

# Análisis - Parte I

<b>Límite de una función en un punto:</b>	<b>2</b>
Definición	2
<b>Límite de una función el en infinito</b>	<b>2</b>
Definición	2
<b>Función Continua en un punto</b>	<b>2</b>
Definición	2
Discontinuidades	3
<b>Teorema de Bolzano</b>	<b>4</b>
Interpretación Geométrica:	4
Teorema de los valores intermedios (teorema de Darboux)	4
Teorema de Weierstrass	4
<b>Derivada de una función en un punto</b>	<b>5</b>
Interpretación geométrica de la derivada	5
Continuidad de las funciones derivables	5
Operaciones con derivadas	6
Regla de la cadena	6
<b>Función derivada</b>	<b>6</b>
Definición	6
Tabla de derivadas	6
<b>Crecimiento</b>	<b>7</b>
Definición	7
Relación entre crecimiento y derivada	7
<b>Derivada segunda y concavidad</b>	<b>7</b>
Derivada segunda	7
Concavidad y convexidad	8
Puntos de inflexión	8
Relación entre derivada segunda y concavidad	8
<b>Máximos y mínimos relativos</b>	<b>9</b>
Definición	9
Relación entre extremos relativos y derivada	9
Búsqueda de extremos relativos	9
<b>Teorema de Rolle</b>	<b>10</b>
Demostración	10
Interpretación Geométrica	10
<b>Teorema del valor medio del cálculo diferencial</b>	<b>11</b>
Interpretación geométrica	11
<b>Regla de L' Hôpital</b>	<b>11</b>
Observaciones	12

## Límite de una función en un punto:

La idea intuitiva de límite consiste en que cuánto más cercano sea el valor  $x$  al punto  $a$ , más próxima va a estar la imagen,  $f(x)$ , al valor límite  $L$ . Para formalizar este concepto, en matemáticas se utiliza la siguiente definición:

### Definición

Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contenga al punto  $p$ , se dice que  $L \in \mathbb{R}$  es el límite de la función en  $p$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \{ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \}$$

Dicho de otra manera, para cualquier entorno de  $L$ ,  $E_L = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  podemos encontrar un entorno de  $a$ ,  $E_a = (a - \delta, a + \delta)$  de tal modo que  $f(E_a) \subset E_L$

También es posible formalizar el concepto de límite por la izquierda incorporando en la definición la restricción a valores menores que  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \{ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \{ |x - a| < \delta \wedge x < a \} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \}$$

y lo mismo por la derecha

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \{ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \{ |x - a| < \delta \wedge x > a \} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \}$$

## Límite de una función el en infinito

### Definición

Decimos que  $L \in \mathbb{R}$  es el límite de la función  $f$  cuando  $x$  tiende a infinito, si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \{ \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R} / x > k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \}$$

es decir, para estar suficientemente cerca del límite solo hay que elegir un  $x$  suficientemente grande.

Análogamente se define el límite cuando  $x$  tiende a menos infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \{ \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R} / x < k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \}$$

## Función Continua en un punto

### Definición

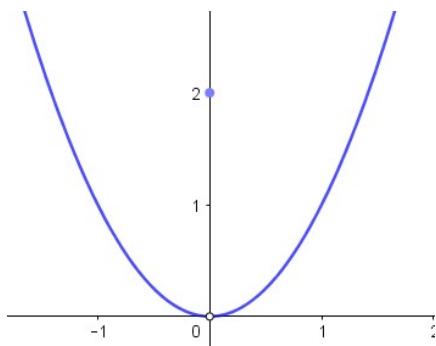
Se dice que la función  $f$  es **continua** en el punto  $x_0$ , si se cumplen estas tres condiciones:

$$\exists f(x_0), \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

En la práctica, hay que comprobar  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

## Discontinuidades

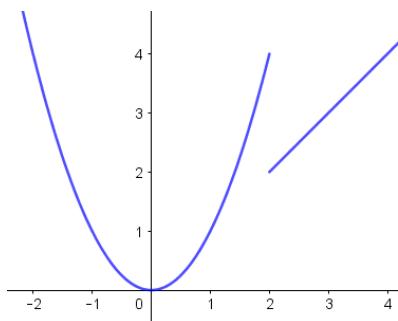
Si  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , pero  $\nexists f(x_0)$  o bien  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ , se dice que la **discontinuidad** es **evitable**.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

