1. Al lanzar dos dados, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A="La suma de las puntuaciones sea 5"

b) B="La suma sea 10"

c) C="La suma sea menor que 5"

d) D="La suma sea par"

e) E="La suma sea par y menor que 5"

f) F="La suma sea par o menor que 5"

Solución:

Al tirar dos dados y sumar las puntuaciones obtenemos los siguientes casos posibles:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) A="La suma de las puntuaciones sea 5"

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

b) B="La suma sea 10"

$$P(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

c) C="La suma sea menor que 5"

$$P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

d) D="La suma sea par"

$$P(D)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

e) E="La suma sea par y menor que 5"

$$P(E)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

f) F="La suma sea par o menor que 5"

$$P(F)=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

2. Si tres equipos participan en un campeonato y dos de ellos tienen la misma probabilidad de ganar y esta es doble que la del tercero, ¿cuál es la probabilidad de que gane el tercer equipo?

Solución:

Si llamamos X a la probabilidad de que gane el tercer equipo, entonces la probabilidad de que gane cualquiera de los otros 2 será 2X. Como las probabilidades han de sumar uno:

$$X+2X+2X=1 \Rightarrow X=\frac{1}{5}$$

3. En un dado cargado, la probabilidad de sacar una cara concreta es proporcional al valor de esa cara. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A=”sacar 4”

b) B=”sacar par”

c) C=”Sacar menor que tres”

Solución:

Si llamamos X a la probabilidad de sacar uno, entonces:

P(“sacar 1”)=X	P(“sacar 3”)=3X	P(“sacar 5”)=5X
P(“sacar 2”)=2X	P(“sacar 4”)=4X	P(“sacar 6”)=6X

Y como las probabilidades han de sumar uno:

$$X+2X+3X+4X+5X+6X=1 \Leftrightarrow 21X=1 \Leftrightarrow X=\frac{1}{21}$$

P(“sacar 1”)= $\frac{1}{21}$	P(“sacar 3”)= $\frac{3}{21}$	P(“sacar 5”)= $\frac{5}{21}$
P(“sacar 2”)= $\frac{2}{21}$	P(“sacar 4”)= $\frac{4}{21}$	P(“sacar 6”)= $\frac{6}{21}$

a) P(“sacar 4”)= $\frac{4}{21}$

b) P(“sacar par”)=P(“sacar 2”)+P(“sacar 4”)+P(“sacar 6”)= $\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}$

c) P(“Sacar menor que tres”)=P(“sacar 1”)+P(“sacar 2”)= $\frac{1}{21}+\frac{2}{21}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

4. Se supone que en una ciudad están enfermos con colitis el 3% de los niños y con sarampión el 2.5% y que el 1% tiene ambas enfermedades. Calcula la probabilidad de que un niño elegido al azar tenga, por lo menos, una de las dos dolencias.

Solución:

A= “tener colitis”

B= “tener sarampión”

Buscamos la probabilidad del suceso $A \cup B$ = “tener colitis o sarampión”

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=0{,}03+0{,}025-0{,}01=0{,}045$$

5. Se sabe que para un alumno cualquiera de un IES, la probabilidad de de que este practique algún deporte es de 0.5, acude al cine con asiduidad con una probabilidad de 0.6 y practica deporte o acude al cine con una probabilidad de 0.9. Elegido al azar un alumno de este IES, calcula:

a) La probabilidad de que vaya al cine y practique algún deporte.

b) La probabilidad de que no practique deporte ni vaya al cine.

Solución:

A= “Practica deporte”

B= “Acude con asiduidad al cine”

P(A)=0.5 ; P(B)=0.6 ; $P(A\cup B)=0.9$

a)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$P(A\cap B)=0.5+0.6-0.9=0.2$$

b)

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.9=0.1$$

6. En una clase de 25 personas se eligen 3 al azar para trabajar en la revista del Instituto. Calcula el número de maneras en que se puede hacer esa elección. Si Pedro, Juan y María son alumnos de esa clase, ¿cuál es la probabilidad de que les toque a los tres?

Solución:

El número de elecciones posibles, teniendo en cuenta que no importa el orden en el que se eligen las tres personas, vendrá dado por las combinaciones de 25 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{25,3}=\binom{25}{3}=\frac{25!}{22!\cdot 3!}=2300$$

Como la elección es aleatoria, todas las combinaciones tienen la misma probabilidad y, según la regla de Laplace, la probabilidad de que les toque a los tres será $\frac{1}{2300}$

7. Con 5 matemáticos y 7 físicos hay que formar un comité que conste de 2 matemáticos y 3 físicos. ¿De cuántas maneras se puede formar este comité si: a) puede incluirse a cualquiera de los matemáticos y a cualquiera de los físicos, b) hay uno de los físicos que tiene que formar parte del comité y c) hay dos de los matemáticos que no pueden formar parte del comité?

Solución:

a) $C_{5,2}\cdot C_{3,7}=\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}=10\cdot 35=350$

b) $C_{5,2}\cdot C_{2,6}=\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2}=10\cdot 15=150$

c) $C_{3,2}\cdot C_{3,7}=\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{3}=3\cdot 35=105$

8. Con 7 consonantes y 5 vocales ¿cuántas palabras con 4 consonantes distintas y 3 vocales distintas pueden formarse? No importa que las palabras no tengan significado.

Solución:

Las maneras de elegir consonante serán $C_{7,4}=\binom{7}{4}=35$, mientras que para elegir vocal habrá $C_{5,3}=\binom{5}{3}=10$ maneras diferentes. A esto hay que añadir que las letras se pueden intercambiar, formando permutaciones de 7 elementos.

Así pues, el número de palabras será: $7!\cdot 35\cdot 10=1764000$

9. Una caja contiene 8 pelotas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se extraen 3 pelotas en forma aleatoria, determinar la probabilidad de que: a) las 3 sean rojas, b) las 3 sean blancas, c) 2 sean rojas y 1 sea blanca, d) por lo menos 1 sea blanca, e) se extraiga una de cada color y f) se extraigan en el orden roja, blanca, azul.

Solución:

El número de posibilidades de extraer tres pelotas sin tener en cuenta el orden es de $C_{20,3}=\binom{20}{3}=1140$

a) Para extraer tres rojas hay $C_{8,3}=\binom{8}{3}=56$ casos favorables. Así pues la probabilidad será $\frac{56}{1140}=\frac{14}{285}$

b) Para extraer tres blancas solo hay un caso favorable. Por lo tanto la probabilidad será $\frac{1}{1140}$

c) Las posibilidades de elegir dos rojas serán $C_{8,2}=\binom{8}{2}=28$ y las de elegir una blanca $C_{3,1}=\binom{3}{1}=3$. Así pues los casos favorables serán 28·3=84 y la probabilidad buscada $\frac{84}{1140}=\frac{7}{95}$

d) Para obtener la probabilidad calcularemos primero la del suceso contrario: “no sacar ninguna bola blanca”, el cual tiene $C_{17,3}=\binom{17}{3}=680$ casos favorables. Entonces la probabilidad de no sacar ninguna blanca será de $\frac{680}{1140}=\frac{34}{57}$ y la de sacar al menos una bola blanca $\frac{23}{57}$

e) Para sacar una de cada color los casos favorables son $C_{8,1}\cdot C_{3,1}\cdot C_{9,1}=\binom{8}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{9}{1}=216$ y la probabilidad $\frac{216}{1140}=\frac{18}{95}$

f) En este caso se tiene en cuenta el orden, con lo cual el número de casos posibles no es $C_{20,3}=\binom{20}{3}=1140$ sino $V_{20,3}=\frac{20!}{3!}=6840$

El número de casos favorables será 8·3·9=216, y la probabilidad $\frac{216}{6840}=\frac{3}{95}$

10. De una baraja de 52 cartas bien barajadas se extraen 5 cartas. Encontrar la probabilidad de que: a) 4 sean ases; b) 4 sean ases y 1 sea rey; c) 3 sean dieces y 2 sean sotas; d) sean 9, 10, sota, reina y rey en cualquier orden; e) 3 sean de un palo y 2 de otro palo, y f) se obtenga por lo menos 1 as.

