en(180^o - \hat{C}) = sen\,\hat{C}$



Para el teorema del coseno la idea es similar, trazamos la altura y utilizamos las razones trigonométricas del triángulo de la izquierda:



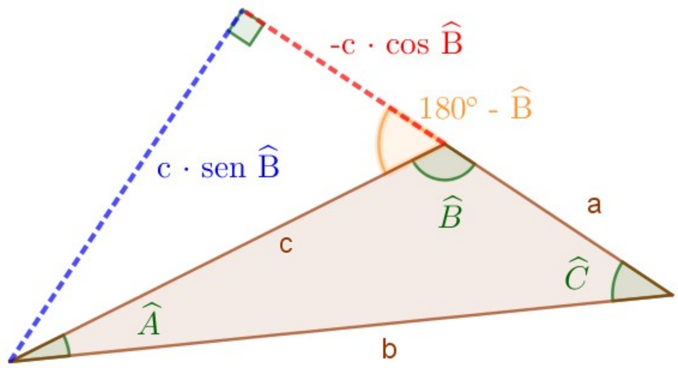
A continuación utilizamos el teorema de Pitágoras en el triángulo de la derecha

$$a^2=(c\cdot sen\,\widehat{A})^2+(b-c\cdot\cos\widehat{A})^2$$

$$a^2=c^2\cdot sen^2\widehat{A}+b^2+c^2\cdot\cos^2\widehat{A}-2\cdot b\cdot c\cdot cos\,\widehat{A}=b^2+c^2\cdot(sen^2\widehat{A}+\cos^2\widehat{A})-2\cdot b\cdot c\cdot cos\,\widehat{A}$$

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot cos\,\widehat{A}$$

Si el ángulo es obtuso, la construcción es similar



(razonando en la circunferencia, es fácil ver que $sen(180^o-\widehat{B})=sen\,\widehat{B}$ y $\cos(180^o-\widehat{B})=-\cos\widehat{B}$)

Por Pitágoras:

$$b^2=(c\cdot sen\,\widehat{B})^2+(a-c\cdot cos\,\widehat{B})^2$$

$$b^2=c^2\cdot sen^2\widehat{B}+a^2+c^2\cdot\cos^2\widehat{B}-2\cdot a\cdot c\cdot cos\,\widehat{B}=c^2\cdot(sen^2\widehat{B}+\cos^2\widehat{B})+a^2-2\cdot a\cdot c\cdot cos\,\widehat{B}$$

$$b^2=c^2+a^2-2\cdot a\cdot c\cdot cos\,\widehat{B}$$

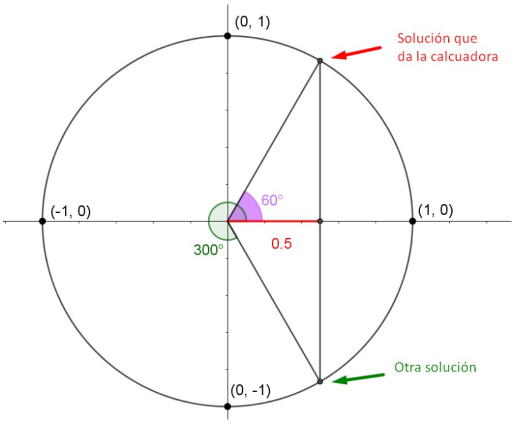
Ecuaciones trigonométricas

Caso sencillo (razón igual a un número)

Consideremos la ecuación $\cos\alpha=0.5$. Las soluciones de esta ecuación serán los ángulos que cumplen la igualdad.

Si utilizamos la calculadora (shift cos 0.5 =) obtenemos la primera solución: $\alpha=60^o$

Para obtener el resto de soluciones representamos el problema geométricamente en la circunferencia:



Con lo que obtenemos otra solución, $\alpha=300^o$ (haciendo 360º – 60º)

Finalmente, recordamos que si a un ángulo le sumamos (o restamos) 360º, obtenemos un ángulo equivalente (dado que añadimos una vuelta completa a la circunferencia). Con lo que ya podemos describir el conjunto de soluciones de la ecuación.

$$\cos\alpha=0.5\Rightarrow\begin{cases}\alpha=60^o+k\cdot 360^o\\ \alpha=300^o+k\cdot 360^o\end{cases};k\in\mathbb{Z}$$

Ecuaciones que podemos resolver mediante cambio de variable

$$2sen^2\alpha+3\cdot sen\alpha+1=0$$

Si hacemos el cambio de variable $x=sen\alpha$ entonces la ecuación anterior queda