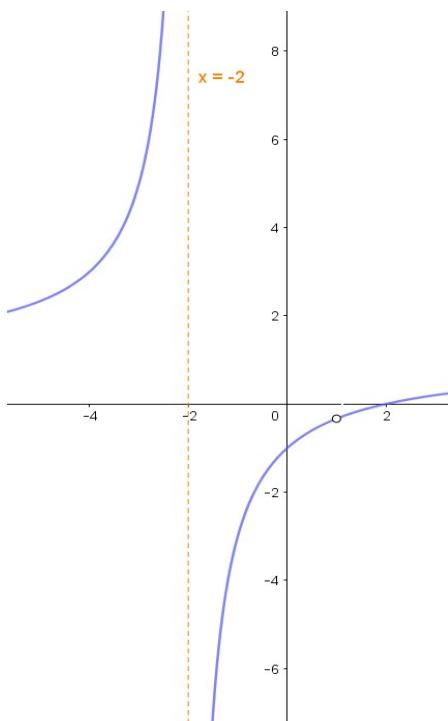
(discontinuidad evitable en  $x=0$ )

Mientras que si  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  o este es infinito, decimos que la **discontinuidad** es **inevitable**.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(discontinuidad inevitable en  $x=2$ )



$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$$

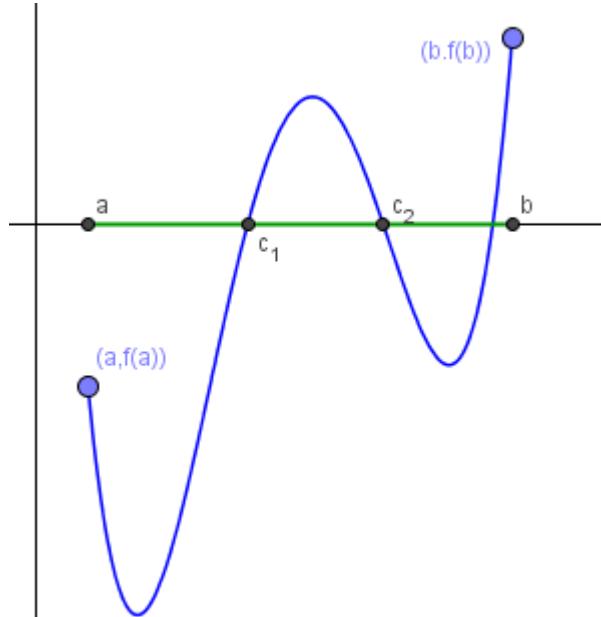
(discontinuidad inevitable en  $x=-2$  y  
discontinuidad evitable en  $x=1$ )

## Teorema de Bolzano

Si  $f$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, es decir  $f(a) \cdot f(b) < 0$  entonces existe por lo menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{ \exists c \in (a, b) / f(c) = 0 \}$$

### Interpretación Geométrica:



Si  $f$  es una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  tal que  $f(a)$  y  $f(b)$  tengan distinto signo, entonces la gráfica de la función corta al eje X al menos en un punto del intervalo  $(a, b)$

## Teorema de los valores intermedios (teorema de Darboux)

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces toma todos los valores intermedios entre  $f(a)$  y  $f(b)$

## Teorema de Weierstrass

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo

$$f \text{ continua en } [a, b] \Rightarrow \exists c, d \in [a, b] / \forall x \in [a, b], f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

