1. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-1}$

2. Enuncia el teorema de Bolzano. Razona que las gráficas de las funciones $f(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3$ y $g(x)=e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0

3. Demuestra que alguna de las raíces del polinomio $P(x)=x^4-8x-1$ es negativa. Demuestra también que $P(x)$ tiene también alguna raíz positiva.

4.
   a) Aplica el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x=x^2-1$ tiene soluciones positivas.
   b) ¿Tiene la ecuación $\cos x=x^2-1$ alguna solución negativa? Razona la respuesta.

5. Probar que la ecuación $x^3+3x^2-3=0$ tiene exactamente tres soluciones reales.

6. Dada la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=x^2e^{-x^2}$
   a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
   b) Halla, si existen, los máximos y mínimos de la función.
   c) Dibuja aproximadamente su gráfica.

7. (Asturias junio 2025) Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t)=2\cos(t+\pi/2)+10$, donde t ∈ [0, 4]. Se pide:

   (a) (1 punto) Calcular los máximos y mínimos de la función.

   (b) (0.75 puntos) Demostrar que el depósito no se vacía nunca.

   (c) (0.75 puntos) Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

8.
   a) Calcula los valores de los parámetros $a, b\in\Re$ para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+a & si\ x\le 0 \\ x^2+be^x+3 & si\ x>0 \end{cases}$ sea continua y derivable en x=0
   b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x=0

9. Sea $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$
   a) Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa x=1/2 y que la recta tangente en el punto de abscisa x=0 tenga por ecuación $y=5-6x$
   b) Para a=3, b= -9 y c=8, calcula los extremos relativos de f.

10. Se sabe que la función F es derivable en todos los puntos, y que está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$ por la fórmula $F(x)=1+2x+Ax^2$ y en el intervalo $(0,+\infty)$ por la fórmula $F(x)=B+Ax$
    a) Encontrar los valores A y B que verifiquen las condiciones anteriores.
    b) Representar F

11. Dada la función $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-1}$ calcula los valores a, b, c sabiendo que $x=\dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que $y=5x-6$ es la recta tangente a su gráfica en el punto correspondiente a $x=1$
    Para los valores de a, b, c calculados, ¿posee f(x) más asíntotas?

12. Sea $f:(-\infty,1)\to\Re$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & si\ x\le 0 \\ a\sqrt{b-x} & si\ 0<x<1 \end{cases}$
    a) Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x=0

13. Dada la función $f(x)=2e^{-x}\cdot(x+1)$, calcula intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de f

14. Dada la función $f(x)=x\ln x-x$, se pide:

a) Determina el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Calcula la ecuación de dicha recta.

b) Determina el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela al eje OX. Calcula la ecuación de dicha recta.

15. Estudia si la recta r de ecuación $y=4x-2$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3+x^2-x+1$ en alguno de sus puntos.

16. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$

a) Calcula las asíntotas de f(x)

b) Calcula los extremos de f(x)

17. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide

a) Hallar las asíntotas de su gráfica

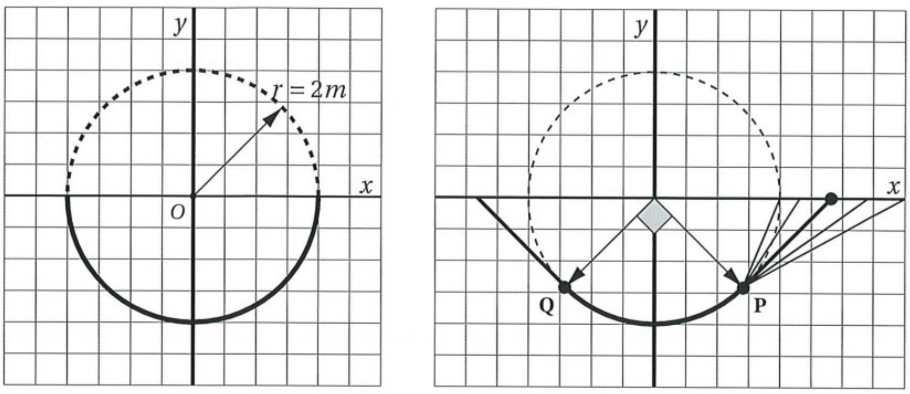
b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x=2

18. Determinar los valores de a y de b para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si\ x\le 0 \\ 2a+b\cdot sen\ x & si\ x>0 \end{cases}$ sea derivable.