Solución:

Como no se tiene en cuenta el orden, el número de casos posibles será de $C_{52,5}=\binom{52}{5}=2598960$

a) P("4 sean ases")

El número de casos favorables será $C_{4,4}\cdot C_{48,1}=\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}=48$ y la probabilidad $\frac{48}{2598960}=\frac{1}{54145}$

b) P("4 sean ases y 1 sea rey")

El número de casos favorables será $C_{4,4}\cdot C_{4,1}=\binom{4}{4}\cdot\binom{4}{1}=4$ y la probabilidad $\frac{4}{2598960}=\frac{1}{649740}$

c) P(" 3 sean dieces y 2 sean sotas")

El número de casos favorables será $C_{4,3}\cdot C_{4,2}=\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}=24$ y la probabilidad $\frac{24}{2598960}=\frac{1}{108290}$

d) P("sean 9, 10, sota, reina y rey en cualquier orden")

El nº de casos favorables será $C_{4,1}\cdot C_{4,1}\cdot C_{4,1}\cdot C_{4,1}\cdot C_{4,1}=1024$ y la probabilidad $\frac{1024}{2598960}=\frac{64}{162435}$

e) P("3 sean de un palo y 2 de otro palo")

El número de casos favorables será $V_{4,2}\cdot C_{13,3}\cdot C_{13,2}=4\cdot 3\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{2}=267696$ y la probabilidad

$\frac{267696}{2598960}=\frac{429}{4165}$ (nótese que al elegir los dos palos el orden sí importa)

f) P("se obtenga por lo menos 1 as")

La probabilidad de no obtener ningún as es: $\frac{C_{48,5}}{C_{52,5}}=\frac{1712304}{2598960}=\frac{35673}{54145}$ así pues, la probabilidad de obtener al menos un as es $1-\frac{35673}{54145}=\frac{18472}{54145}$

11. De una baraja española de 40 cartas, se eligen al azar simultáneamente cuatro de ellas. Hallar:

a) La probabilidad de que se hayan elegido, al menos, dos reyes.

b) La probabilidad de que tres de las 4 cartas sean del mismo palo.

Solución:

a)

P("al menos dos reyes")=1-P("ningún rey")-P("1 rey")

$$P(\text{“}ningún\,rey\text{”})=\frac{C_{36,4}}{C_{40,4}}=\frac{58905}{91390}\approx 0.6445$$

$$P(\text{“}1\,rey\text{”})=\frac{C_{4,1}\cdot C_{36,3}}{C_{40,4}}=\frac{4\cdot 7140}{91390}=\frac{4\cdot 7140}{91390}=\frac{28560}{91390}\approx 0.3125$$

P("al menos dos reyes")≈1-0.6445-0.3125≈0,043

b)

$P(\text{“}tres\ de\ las\ 4\ cartas\ sean\ del\ mismo\ palo\text{”})=V_{4,2}\cdot P(\text{“}3\ cartas\ del\ palo\ A\ y\ 1\ del\ palo\ B\text{”})=$

$$=V_{4,2}\cdot\frac{C_{10,3}\cdot C_{10,1}}{C_{40,4}}=4\cdot 3\cdot\frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{40}{4}}=\frac{14400}{91390}\approx 0.1576$$

12. La probabilidad de que en 25 años un hombre esté vivo es 3/5 y la probabilidad de que en 25 años su esposa esté viva es 2/3. Encontrar la probabilidad de que en 25 años: a) ambos estén vivos, b) sólo el hombre esté vivo, c) sólo la esposa esté viva y d) por lo menos uno esté vivo

Solución:

Consideramos los sucesos:

A="el hombre está vivo"; P(A)=3/5

B="la mujer está viva"; P(B)=2/3

a) P("ambos estén vivos")= $P(A\cap B)$

Si suponemos que A y B son independientes entonces

P("ambos estén vivos")= $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

b) P("sólo el hombre esté vivo")= $P(A\cap\bar{B})$

Como antes suponemos que A y B son independientes

P("sólo el hombre esté vivo")= $P(A\cap\bar{B})=P(A)\cdot P(\bar{B})=P(A)\cdot(1-P(B))=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

c) P("sólo la esposa esté viva")= $P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\cdot P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$

d) P("por lo menos uno esté vivo")= $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{13}{15}$

13. Sean A y B sucesos tales que $P(A)=0{,}80$, $P(B)=0{,}60$ y $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0{,}52$, donde $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente.

a) Calcula P(A∩ B) . Justifica si son independientes o non los sucesos A y B.

b) Formula y calcula las probabilidades de: “que ocurra A y no ocurra B” y “que no ocurra ni A ni B”.

Solución:

a)

$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-0.52=\mathbf{0.48}$

Son independientes si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. En este caso sí lo son, ya que:

$0.48=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.8\cdot 0.6$

b)

P(“que ocurra A y no ocurra B”)= $P(A\cap\bar{B})$

Como en el apartado a) hemos visto que A y B son independientes entonces

$P(A\cap\bar{B})=P(A)\cdot P(\bar{B})=P(A)\cdot(1-P(B))=0.8\cdot(1-0.6)=0.32$

P("que no ocurra ni A ni B")= $P(\bar{A}\cap\bar{B})$

$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=0.2\cdot 0.4=0.08$

14. Tenemos en una urna cinco bolas blancas, tres negras y cuatro rojas. Sacamos dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de:

a) Que las dos sean blancas.

b) Que la primera sea negra y la segunda roja.

c) Que una sea blanca y otra negra.

<u>Solución</u>:

a)

P("dos blancas")= P("primera blanca" ∩ "segunda blanca") =

=P("primera blanca")·P("segunda blanca" / "primera blanca")= $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{33}$

b)

P("primera negra y segunda roja")= P("primera negra" ∩ "segunda roja") =

=P("primera negra")·P("segunda roja" / "primera negra")= $\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{1}{11}$

c)

P("una sea blanca y otra negra") = P(["1ª blanca" ∩ "2ª negra"] ∪ ["1ª negra" ∩ "2ª negra"])=

=P("1ª blanca")·P("2ª negra" / "1ª blanca") + P("1ª negra")·P("2ª blanca" / "1ª negra")=

$=\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5}{22}$

15. Al realizar un estudio sobre las personas que van al cine se obtiene la siguiente tabla de contingencia:

	H	**M**	
C	**45**	**20**	**65**
NC	**10**	**25**	**35**
	55	**45**	**100**

H: Ser hombre.

M: Ser mujer.

C: Gustar el cine.