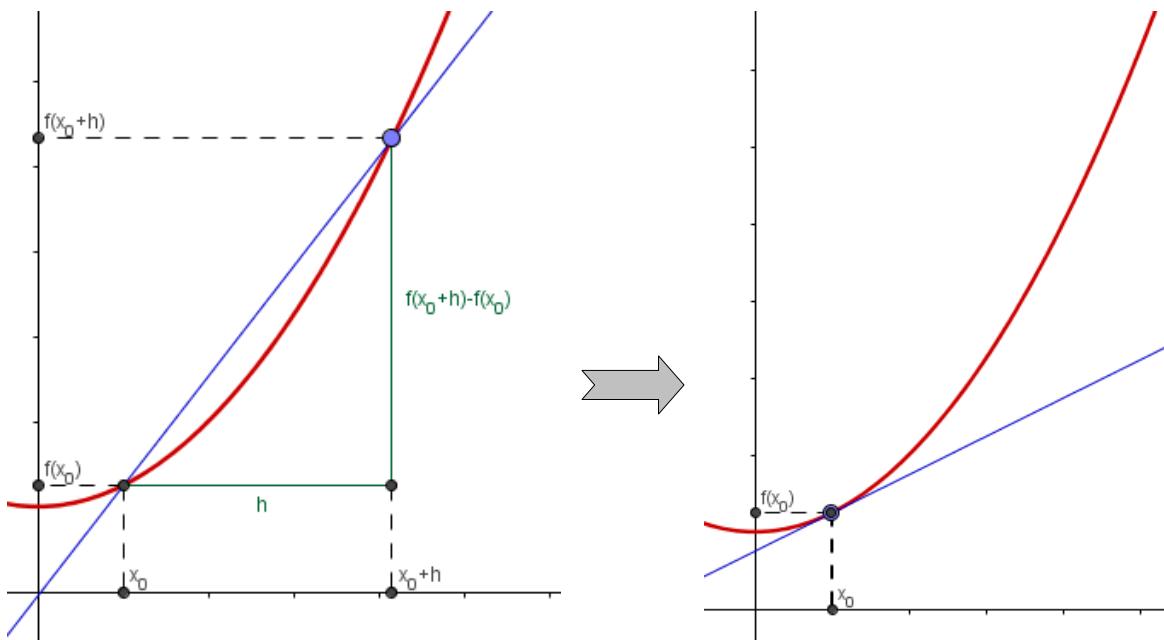
# Derivada de una función en un punto

Se define la derivada de una función en un punto mediante el siguiente límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ o equivalentemente } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## Interpretación geométrica de la derivada

El cociente  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  coincide con el valor de la pendiente de la recta que corta a la gráfica en los puntos  $(x_0, f(x_0))$  y  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ . A medida que  $h$  se aproxima a 0, los dos puntos se juntan y la recta secante se aproxima cada vez más a la tangente. Así pues el límite de  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  será la **pendiente de la recta tangente a la gráfica** de la función en el punto  $(x_0, f(x_0))$ .



## Continuidad de las funciones derivables

Si  $\exists f'(x_0)$  entonces  $f$  es continua en  $x_0$

El razonamiento consiste en :  $\{f \text{ continua en } x_0\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \right\}$

y como

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

## Operaciones con derivadas

Si  $f$  y  $g$  son funciones derivables en  $x_0$ , entonces se cumple:

1.  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2.  $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
3.  $(k \cdot f)'(x_0) = k \cdot f'(x_0) \quad k \in \mathbb{R}$
4.  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
5.  $(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$  siempre que  $g(x_0) \neq 0$

## Regla de la cadena

Si la función  $f$  es derivable en  $x_0$  y la función  $g$  lo es en  $f(x_0)$  entonces la composición de funciones  $g \circ f$  también es derivable en  $x_0$  de tal forma que:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

## Función derivada

### Definición

Se conoce como función derivada  $f'$  a la función que asocia a cada punto  $x$  el valor de la derivada de la función  $f$  en  $x$

### Tabla de derivadas

A continuación se muestran las derivadas para las funciones elementales:

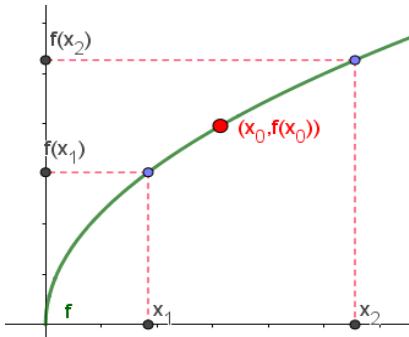
$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$	$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a ; a \in \mathbb{R}$	$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} ; a \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$	$f(x) = \operatorname{arc sen} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$f(x) = \operatorname{arccos} x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \operatorname{arctan} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

# Crecimiento

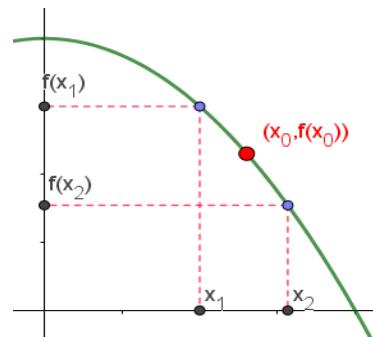
## Definición

Decimos que una función es **creciente** en un punto  $x_0$ , si existe un entorno de  $x_0$  ( $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ ) en el que se cumplen las siguientes condiciones