19. Enuncia el teorema de Rolle. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x)=x^3+ax-1$ en el intervalo [0,1]. Para este valor de a, calcula un punto $c\in(0,1)$ en el que la recta tangente a la gráfica de f(x) sea paralela al eje OX.

20. Navarra Julio 2025

El ayuntamiento de Baigorri quiere modificar la estructura del skate park que obedece a la función negativa y = f(x) correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2= 4$, pasando este de ser un semicírculo de 2 metros de radio a tener la siguiente forma (simétrica respecto al eje OY):



(a) Calcula el punto P. (0,5 puntos)

(b) De entre todas las rectas que prolongan el arco de circunferencia QP y pasan por P, calcula la ecuación de aquella que permite que la trayectoria del skate no se vea alterada al pasar de la curva a la recta (no hay baches). (2 puntos)

21. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{sen\ x}{\frac{1}{2}+\cos x}$

a) Verifica que $f(0)=f(\pi)=0$

b) Comprueba que la ecuación $f'(x)=0$ no tiene ninguna solución en el intervalo

$(0, \pi)$

c) Explica por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle en este caso.

22. Dada la función

$f(x) = x\, e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

demuestra que existe un valor $\alpha \in (1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 2$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

23. Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. ¿Se puede aplicar, en el intervalo [0,1], este teorema a la función $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$? En caso afirmativo, calcula el punto al que hace referencia el teorema.

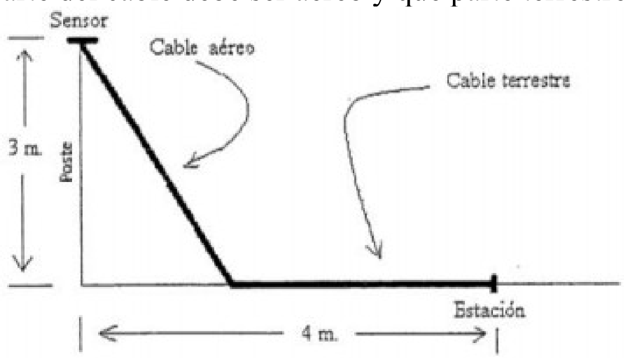
24. Dada la función $f(x) = \dfrac{\cos(x^3 + 2x^2 + 3x)}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$ demuestra que existe un valor $\alpha \in (-2,1)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

25.

a) Calcula el valor de a para que la función $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & si\ x \le 0 \\ x^2 + a\,x & si\ x > 0 \end{cases}$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$.

b) Considerando el valor de a obtenido en el apartado a), calcula el valor $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$ tal que $f'(c) = 0$.

26. Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge datos meteorológicos. Dichos datos deben transmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (ver figura). El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1000 €. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?



27. De entre todos los rectángulos de área 16 cm^2, determina las dimensiones del rectángulo que tiene la diagonal menor. Calcula la longitud de dicha diagonal.

28. Determinar, de entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, el que tiene área máxima.

29. Un rectángulo está inscrito en el triángulo que tiene los lados en las rectas de ecuaciones y = x, x + y = 8, y = 0, y tiene un lado sobre la recta y = 0. Encuentre sus vértices para que su superficie sea máxima

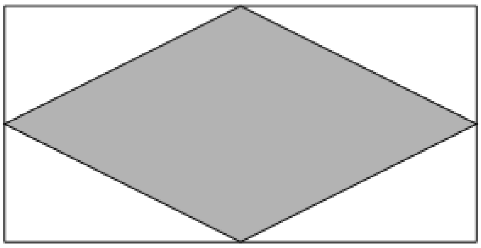
30. Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2 = 2x + 9$, siendo $-4{,}5 \le x \le 8$ e $y \ge 0$, estando situado el Sol en el punto (0,0). Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia del meteorito al Sol desde un punto P de su trayectoria cuya abscisa es x.

b) El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol.

c) Distancia mínima del meteorito al Sol.