NC: No gustar el cine.

a) **Calcula P(C)**

b) Calcula P(C/M)

c) **Calcula P(C∩M)**

d) **¿Son H y C independientes?.¿Por qué?.**

<u>Solución</u>:

a) P(C)= $\frac{65}{100}$

b) P(C/M)= $\frac{20}{45}$

c) P(C∩M)= $\frac{20}{100}$

d) $\left.\begin{array}{r} P(H\cap C)=\frac{45}{100}=\frac{9}{20} \\ P(H)\cdot P(C)=\frac{55}{100}\cdot\frac{65}{100}=\frac{143}{400} \end{array}\right\}\Rightarrow no\, son\, independientes$

También valdría

$P(C)\neq P(C/M)\Rightarrow C\ y\ M\ no\, son\, independientes\Rightarrow C\ y\ H\ no\, son\, independientes\,(H=\overline{C})$

16. **Una investigación de mercado de 800 personas reveló los siguientes hechos sobre la capacidad de recordar un anuncio televisivo de un producto en particular y la adquisición de dicho producto:**

	Recuerdan el anuncio	**No recuerdan el anuncio**
Compran el producto	**160**	**80**
No compran el producto	**240**	**320**

a) **Calcula la probabilidad de que una persona recuerde el anuncio o compre el producto.**

b) **Si una persona recuerda el anuncio del producto, ¿qué probabilidad hay de que lo compre?**

c) **¿El hecho de comprar el producto depende o no de recordar el anuncio? Justifica la respuesta.**

Solución:

	Recuerdan el anuncio	No recuerdan el anuncio	
Compran el producto	160	80	**240**
No compran el producto	240	320	**560**
	400	**400**	**800**

a)

$$P(\text{“}recordar\, anuncio\text{”}\cup\text{“}comprar\ producto\text{”})=\frac{160+240+80}{800}=\frac{3}{5}$$

b)

$$P(\text{“}comprar\ producto\text{”}/\text{“}recordar\ anuncio\text{”})=\frac{160}{400}=\frac{2}{5}$$

c)

$$\left.\begin{array}{r} P(\text{“}comprar\ producto\text{”}/\text{“}recordar\ anuncio\text{”})=\frac{2}{5} \\ P(\text{“}comprar\ producto\text{”})=\frac{240}{800}=\frac{3}{10} \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}\text{“}comprar\ producto\text{”}\ y\ \text{“}recordar\, anuncio\text{”} \\ no\, son\, independientes\end{array}$$

17. El cuadro de personal de unos grandes almacenes está formado por 200 hombres y 300 mujeres. La cuarta parte de los hombres y la tercera parte de las mujeres sólo trabajan en el turno de la mañana. Elegido uno de los empleados al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre o sólo trabaje en el turno de la mañana?

b) Sabiendo que no sólo trabaja en el turno de la mañana ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

$H = \text{“}Hombre\text{”}\ ;\ M = \text{“}mujer\text{”}$

$TM = \text{“}Sólo\,trabaja\,turno\,de\,mañana\text{”}\ ;\ \overline{TM} = \text{“}No\,trabaja\,sólo\,en\,el\,turno\,de\,mañana\text{”}$

Si representamos los datos en una tabla de contingencia tenemos:

	TM	$\overline{TM}$	
H	50	150	200
M	100	200	300
	150	350	500

a)

$$P(H \cup TM) = \frac{50+150+100}{500} = \frac{3}{5}$$

b)

$$P(M/\overline{TM}) = \frac{200}{350} = \frac{4}{7}$$

18. En una determinada prueba se presentan alumnos de tres centros. Del primero se presentan 150 alumnos y aprueban un tercio de los presentados. Del segundo se presentan 125 y suspenden el 80% de los presentados. Y del tercero aprueban 75 y suspenden 25.

a) Hacer una tabla que recoja la información anterior.

b) Del total de alumnos presentados, ¿qué porcentaje corresponde a cada centro?

c) Calcular la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya suspendido.

d) Si se sabe que el alumno elegido al azar no pertenece al primer centro, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado?

Solución:

a)

	Centro 1	Centro 2	Centro 3	
Aprobados	50	25	75	150
Suspensos	100	100	25	225
	150	125	100	375

b)

Centro 1: 40%

Centro 2: 33,33%

Centro 3: 26,67 %

c) $P(\text{“}Suspenso\text{”})=\frac{225}{375}=\frac{3}{5}$

d) $P(\text{“}Aprobado\text{”}/\text{“}No\ pertenece\ al\ primer\ centro\text{”})=\frac{100}{225}=\frac{4}{9}$

19. Sabiendo que el 40% de los residentes de cierta localidad son consumidores de pescado y que con probabilidad 0,25 un consumidor de pescado no es consumidor de carne, ¿cuál sería la probabilidad de que seleccionando al azar un residente de esa localidad resulte ser consumidor de carne y de pescado? Justifica la respuesta.

Solución:

P= “Consumidor de pescado”

C= “Consumidor de carne”

$P(P)=0.25$

$P(\bar{C}/P)=0.25 \Rightarrow P(C/P)=0.75$

$P(C\cap P)=P(C/P)\cdot P(P)=0.4\cdot 0.75=0.3$

20. En una empresa, el 20% de los trabajadores son mayores de 45 años, el 8% desempeña algún puesto directivo y el 6% es mayor de 45 años y desempeña algún puesto directivo.

a) ¿Qué porcentaje de los trabajadores tiene más de 45 años y no desempeña ningún cargo directivo?

b) ¿Qué porcentaje de los trabajadores no es directivo ni mayor de 45 años?

c) Si la empresa tiene 150 trabajadores, ¿cuántos son directivos y no tienen más de 45 años?

Solución:

Si representamos los datos en una tabla de contingencia

	Directivo	No directivo	
> 45	**6%**	14%	**20%**
<45	2%	78%	80%
	8%	92%	100%

a) 14%

b) 78%

c) 2% de 150 = 3 trabajadores.

21. Sean A y B dos sucesos tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es 1/10 y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 1/5. Además se sabe que $P(A/B)=1/4$.

a) Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

b) Calcula la probabilidad de que ocurra el suceso A.

Solución:

$P(A\cap B)=\frac{1}{10}$; $P(\bar{A}\cap\bar{B})=\frac{1}{5}$

a) $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=\frac{1}{5}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{4}=P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(B)=P(A\cap B):\frac{1}{4}=\frac{1}{10}:\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow\frac{4}{5}=P(A)+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}\Leftrightarrow P(A)=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$

22. Sean A y B sucesos tales que $P(A\cap B)=0.1$; $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.6$; $P(A/B)=0.5$, donde $\bar{A}$ y $\bar{B}$ denotan los sucesos contrarios de A e B respectivamente

a) Calcula las probabilidades siguientes: $P(B)$ y $P(A\cup B)$

b) ¿Son los sucesos A e B independientes? Justifica la respuesta.

Solución:

a)

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Leftrightarrow 0.5=\frac{0.1}{P(B)}\Leftrightarrow P(B)=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5}=0.2$

$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-0.6=0.4$

b)

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(B)=0.4+0.1-0.2=0.3$

Como $P(A)=0.3\neq 0.5=P(A/B)$ entonces los sucesos A y B no son independientes

23. Sabemos que $P(B/A)=0.7$, $P(A/B)=0.4$ y $P(A)=0.2$.

a) Calcula $P(A\cap B)$ y $P(B)$. Justifica si son independientes o no los sucesos A e B.

b) Calcula $P(A\cup\bar{B})$, donde $\bar{B}$ representa el suceso complementario o contrario de B.

Solución:

a)

$P(A\cap B)=P(B/A)\cdot P(A)=0.7\cdot 0.2=0.14$

$P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A/B)}=\frac{0.14}{0.4}=0.35$

Como $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ los sucesos no son independientes.