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \{x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)\} \wedge \{x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x)\}$$



$f$  creciente en  $x_0$



$f$  decreciente en  $x_0$

Del mismo modo definimos una función **decreciente** en  $x_0$

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \{x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)\} \wedge \{x_0 < x \Rightarrow f(x_0) > f(x)\}$$

## Relación entre crecimiento y derivada

$$f \text{ creciente en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

$$f \text{ decreciente en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ creciente en } x_0$$

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decreciente en } x_0$$

Observación:

Un ejemplo de función creciente en un punto cuya derivada vale cero es  $f(x) = x^3$ , cuando  $x = 0$

## Derivada segunda y concavidad

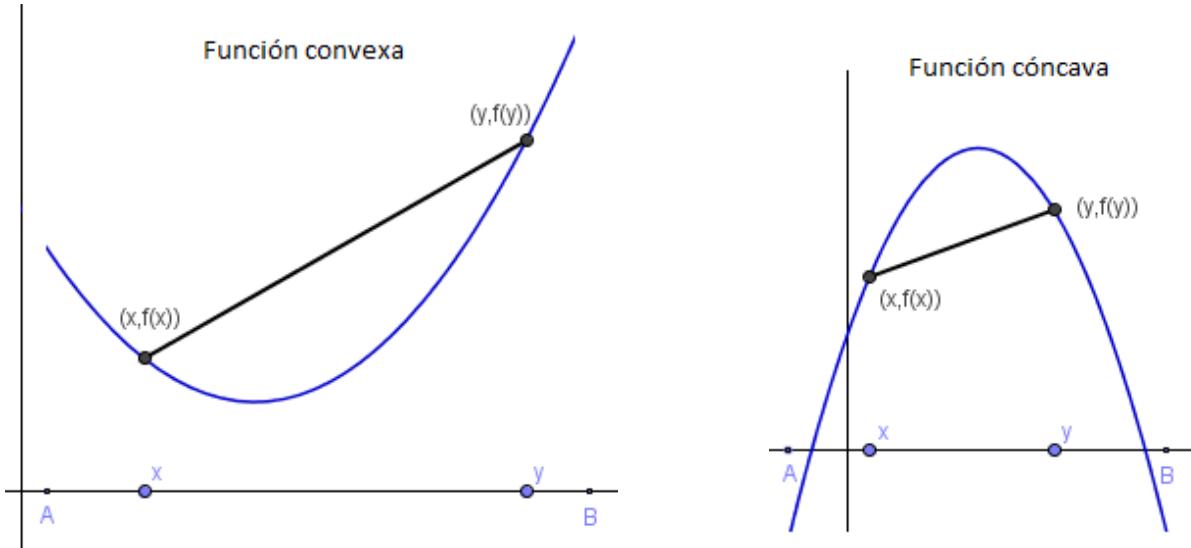
### Derivada segunda

La derivada segunda de una función  $f$  en  $x_0$  se define como la derivada de la función derivada  $f'$  en  $x_0$ , es decir  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$

Nótese que para que exista la derivada segunda en  $x_0$ ,  $f$  debe ser derivable en un entorno de  $x_0$

## Concavidad y convexidad

Una función se dice que es **cóncava positiva o convexa** en un intervalo  $(a, b)$  si para todo par de números  $x, y \in (a, b)$  el segmento que une los puntos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  está por encima de la gráfica de la función.



De la misma manera, una función se dice que es **cóncava negativa o cóncava** en un intervalo  $(a, b)$  si para todo par de números  $x, y \in (a, b)$  el segmento que une los puntos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  está por debajo de la gráfica de la función.