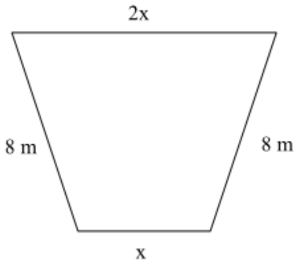
31. La figura siguiente muestra un rombo inscrito dentro de un rectángulo, de forma que los vértices del rombo se sitúan en los puntos medios de los lados del rectángulo. El perímetro del rectángulo es de 100 metros. Calcular las longitudes de sus lados para que el área del rombo inscrito sea máxima



32. Se divide un segmento de longitud 200 cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.
33. Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.
34. Un barco B y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13km y 5km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabiendo que puede nadar a 3 km/h y caminar a 5km/h, ¿a que distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B si quiere llegar lo antes posible?
35. Un agricultor hace un estudio para plantar árboles en una finca. Sabe que si planta 24 árboles la producción media de cada uno de ellos será de 600 frutos. Estima que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.
    a) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?
    b) ¿Cuál es esa producción?
36. Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices A=(0,20), B=(20,0), C=(80,0), D=(80,80) y E=(0,80). Para obtener una pieza rectángular se elige un punto P=(x,y) del segmento AB y se hacen dos cortes paralelos a los ejes X e Y. Así se obtiene un rectángulo R cuyos vértices son los puntos P=(x,y), F=(80,y), D=(80,80) y G=(x,80)
    Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
    a) El área del rectángulo R en función de x cuando $0 \leq x \leq 20$
    b) El valor de x para que el área del rectángulo R es máxima.
    c) El valor del área máxima del rectángulo R.
37. La fabricación de x tabletas gráficas supone un coste total dado por la función $C(x) = 1500x + 1000000$. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función $P(x) = 4000 - x$. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo?
38. Se quiere construír un recipiente cónico de generatriz 15 cm con la mayor capacidad posible. ¿Cuál debe ser el radio de la base?
39. Una ventana tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. De entre todas las ventanas de esta forma que tengan perímetro 10m. ¿Cuál es la que tiene área máxima?
40. Se desea construir una caja de base cuadrada con una capacidad de 80 cm3 . Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 € / cm2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo
41. Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm2 . Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el

volumen sea máximo

42. Se quiere construir un canal que tenga como sección un trapecio isósceles de manera que la anchura superior del canal sea el doble que la anchura inferior y que los lados no paralelos sean de 8 metros.



Calcula el valor de x para que el área de la sección sea máxima.

43. - Considere todos los prismas rectos de base cuadrada con un volumen V fijado. Sea x el lado de la base del prisma e y su altura.
   a) Encuentre la expresión del volumen y del área total del prisma en función de las variables x e y.
   b) Compruebe que el que tiene área total mínima es en realidad un cubo

44. Dentro de un triángulo rectángulo, de catetos 3 y 4 cm, se encuentra un rectángulo. Dos lados del rectángulo están situados en los catetos del triángulo y uno de los vértices del rectángulo está en la hipotenusa del triángulo.
   a) Haga un esbozo de la situación descrita
   b) Si x es la longitud del lado del rectángulo que está situado en el cateto pequeño e y es el otro lado del rectángulo, compruebe que se cumple que 4x + 3y = 12.
   c) Determine las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima

45. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(5x^2+2)\cdot(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-e^{\frac{x}{2}}}{sen\, x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\cdot e^{-x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}+1}{x\, e^x}$

f) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-4}}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{e^{x^2}}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 e^x}{\cos^2 x-1}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{sen\, x}\right)^2}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x\, sen\, x-x}{2x^2+x^4}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

m) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-\ln x}{x}$

o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-2x-e^x+sen\, 3x}{x^2}$

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

q) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

r) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n-7}-\sqrt{n})\cdot\sqrt{3n+5}$

s) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$

t) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\cdot e^{-x}$

46. Calcula el valor de m para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(1-mx)\cdot(2x+3)}{x^2+4}=6$

47. Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\cos x+b\, sen\, x}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

48. Calcula la relación que debe haber entre a y b para que la función

sea contínua en toda la recta real

49. Calcula los valores de b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} \ln(e+x^2) & si\ x<0 \\ x^2+bx+c & si\ x\geq 0 \end{cases}$ sea derivable en x=0

50.

a) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & si\ x\leq 1 \\ \dfrac{2\ln x+2}{x^2} & si\ x>1 \end{cases}$ sea derivable en x=1

b) Para los valores a=-4 y b=6 determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

51. Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, se pide:

a) Dominio de definición y cortes con los ejes.
b) Estudio de las asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos)
d) Representación gráfica aproximada.

52. Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2-x/4}{x^2}$

53. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=x^3-kx+10$ cumpla las hipóteses del teorema de Rolle en el intervalo [-2,0] y para ese valor determina un punto del intervalo en el que se anule a derivada de f(x)

54. Calcula el dominio y los intervalos de creciminto y decreciminto de la función $g(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

55. Calcula, si existen, los valores $a, b\in\Re$, para que sea derivable la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & si\ x<0 \\ x^2+ax+b & si\ x\geq 0 \end{cases}$

56. Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen(x^2)}$

57. ¿Podemos asegurar que la gráfica de la función $f(x)=3\mathrm{sen}(x/2)-\cos(x^2)$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $[0,\pi]$? Razona la respuesta.

58. Descompón el número 40 en dos sumandos tales que el producto del cubo de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. ¿Cuánto vale ese producto?

59. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que $y=ax^2+bx+1$ y $y=x^3+c$, tienen la misma recta tangente en el punto (1,2)

60.

a) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)=x^4-8x^2+1$. Calcula también el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo [-3,3].

b) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x)=ax^2+b\,x\ln x$ tenga un punto de inflexión en el punto (1,2). Para estos valores de a y b, calcula el dominio y los intervalos de concavidad y convexidad de f

61. Determina los valores de a para que la función $f:\Re\to\Re$ $f(x)=\begin{cases} a-x^2 & si\ x\leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si\ x>1 \end{cases}$ sea continua. ¿Es derivable en x=1 para algún valor de a?

62. Si c>2, calcula los valores de a, b, c para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ x<2 \\ x+1 & si\ x\geq 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,c]$

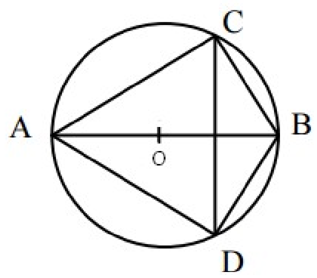
63. Calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

64.

a) ¿Tiene la ecuación $x^3+2x-2=0$ alguna solución en el intervalo (0,1)? ¿Tiene esta ecuación más de una solución real?

b) Calcula los valores de a y b para que $\lim_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen\,(x^2)}=1$

65. En una circunferencia de centro O y radio 10 cm se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC e BCD sea máxima?



66. Dada la función $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & si\ x<0 \\ x^2e^{-x} & si\ x\geq 0 \end{cases}$ se pide;

a) Calcula $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) Calcula el valor de a para que f sea continua en todo $\Re$

c) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible

67. Sea la función $f(x)=2\sqrt{x}$

a) Hallar su dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el punto de la gráfica de f(x) más cercano al punto (4,0)

68. Calcula

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{senx}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{x+1}$

69. Dada la función $f(x)=x^x-2^x+x-1$ demuestra que existen $\alpha,\beta\in(1,2)$ tales que $f(\alpha)=0$ y $f'(\beta)=3$. Di que teoremas utilizas.

70. Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demuestra que las curvas $y=\cos x$ e $y=\sqrt{x}$ se cortan en un único punto.

71. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x-x^2 & si\ \ 0\leq x\leq 1 \\ (x-1)\ln^2(x) & si\ \ 1<x\leq 2 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f(x) en x=1

b) Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa $x=\dfrac{3}{4}$

72. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} \right)$

b) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{sen\, x \cdot (1 - sen\, x)}{\cos^2 x}$

73. Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 m^3 de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que:

El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado

El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado

¿Qué dimensiones debe tener el depósito? ¿Cuál es el precio de dicho depósito?

74. En la empresa “MARKOAK” fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de 0,3m^2 . Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m. La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula:

a) Cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar lo mínimo posible.

b) A cuánto ascenderá la factura.

75.