(También podemos argumentar $P(A/B)\neq P(A)$)

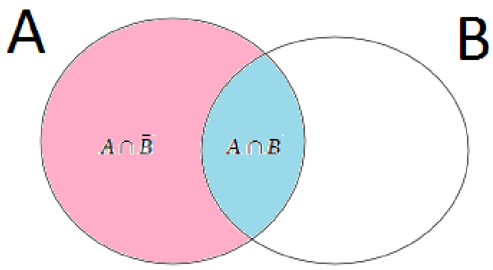
b)

$P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\cap\bar{B})$

$P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.35=0.65$

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})\Leftrightarrow P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=0.2-0.14=0.06$

Entonces $P(A\cup\bar{B})=0.2+0.65-0.06=0.79$



24. Los gerentes de unos grandes almacenes han comprobado que el 40% de los clientes paga sus compras con tarjeta de crédito y el 60% restante lo hace en efectivo. Ahora bien, si el importe de la compra es superior a 60 €, la probabilidad de pagarla con tarjeta pasa a ser 0,6. Si además sabemos que en el 30% de las compras el importe es superior a 60 €, calcular:

a) Probabilidad de que un importe sea superior a 60 € y sea abonado con tarjeta.

b) **Probabilidad de que el importe sea superior a 60 € sabiendo que fue abonado en efectivo.**

Solución:

$P(\text{“}tarjeta\text{”})=0.4$; $P(\text{“}efectivo)=0.6$

$P(\text{“}tarjeta\text{”}/\text{“}importe>60€\text{”})=0.6\Rightarrow P(\text{“}efectivo\text{”}/\text{“}importe>60€\text{”})=0.4$

$P(\text{“}importe>60€\text{”})=0.3$

a)

$P(\text{“}importe>60€\text{”}\cap\text{“}tarjeta\text{”})=P(\text{“}tarjeta\text{”}/\text{“}importe>60€\text{”})\cdot P(\text{“}importe>60€\text{”})=$

$=0.6\cdot 0.3=0.18$

b)

$$P(\text{“}importe>60€\text{“}/\text{“}efectivo\text{“})=\frac{P(\text{“}importe>60€\text{“}\cap\text{“}efectivo\text{“})}{P(\text{efectivo})}=$$

$$=\frac{P(\text{“}efectivo\text{”}/\text{“}importe>60€\text{”})\cdot P(\text{“}importe>60€\text{”})}{P(\text{“}efectivo\text{”})}=\frac{0.4\cdot 0.3}{0.6}=0.2$$

25. Tres cazadores han disparado a la vez sobre un elefante, que ha caído derribado bajo dos impactos. Las probabilidades de hacer blanco de los cazadores son $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}$. Calcula la probabilidad de que sea el mejor tirador el que ha fallado.

Solución:

Consideramos los sucesos:

A_1 = "Acierta el cazador 1"

A_2 = "Acierta el cazador 2"

A_3 = "Acierta el cazador 3"

B= "El elefante recibe dos impactos"

La probabilidad buscada es $P(\overline{A_1}/B)=\frac{P(\overline{A_1}\cap B)}{P(B)}$

Como $\overline{A_1}\cap B=\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3$ y la probabilidad de acertar de un cazador es independiente de lo que haga otro:

$$P(\overline{A_1}\cap B)=P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{125}$$

y como

$$B=\left(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3\right)\cup\left(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\right)\cup\left(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}\right)$$

entonces

$$P(B)=P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)+P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)+P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})=$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{58}{125}$$

Con lo cual:

$$P(\overline{A_1}/B)=\frac{\frac{6}{125}}{\frac{58}{125}}=\frac{6}{58}=\frac{3}{29}\approx 0.1034$$

26. **En una ciudad se publican tres periódicos, A, B y C. El 30% de la población lee A, el 20% lee B y el 15% lee C. El 12% lee A y B, el 9% A y C, el 6% B y C, mientras que sólo el 3% lee los tres. Calcula el porcentaje de la población que lee, al menos uno de los tres periódicos.**

Solución:

$P(A)=0.3$	$P(A\cap B)=0.12$	$P(A\cap B\cap C)=0.03$
$P(B)=0.2$	$P(A\cap C)=0.09$	
$P(C)=0.15$	$P(B\cap C)=0.6$	

$$\boldsymbol{P(A\cup B\cup C)}=P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C))=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap C)-P(A\cap(B\cup C))=$$

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap C)-P((A\cap B)\cup(A\cap C))=$$

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap C)-[P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap A\cap C)]=$$

$$\boldsymbol{P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)}=$$

$$0.3+0.2+0.15-0.12-0.09-0.06+0.03=\mathbf{0.41}$$

27. **Una urna tiene dos monedas normales, una con dos cruces y tres con una probabilidad de cara de ¼. Elegimos una moneda al azar y la lanzamos al aire. Se pide:**

a) **Probabilidad de que aparezca una moneda normal y además salga cara.**

b) **Probabilidad de que salga cruz.**

Solución:

a)

$$P(\text{“moneda normal”} \cap \text{“cara”}) = P(\text{“moneda normal”}) \cdot P(\text{“cara”} / \text{“moneda normal”}) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

b)

Los sucesos: *“elegir moneda normal”*, *“elegir moneda con dos cruces”* y *“elegir moneda cargada con probabilidad de cara ¼”*, forman un sistema completo de sucesos. Por lo tanto, según el teorema de las probabilidades totales:

P(“cruz”)=P(“cruz”/”moneda normal”)·P(“moneda normal”)+P(“cruz”/”moneda con 2 cruces”)·P(“moneda con dos cruces”)+P(“cruz”/”moneda cargada”)·P(“moneda cargada”)=

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{6} = \frac{17}{24} \approx 0.7083$$

28. **En una universidad existen tres facultades. En la Facultad A, el número de alumnos matriculados es de 500; en la B, 1000; y en la C, 1500. Se sabe que el porcentaje de alumnos que suspenden en la Facultad A es del 25%, en la B el 15% y en la C del 30%. Se elige al azar un alumno de esa universidad y se pide**

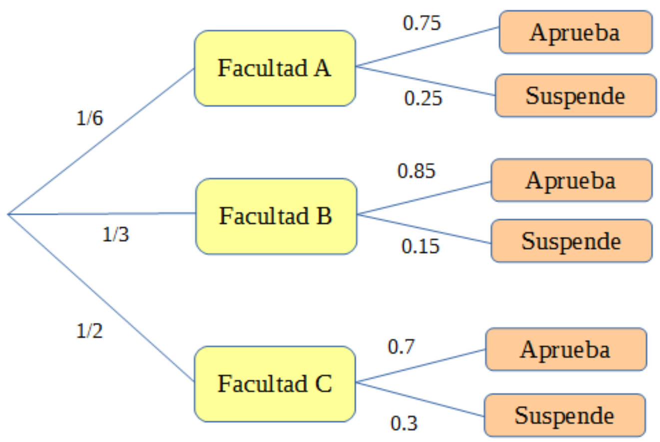
a) **El árbol de probabilidades.**

b) **¿Cuál es la probabilidad de aprobar?**

c) **¿Cuál es la probabilidad de suspender?**

Solución:

a)



b)

P(“aprobar”)=P(“aprobar”/“Facultad A”) · P(“Facultad A”) + P(“aprobar”/“Facultad B”) · P(“Facultad B”) + P(“aprobar”/“Facultad C”) · P(“Facultad C”)=

$$=0.75\cdot\frac{1}{6}+0.85\cdot\frac{1}{3}+0.7\cdot\frac{1}{2}=\frac{91}{120}\approx 0.7583$$

c)

$$P(\text{“}\mathit{suspender}\text{”})=1-P(\text{“}\mathit{aprobar}\text{”})=1-\frac{91}{120}=\frac{29}{120}\approx 0.2417$$

29. **Una urna A contiene 6 bolas blancas y 4 negras, una segunda urna B contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que:**

a) **Las dos bolas sean blancas.**

b) **Las dos bolas sean del mismo color.**

c) **Las dos bolas sean de distinto color.**

Solución:

a)