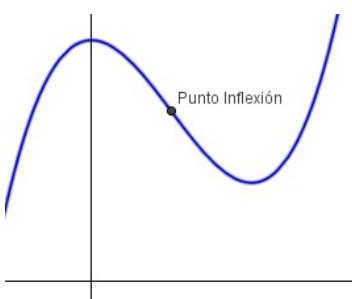
Diremos que la función  $f$  **es convexa en  $x_0$**  si lo es en un entorno de  $x_0$   
 $f$  convexa en  $x_0 : \Leftrightarrow \exists \delta > 0 / f$  es convexa en  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Del mismo modo se define una función **cóncava en  $x_0$**

$f$  cóncava en  $x_0 : \Leftrightarrow \exists \delta > 0 / f$  es cóncava en  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

## Puntos de inflexión

Se conocen como puntos de inflexión aquellos donde la función cambia de concavidad (de cóncava a convexa o viceversa)



## Relación entre derivada segunda y concavidad

Si existe derivada segunda en  $x_0$ , entonces:

$f$ convexa en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$	$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ convexa en $x_0$
$f$ cóncava en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$	$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ cóncava en $x_0$

# Máximos y mínimos relativos

## Definición

$f$  tiene un **máximo relativo** en  $x_0$  : $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 / \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f(x_0) > f(x)$   
 $f$  tiene un **mínimo relativo** en  $x_0$  : $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 / \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f(x_0) < f(x)$

## Relación entre extremos relativos y derivada

Si  $f$  es derivable en  $x_0$  entonces

$f$  tiene un **máximo relativo** en  $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$   
 $f$  tiene un **mínimo relativo** en  $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

## Demostración

Utilizando el método de reducción al absurdo:

Suponemos que  $f$  tiene un **máximo relativo** en  $x_0$  pero  $f'(x_0) \neq 0$ , entonces o bien  $f'(x_0) > 0$  o bien  $f'(x_0) < 0$ , lo cual implicaría, en el primer caso, que  $f$  es creciente o que  $f$  es decreciente en el segundo y por tanto no puede haber **máximo** en  $x_0$ . Como esto es una contradicción, la única opción es que  $f'(x_0) = 0$

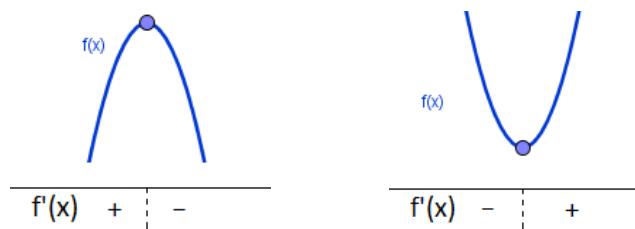
## Búsqueda de extremos relativos

En una función derivable, la búsqueda de extremos relativos se basa en el estudio de aquellos puntos donde la derivada vale cero, conocidos como **puntos críticos**

$$(x_0 \text{ punto crítico} \Leftrightarrow f'(x_0) = 0)$$

### Método 1: Estudiar el signo de la derivada

Si  $f$  es una función continua, entonces en los puntos donde la derivada cambie de signo habrá un **máximo** o un **mínimo** relativo. Esto se justifica debido a la relación entre derivada y crecimiento.



Hay que observar que en este método no es necesario que  $f$  sea derivable en el extremo, aunque sí es necesario que sea continua, por ejemplo  $f(x) = |x|$  no es derivable en el 0

### Método 2: Ceros de la derivada y signo de la derivada segunda

Este método se basa que en los extremos relativos la derivada (si la hay) vale cero y además la función es cóncava en los máximos y convexa en los mínimos, por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene un } \text{máximo en } x_0 \quad \left| \quad \left. \begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene un } \text{mínimo en } x_0 \right.$$

Observación: si resulta que  $f''(x_0) = 0$  entonces podemos calcular las derivadas sucesivas en  $x_0$ , siendo  $n$  el grado de la primera derivada distinta de cero

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Entonces:

- Si  $n$  es impar  $f$  tiene un punto de inflexión en  $x_0$
- Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(x_0) > 0$  entonces  $f$  tiene un mínimo en  $x_0$
- Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(x_0) < 0$  entonces  $f$  tiene un máximo en  $x_0$

Por ejemplo,  $x^3$  tiene un punto de inflexión en 0, mientras que  $x^4$  tiene un mínimo en 0

## Teorema de Rolle

Si  $f$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y además  $f(a) = f(b)$ , entonces existe, al menos, un valor  $c \in (a, b)$  en el que la derivada vale cero,  $f'(c) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$$