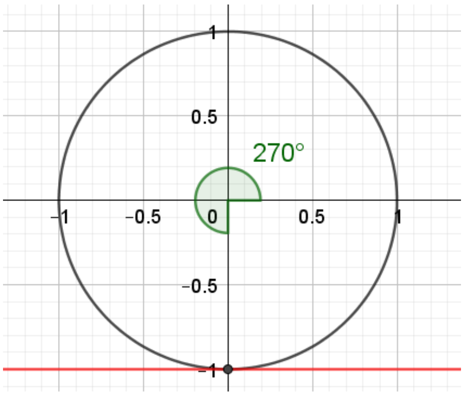
$$2x^2+3x+1=0$$

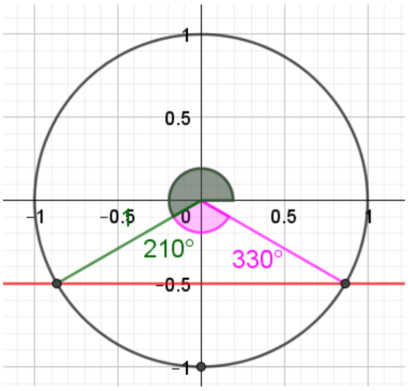
la cual resolvemos con la fórmula de la ecuación de segundo grado obteniendo dos soluciones: $x=-1$ y $x=\frac{-1}{2}$.

Deshaciendo el cambio de variable, tenemos dos posibilidades, $sen\alpha=-1$ y $sen\alpha=\frac{-1}{2}$, las cuales resolvemos como en el caso anterior:

$$sen\alpha=-1\Leftrightarrow\alpha=270^o+k\cdot 360^o\quad;k\in\mathbb{Z}$$

$$sen\alpha=\frac{-1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=330^o+k\cdot 360^o\\ \alpha=210^o+k\cdot 360^o\end{cases};k\in\mathbb{Z}$$





En resumen:

$$2\,sen^2\alpha+3\cdot sen\,\alpha+1=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=270^o+k\cdot 360^o\\ \alpha=330^o+k\cdot 360^o\\ \alpha=210^o+k\cdot 360^o\end{cases}\;;k\in\mathbb{Z}$$

Ecuaciones que se resuelven factorizando

$$\cos\alpha+2\cos\alpha\cdot sen\,\alpha=0$$

Sacando $\cos\alpha$ como factor común, tenemos:

$$\cos\alpha\cdot(1+2\,sen\,\alpha)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=0\\ 1+2\,sen\,\alpha=0\Rightarrow sen\,\alpha=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

y tenemos la ecuación descompuesta en dos más sencillas. Las soluciones serán:

$$\cos\alpha+2\cos\alpha\cdot sen\,\alpha=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=90^o+k\cdot 360^o\\ \alpha=270^o+k\cdot 360^o\\ \alpha=210^o+k\cdot 360^o\\ \alpha=330^o+k\cdot 360^o\end{cases}\;;k\in\mathbb{Z}$$

Ecuaciones con distintas razones trigonométricas

En este tipo de ecuaciones, una estrategia habitual es utilizar las relaciones existentes entre razones trigonométricas para que aparezca solo una en la ecuación (y a partir de ahí hacer cambio de variable)

Ejemplo 1

$$sen\,\alpha+2\cos^2\alpha=1$$

Como $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, podemos sustituir en la ecuación obteniendo:

$$sen\,\alpha+2\cdot(1-sen^2\alpha)=1\;\Leftrightarrow\;-2\,sen^2\alpha+sen\,\alpha+1=0\;\Rightarrow\begin{cases}sen\,\alpha=1\\ sen\,\alpha=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

con lo que las soluciones son:

$$sen\,\alpha + 2\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 90^o + k\cdot 360^o \\ \alpha = 210^o + k\cdot 360^o \\ \alpha = 330^o + k\cdot 360^o \end{cases} ;k\in\mathbb{Z}$$

<u>Ejemplo 2</u>

$$\cos\alpha = 2\,sen\,\alpha$$

Teniendo en cuenta que $\tan\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$, la ecuación queda:

$$\cos\alpha = 2\,sen\,\alpha \;\Leftrightarrow\; 1 = 2\tan\alpha \;\Leftrightarrow\; \tan\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 26^o 33' 54'' + k\cdot 360^o \\ \alpha = 206^o 33' 54'' + k\cdot 360^o \end{cases} \; k\in\mathbb{Z}$$

Ecuaciones con ángulo doble o mitad

En este caso habrá que usar la fórmula correspondiente para que aparezca el mismo ángulo en toda la ecuación.

Ejemplo:

$$sen(2\alpha) + 2\cos^2(\alpha/2) = 1$$

Aplicamos fórmulas de ángulo doble y ángulo mitad

$$2\cdot sen\,\alpha\cdot\cos\alpha + 2\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right)^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; 2\cdot sen\,\alpha\cdot\cos\alpha + 1 + \cos\alpha = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$4 \;\Leftrightarrow\; 2\cdot sen\,\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; (2\cdot sen\,\alpha + 1)\cdot\cos\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2\cdot sen\,\alpha + 1 = 0 \\ \cos\alpha = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} sen\,\alpha = \frac{-1}{2} \\ \cos\alpha = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \alpha = 210^o + k\cdot 360^o \\ \alpha = 330^o + k\cdot 360^o \\ \alpha = 90^o + k\cdot 360^o \\ \alpha = 270^o + k\cdot 360^o \end{cases} ;k\in\mathbb{Z}$$