P(“2 blancas”)=P(“2 blancas”/ “urna A”)·P(“urna A)+P(“2 blancas”/ “urna B”)·P(“urna B)=

$$\frac{C_{6,2}}{C_{10,2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{C_{5,2}}{C_{7,2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{10}{21}\cdot\frac{1}{2}=\frac{17}{42}\approx 0.4048$$

b)

$$P(\text{“}2\,\mathit{bolas\,del\,mismo}\,\text{color”})=P(\text{“}2\,\mathit{blancas}\text{”}\cup\text{“}2\,\mathit{negras}\text{”})=P(\text{“}2\,\mathit{blancas}\text{”})+P(\text{“}2\,\mathit{negras}\text{”})$$

P(“2 negras”)=P(“2 negras”/ “urna A”)·P(“urna A)+P(“2 negras”/ “urna B”)·P(“urna B)=

$$\frac{C_{4,2}}{C_{10,2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{C_{2,2}}{C_{7,2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{2}=\frac{19}{210}\approx 0.0905$$

$$P(\text{“}2\,\mathit{bolas\,del\,mismo}\,\text{color”})\approx 0.4048+0.0905=0.4953$$

c)

P(“2 bolas de distinto color”)=1-P(“2 bolas del mismo color)=0.5047

30. Se extrae una bola de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras, y sin verla ni reemplazarla se extrae una segunda bola que resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca?

Solución:

Sean los sucesos:

$$B_1=\text{“}1^{\text{a}}\,\mathit{blanca}\text{”}\ ;\ B_2=\text{“}2^{\text{a}}\,\mathit{blanca}\text{”}$$

$$N_1=\text{“}1^{\text{a}}\,\mathit{negra}\text{”}\ ;\ N_2=\text{“}2^{\text{a}}\,\mathit{negra}\text{”}$$

$$P(B_1/N_2)=P\frac{(B_1\cap N_2)}{P(N_2)}=\frac{P(N_2/B_1)\cdot P(B_1)}{P(N_2/B_1)\cdot P(B_1)+P(N_2/N_1)\cdot P(N_1)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7}}=\frac{2}{3}$$

31. **En un estudio realizado en cierto IES, en el que se imparte ESO y bachillerato, se recogieron los siguientes datos:**

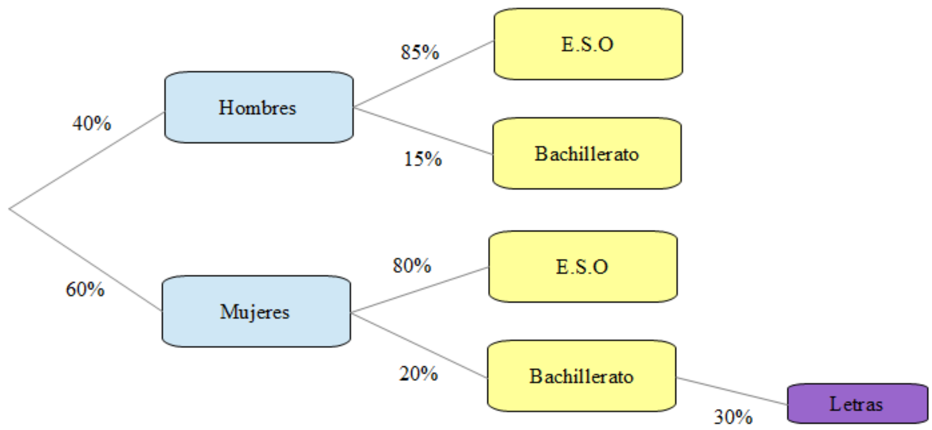
- **El 60% de los alumnos son mujeres.**
- **El 15% de los hombres estudian bachillerato.**
- **El 20% de las mujeres estudia bachillerato.**
- **El 30% de las mujeres que estudian bachillerato eligen la opción de letras.**

a) **Calcula probabilidad de que un alumno de ese IES, elegido al azar, sea mujer, estudie bachillerato y curse la opción de letras.**

b) **¿Qué porcentaje del alumnado estudia bachillerato?**

c) **¿Qué porcentaje de los estudiantes de bachillerato son hombres?**

Solución:



a)

$$P(\text{“}Mujer\text{”}\cap\text{“}Bachillerato\text{”}\cap\text{“}letras\text{”})=$$

$$=P(\text{“}letras\text{”}/[\text{“}Mujer\text{”}\cap\text{“}Bachillerato\text{”}])\cdot P(\text{“}Mujer\text{”}\cap\text{“}Bachillerato\text{”})=$$

$$=P(\text{“}letras\text{”}/[\text{“}Mujer\text{”}\cap\text{“}Bachillerato\text{”}])\cdot P(\text{“}Bachillerato\text{”}/\text{“}Mujer\text{”})\cdot P(\text{“}Mujer\text{”})=$$

$$=0.3\cdot 0.2\cdot 0.6=0.036\Rightarrow 3{,}6\%$$

b)

$$P(\text{“}Bachillerato\text{”})=P(\text{“}Bachillerato\text{”}\cap\text{“}Hombre\text{”})+P(\text{“}Bachillerato\text{”}\cap\text{“}Mujer\text{”})=$$

$$=P(\text{“}Bachillerato\text{”}/\text{“}Hombre\text{”})\cdot P(\text{“}Hombre\text{”})+P(\text{“}Bachillerato\text{”}/\text{“}Mujer\text{”})\cdot P(\text{“}Mujer\text{”})=$$

$$=0.15\cdot 0.4+0.2\cdot 0.6=0.18\Rightarrow 18\%$$

c)

$$P(\text{“}Hombres\text{”}/\text{“}Bachillerato\text{”})=\frac{P(\text{“}Hombres\text{”}\cap\text{“}Bachillerato\text{”})}{P(\text{“}Bachillerato\text{”})}=$$

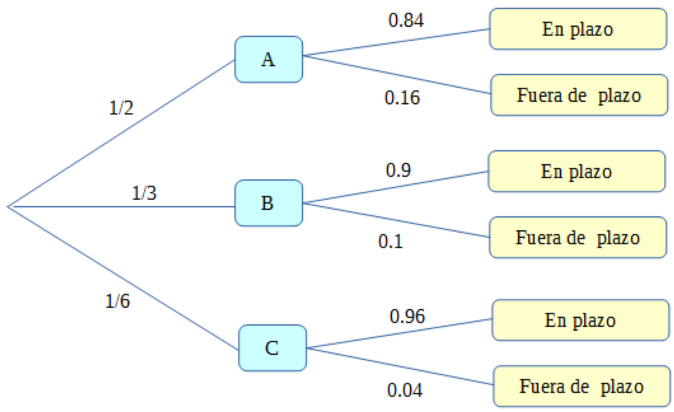
$$\frac{P(\text{“Bachillerato”}/\text{“Hombres”})\cdot P(\text{“Hombres”})}{P(\text{“Bachillerato”})}=\frac{0.15\cdot 0.4}{0.18}=\frac{1}{3}\Rightarrow 33{,}33\,\%$$

32. Una tienda que vende sus productos a través de Internet utiliza tres empresas de transporte para la entrega de sus pedidos A, B e C. Reparten la entrega de pedidos entre las empresas, de forma que A entrega la mitad, B la tercera parte y C el resto de los pedidos. El 84% de los pedidos entregados por A, el 90% de los entregados por B y el 96% de los entregados por C, cumplen con el plazo de entrega establecido.

a) ¿Qué porcentaje de pedidos son entregados en el plazo establecido?

b) Calcula la probabilidad de que un pedido, seleccionado al azar, o es entregado por la empresa B o no cumple con el plazo de entrega establecido.