### Demostración

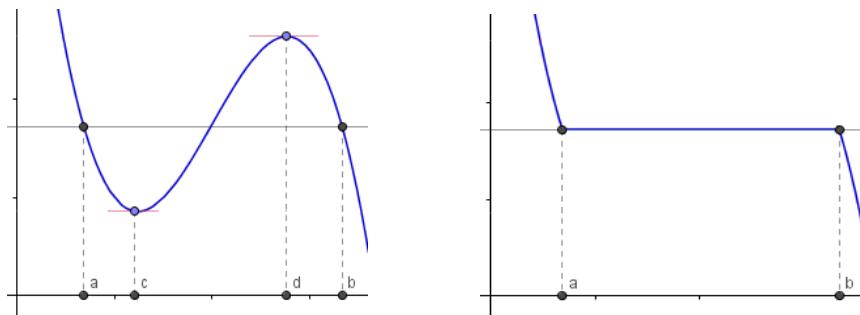
Como  $f$  es continua en  $[a, b]$ ,  $f$  tiene que alcanzar máximo y un mínimo y mínimo absoluto para algún valor del intervalo  $[a, b]$ , llamémosles “c” al valor donde alcanza el mínimo y “d” al máximo.

Existen dos opciones:

- $c$  ó  $d$  están en el interior del intervalo. En este caso el extremo además de ser absoluto también será relativo y por tanto su derivada valdrá cero.
- $c$  y  $d$  están en los extremos del intervalo, es decir  $c=a$  y  $d=b$  o viceversa. En este caso, como  $f(a) = f(b)$ , tendríamos que  $f(c) = f(d)$ , es decir el máximo absoluto toma el mismo valor que el mínimo absoluto. Esto sólo puede ocurrir si la función es constante, y por tanto la derivada valdría cero en todo punto del intervalo  $(a, b)$

### Interpretación Geométrica

Si  $f$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y además  $f(a) = f(b)$ , entonces existe, al menos, un valor  $c \in (a, b)$  tal que la tangente a la gráfica en el punto  $(c, f(c))$  sea paralela al eje X

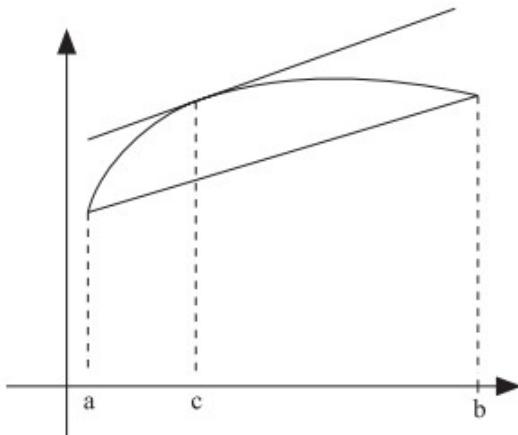


## Teorema del valor medio del cálculo diferencial

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### Interpretación geométrica

La expresión  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  es la pendiente del segmento que une los puntos  $(a, f(a))$  con  $(b, f(b))$ . Por tanto la interpretación geométrica del valor medio consiste en que si tenemos una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces existirá un punto  $c \in (a, b)$ , de tal forma que la tangente a la gráfica en el punto  $(c, f(c))$  será paralela al segmento que une los puntos  $(a, f(a))$  con  $(b, f(b))$ .



## Regla de L'Hôpital

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones derivables en un entorno de  $a$ ,  $E_a$ , tal que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \quad g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E_a \text{ y existe } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ entonces se cumple}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ y } g \text{ derivables en } E_a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E_a \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Observaciones

- La regla de L' Hôpital es una potente herramienta para resolver indeterminaciones del tipo  $0/0$ . No obstante también sirve para resolver otro tipo de indeterminaciones, como  $\infty/\infty$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\infty}{\infty} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{g(x)}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{g'(x)}{f'(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ entonces} \\
 \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{(f')^2(x)}{(g')^2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}
 \end{aligned}$$

Así pues, la regla de L' Hôpital también puede aplicarse a indeterminaciones  $\infty/\infty$

- Aunque la regla de L' Hôpital que hemos visto es valida en límites del tipo  $x \rightarrow a$ ;  $a \in \mathbb{R}$ , la demostración puede adaptarse para límites del tipo  $x \rightarrow \pm\infty$  así como a límites laterales.