Solución:



a)

$$P(\text{“En plazo”})=P(\text{“En plazo”}\cap A)+P(\text{“En plazo”}\cap B)+P(\text{“En plazo”}\cap C)=$$

$$=P(\text{“En plazo”}/A)\cdot P(A)+P(\text{“En plazo”}/B)\cdot P(B)+P(\text{“En plazo”}/C)\cdot P(C)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0.84+\frac{1}{3}\cdot 0.9+\frac{1}{6}\cdot 0.96=\frac{22}{25}=0.88$$

b)

$$P(B\cup \text{“fuera de plazo”})=P(B)+P(\text{“fuera de plazo”})-P(B\cap \text{“fuera de plazo”})=$$

$$=P(B)+P(\text{“fuera de plazo”})-P(\text{“fuera de plazo”}/B)\cdot P(B)=\frac{1}{3}+0.12-0.1\cdot\frac{1}{3}=0.42$$

33. Una empresa quiere comercializar una herramienta eléctrica para la construcción y por tanto es probada por 3 de cada 5 trabajadores del sector. De los que la probaron, el 70% da una opinión favorable, el 5% da una opinión desfavorable y el resto opina que le es indiferente. De los que no probaron la herramienta, el 60% da una opinión favorable, el 30% opina que le es indiferente y el resto da una opinión desfavorable.
Se sabe que la empresa comercializará la herramienta si al menos el 65% de los trabajadores del sector da una opinión favorable.

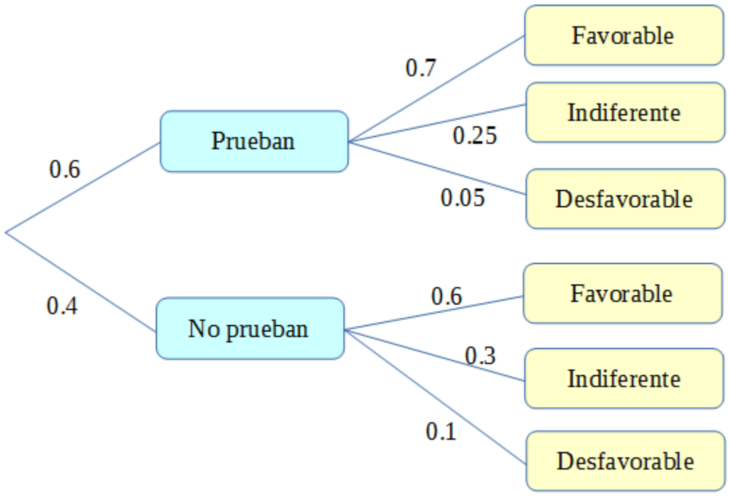
a) Si un trabajador elegido al azar da una opinión desfavorable, ¿cuál es la

probabilidad de que haya probado la herramienta?

b) ¿Qué porcentaje de trabajadores da una opinión favorable? ¿Comercializará la empresa la herramienta? Razona la respuesta

c) Calcula el porcentaje de trabajadores que prueban la herramienta y opinan que le es indiferente.

Solución:



a)

$$P(\text{“ prueba ”}/\text{“ desfavorable ”})=\frac{P(\text{“ prueba ”}\cap\text{“ desfavorable ”})}{P(\text{“desfavorable ”})}=$$

$$=\frac{P(\text{“ desfavorable ”}/\text{“ prueba ”})\cdot P(\text{“ prueba ”})}{P(\text{“ desfavorable ”}/\text{“ prueba ”})\cdot P(\text{“ prueba ”})+P(\text{“desfavorable ”}/\text{“ no prueba ”})\cdot P(\text{“ no prueba ”})}=$$

$$=\frac{0.05\cdot 0.6}{0.05\cdot 0.6+0.1\cdot 0.4}=\frac{3}{7}\approx 0.4286$$

b)

$$P(\text{“ favorable ”})=P(\text{“ favorable ”}\cap\text{“ prueba ”})+P(\text{“ favorable ”}\cap\text{“no prueba ”})=$$

$$=P(\text{“ favorable ”}/\text{“ prueba ”})\cdot P(\text{“ prueba ”})+P(\text{“ favorable ”}/\text{“no prueba ”})\cdot P(\text{“no prueba ”})=$$

$$0.7\cdot 0.6+0.6\cdot 0.4=0.66$$

Sí comercializará la herramienta ya que era necesario que al menos un 65% de los trabajadores tuviese una opinión favorable y se da el 66%.

c)

$$P(\text{“ prueban ”}\cap\text{“ indiferente ”})=P(\text{“ indiferente ”}/\text{“ prueban ”})\cdot P(\text{“ prueban})=0.25\cdot 0.6=0.15$$

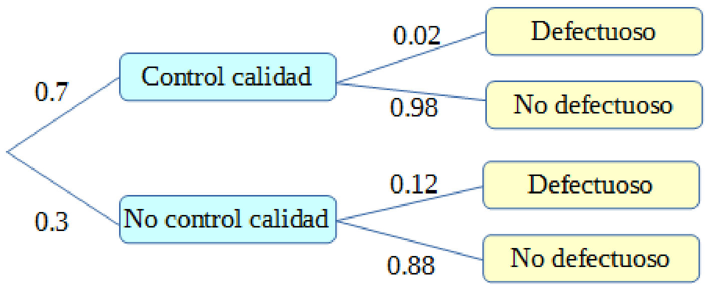
Un 15% prueban la herramienta y les es indiferente.

34. Una empresa somete a un control de calidad a 7 de cada 10 artículos fabricados. De los que son sometidos al control resultan defectuosos un 2% y de los que no se someten al control de calidad resultan defectuosos un 12%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo elegido al azar resulte defectuoso?

b) Si un artículo elegido al azar resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no fuese sometido al control de calidad?

Solución:



a)

$$P(\text{“}Defectuoso\text{”}) = P(\text{“}Defectuoso\text{”} \cap \text{“}Control calidad\text{”}) + P(\text{“}Defectuoso\text{”} \cap \text{“}No control calidad\text{”}) =$$

$$P(\text{“}Defectuoso\text{”} / \text{“}Ctrl\ calidad\text{”}) \cdot P(\text{“}Ctrl\ calidad\text{”}) +$$

$$+ P(\text{“}Defectuoso\text{”} / \text{“}No\ ctrl\ calidad\text{”}) \cdot P(\text{“}No\ ctrl\ calidad\text{”}) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.12 = 0{,}05$$

b)

$$P(\text{“}No\ ctrl\ calidad\text{”} / \text{“}Defectuoso\text{”}) = \frac{P(\text{“}No\ ctrl\ calidad\text{”} \cap \text{“}Defectuoso\text{”})}{P(\text{“}Defectuoso\text{”})} =$$

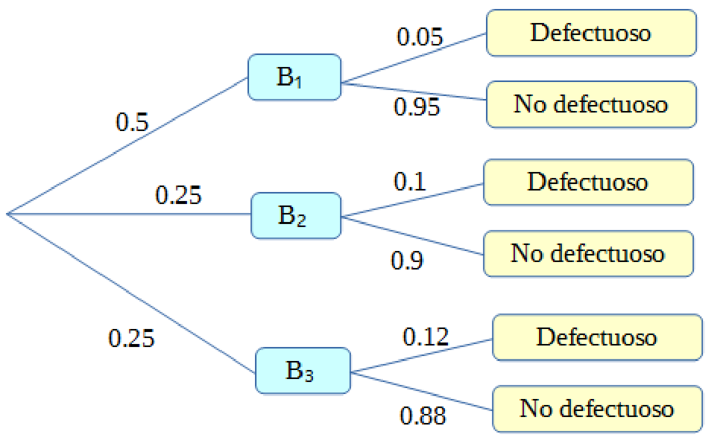
$$= \frac{P(\text{“}Defectuoso\text{”} / \text{“}No\ ctrl\ calidad\text{”}) \cdot P(\text{“}No\ ctrl\ calidad\text{”})}{P(\text{“}Defectuoso\text{”})} = \frac{0.12 \cdot 0.3}{0.05} = 0.72$$

35. Una fábrica recibe microcircuitos provenientes de tres fabricantes distintos: B_1, B_2 y B_3. El 50% del total se compra a B_1 mientras que a B_2 y B_3 se les compra un 25% a cada uno. El porcentaje de circuitos defectuosos que fabrican B_1 B_2 y B_3 es 5%, 10% y 12% respectivamente. Si los circuitos se almacenan en la fábrica sin importar quién fue el proveedor:

a) Determina la probabilidad de que un circuito sea defectuoso.

b) Si un circuito no está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vendido por el proveedor B_2?

Solución:



Para abreviar llamaremos D al suceso “circuito defectuoso” y $\overline{D}$ a “circuito no defectuoso” a)

$$P(D)=P(D\cap B_1)+P(D\cap B_2)+P(D\cap B_3)=P(D/B_1)\cdot P(B_1)+P(D/B_2)\cdot P(B_2)+P(D/B_3)\cdot P(B_3)=$$

$$=0.05\cdot 0.5+0.1\cdot 0.25+0.12\cdot 0.25=0.08$$

b)

$$P(B_2/\overline{D})=\frac{P(B_2\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{P(\overline{D}/B_2)\cdot P(B_2)}{1-P(D)}=\frac{0.9\cdot 0.25}{0.92}\approx 0.2446$$

36. La probabilidad de que un correo basura (spam) contenga la palabra "viagra" es del 20%, mientras que la probabilidad de que uno que no sea basura contenga esa palabra es tan solo del 0.05%. Sabiendo que el porcentaje de correos basura que se reciben diariamente es de alrededor a un 30%, calcula la probabilidad de que un correo que contenga la la palabra viagra sea spam.

Solución:

P(“viagra”/ “spam”)=0.2

P(“viagra”/ “no spam”)=0.0005

P(“spam”)=0.3

$$P(\text{“}spam\text{”}/\text{“}viagra\text{”})=\frac{P(\text{“}spam\text{”}\cap\text{“}viagra\text{”})}{P(\text{“}viagra\text{”})}=$$

$$=\frac{P(\text{“}viagra\text{”}/\text{“}spam\text{”})\cdot P(\text{“}spam\text{”})}{P(\text{“}viagra\text{”}/\text{“}spam\text{”})\cdot P(\text{“}spam\text{”})+P(\text{“}viagra\text{”}/\text{“}no\,spam\text{”})\cdot P(\text{“}no\,spam\text{”})}=$$

$$=\frac{0.2\cdot 0.3}{0.2\cdot 0.3+0.0005\cdot 0.7}\approx 0.9942$$

37. Una prueba diagnóstica para la diabetes tiene una probabilidad de falso positivo de 0.04 y una de falso negativo de 0.05. Si el porcentaje de diabéticos en la población es del 7%, ¿cuál es la probabilidad de que sea diabético un individuo en el que la prueba dé positiva?. ¿Y de que no lo sea uno en el que dé negativo?

Solución:

$$P(\text{“}positivo\text{”}/\text{“}no\,diabético\text{”})=0.04\Rightarrow P(\text{“}negativo\text{”}/\text{“}no\,diabético\text{”})=0.96$$

$$P(\text{“}negativo\text{”}/\text{“}diabético\text{”})=0.05\Rightarrow P(\text{“}positivo\text{”}/\text{“}diabético\text{”})=0.95$$

$$P(\text{“}diabético\text{”})=0.07\,\%implica\,P(\text{“}no\,diabético\text{”})=0.93$$

$$P(\text{“}diabético\text{”}/\text{“}positivo\text{”})=\frac{P(\text{“}diabético\text{”}\cap\text{“}positivo\text{”})}{P(\text{“}positivo\text{”})}=$$

$$=\frac{P(\text{“}positivo\text{”}/\text{“}diabético\text{”})\cdot P(\text{“}diabético\text{”})}{P(\text{“}positivo\text{”}/\text{“}diabético\text{”})\cdot P(\text{“}diabético\text{”})+P(\text{“}positivo\text{”}/\text{“}no\,diabético\text{”})\cdot P(\text{“}no\,diabético\text{”})}$$

$$=\frac{0.95\cdot 0.07}{0.95\cdot 0.07+0.04\cdot 0.93}\approx 0.6413$$

$$P(\text{“ no diabético ”}/\text{“ negativo ”})=\frac{P(\text{“ no diabético ”}\cap\text{“ negativo ”})}{P(\text{“ negativo ”})}=$$

$$=\frac{P(\text{“negativo ”}/\text{“ no diabético ”})\cdot P(\text{“ no diabético”})}{P(\text{“negativo ”}/\text{“ diabético ”})\cdot P(\text{“ diabético ”})+P(\text{“ negativo ”}/\text{“ no diabético ”})\cdot P(\text{“ no diabético”})}$$

$$=\frac{0.96\cdot 0.93}{0.05\cdot 0.07+0.96\cdot 0.93}\approx 0.9961$$

38. En una urna hay cuatro bolas blancas y ocho rojas y en una segunda urna seis bolas blancas y tres rojas. Se eligen dos bolas de la primera urna al azar y sin verlas se pasa a la segunda urna, a continuación se extrae una bola de esta segunda urna, que resulta ser blanca. Calcular la probabilidad de que las bolas pasadas de la primera urna a la segunda fueran una blanca y otra roja.

Solución:

Sean los sucesos

$\{B,B\}_1=\text{“ sacar dos bolas blancas de la urna 1 ”}$

$\{R,R\}_1=\text{“ sacar dos bolas rojas de la urna 1 ”}$

$\{B,R\}_1=\text{“ sacar una blanca y una roja , sin importar el orden , de la urna 1 ”}$

$B_2=\text{“ sacar una blanca de la urna 2 ”}$

$R_2=\text{“ sacar una blanca de la urna 2 ”}$

Las probabilidades de estos sucesos son:

$$P(\{B,B\}_1)=\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}=\frac{1}{11}\approx 0.0909$$

$$P(\{R,R\}_1)=\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}=\frac{14}{33}\approx 0.4242$$

$$P(\{B,R\}_1)=\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}+\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{16}{33}\approx 0.4848$$

$$P(B_2)=P(B_2/\{B,B\}_1)\cdot P(\{B,B\}_1)+P(B_2/\{R,R\}_1)\cdot P(\{R,R\}_1)+P(B_2/\{B,R\}_1)\cdot P(\{B,R\}_1)=$$

$$=\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{11}+\frac{6}{11}\cdot\frac{14}{33}+\frac{7}{11}\cdot\frac{16}{33}=\frac{20}{33}\approx 0.6061$$

$$P(R_2)=1-P(B_2)=\frac{13}{33}\approx 0.3939$$

La probabilidad que debemos calcular es:

$$P(\{B,R\}_1/B_2)=\frac{P(\{B,R\}_1\cap B_2)}{P(B_2)}=\frac{P(B_2/\{B,R\}_1)\cdot P(\{B,R\}_1)}{P(B_2)}=\frac{\frac{7}{11}\cdot\frac{16}{33}}{\frac{20}{33}}=\frac{28}{55}\approx 0.5091$$

39. Antonio tiene tres monedas, dos normales y otra “cargada” en la cual la probabilidad de salir cara es el doble que la de salir cruz. Si Antonio tira una moneda elegida al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara?

b) Si sale cara, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la moneda trucada?

Solución:

a)

En la moneda trucada la probabilidad de salir cara será $\frac{2}{3}$.

$$P(\text{“}cara\text{”})=P(\text{“}cara\text{”}\cap\text{“}normal\text{”})+P(\text{“}cara\text{”}\cap\text{“}cargada\text{”})=$$

$$=P(\text{“}cara\text{”}/\text{“}normal\text{”})\cdot P(\text{“}normal\text{”})+P(\text{“}cara\text{”}/\text{“}cargada\text{”})\cdot P(\text{“}cargada\text{”})=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}\approx 0.5556$$

b)

$$P(\text{“}cargada\text{”}/\text{“}cara\text{”})=\frac{P(\text{“}cargada\text{”}\cap\text{“}cara\text{”})}{P(\text{“}cara\text{”})}=\frac{P(\text{“}cara\text{”}/\text{“}cargada\text{”})\cdot P(\text{“}cargada\text{”})}{P(\text{“}cara\text{”})}=$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{2}{5}=0.4$$

Variables Aleatorias

40. Un vendedor de coches estima las siguientes probabilidades para el número de coches que venderá en una semana.

Número de coches	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Probabilidad	**0.22**	**0.35**	**0.25**	**0.1**	**0.08**

Calcula el número esperado de coches que venderá en una semana. Si el vendedor recibe un salario semanal de 150€, más 150€ adicionales por cada coche vendido, ¿cuál es la probabilidad de que en una semana su salario sea inferior a 600€ en el supuesto de que se sepa que es superior a 150€?

Solución:

X= “nº de coches vendidos”

Se espera vender

E(X)=0·0.22+1·0.35+2·0.25+3·0.1+4·0.08=1.47 coches

Salario < 600 € ⇔ X<3

Salario > 150 € ⇔ X>0

Buscamos, por tanto la probabilidad

$$P(X<3/X>0)=\frac{P(X<3\cap X>0)}{P(X>0)}=\frac{0{,}35+0.25}{0.35+0.25+0.1+0.08}=\frac{0.6}{0.78}\approx 0.7692$$

41. Una variable aleatoria discreta X toma los valores 2, 4, 6, 8, 10 y 12 con probabilidades 0.1, α, β, 0.3, γ y 0.2, respectivamente. Sabiendo que P(X<6)=0.3 y que P(X>6)=0.9, halla los valores de α,β y γ.

Solución:

X	2	4	6	8	10	12
P(X)	0.1	α	β	0.3	γ	0.2

$$\begin{cases} 0.1+\alpha+\beta+0.3+\gamma+0.2=1 \\ 0.1+\alpha=0.3 \\ 0.3+\gamma+0.2=0.9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0.2 \\ \beta=-0.2 \\ \gamma=0.4 \end{cases} \Rightarrow \nexists\, solución$$

42. El número de kilogramos diarios de cierto producto que se vende por kilo, es una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{9000}x^2 & si\ 0<x<30 \\ 0 & en\, otro\, caso \end{cases}$$

Si compramos el kilo a 36 € y lo vendemos a 60 €: ¿Qué porcentaje de días ganaremos más de 240 €? ¿Qué cantidad diaria de beneficios se espera obtener?

Solución:

Ganamos más de 60€ si vendemos más de 10 kg

$$P(X>10)=\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^{10} \frac{1}{9000}x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{27000}\right]_0^{10}=\frac{1}{27}\approx 0.037 \Rightarrow 3.7\%\ de\, los\, días$$

Como el beneficio es de 24€ por kilo vendido la esperanza será:

$$E(24\cdot X)=24\cdot E(X)=24\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx=24\cdot\int_0^{30}\frac{x^3}{9000}dx=\left[\frac{x^4}{1500}\right]_0^{30}=540\,€$$

43. El tiempo, en horas, que tarda un autobús en hacer el recorrido entre dos ciudades es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}3\cdot(3x-x^2) & si\ x\in[1{,}3] \\ 0 & en\, otro\, caso \end{cases}$$

a) Calcula el tiempo medio que se tarda en recorrer el trayecto.

b) Calcula la probabilidad de que la duración de un trayecto sea inferior a dos horas si se sabe que es superior a hora y media.

Solución:

a)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_1^3 0.3\,x\cdot(3x-x^2)dx=\left[0.3\,x^3-0.075\,x^4\right]_1^3=(0.3\cdot 27-0.075\cdot 81)-(0.3-0.075)=\frac{9}{5}$$

El tiempo medio en recorrer el trayecto es de 1,8 horas = 1 hora 48 minutos.

b)

Queremos calcular $P(X<2/X>1{,}5)=\dfrac{P(X<2\cap X>1{,}5)}{P(X>1{,}5)}$

$$P(X<2\cap X>1{,}5)=\int_{1,5}^{2} f(x)\,dx=\int_{1,5}^{2} 0{,}3\cdot(3x-x^2)\,dx=\left[0{,}45\,x^2-0{,}1\,x^3\right]_{1,5}^{2}=$$

$$=(0.45\cdot 4-0.1\cdot 8)-(0.45\cdot 2.25-0.1\cdot 3.375)=\frac{13}{40}=0.325$$

$$P(X>1,5)=\int_{1,5}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{1,5}^{3} 0,3\cdot(3x-x^2)\,dx=\left[0,45x^2-0,1x^3\right]_{1,5}^{3}=$$

$$=(0.45\cdot 9-0.1\cdot 27)-(0.45\cdot 2.25-0.1\cdot 3.375)=\frac{27}{40}=0.675$$

Por lo tanto $P(X<2/X>1,5)=\dfrac{P(X<2\cap X>1,5)}{P(X>1,5)}=\dfrac{0.325}{0.675}=\dfrac{13}{27}\approx 0.4815$

Distribución Binomial

44. Se lanza una moneda al aire 10 veces. Calcula la probabilidad de obtener:

   a) Menos de 5 caras.

   b) 8 caras.

   c) Más de tres pero menos de siete caras.

   d) Más de 5 caras.

Solución:

La variable aleatoria X= “número de caras” sigue una distribución B(10,0.5)

a)

$$P(X<5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$$
$$\binom{10}{0}\cdot 0.5^0\cdot 0.5^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0.5^1\cdot 0.5^9+\binom{10}{2}\cdot 0.5^2\cdot 0.5^8+\binom{10}{3}\cdot 0.5^3\cdot 0.5^7+\binom{10}{4}\cdot 0.5^4\cdot 0.5^6\approx 0.377$$

b)

$$P(X=8)=\binom{10}{8}\cdot 0.5^8\cdot 0.5^2\approx 0.0439$$

c)

$$P(3<X<7)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\binom{10}{4}\cdot 0.5^4\cdot 0.5^6+\binom{10}{5}\cdot 0.5^5\cdot 0.5^5+\binom{10}{6}\cdot 0.5^6\cdot 0.5^4\approx$$
$$\approx 0.6563$$

d)

$$P(X>5)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$$
$$\binom{10}{6}\cdot 0.5^6\cdot 0.5^4+\binom{10}{7}\cdot 0.5^7\cdot 0.5^3+\binom{10}{8}\cdot 0.5^8\cdot 0.5^2+\binom{10}{9}\cdot 0.5^9\cdot 0.5^1+\binom{10}{10}\cdot 0.5^{10}\cdot 0.5^0\approx 0.377$$

45. En un juego se gana cuando al lanzar dos dados, la suma de ambos es 6 ó 7. Si jugamos 20 partidas, calcula la probabilidad de que:

   a) Exactamente ganemos en 10 de ellas.

   b) Ganemos por lo menos dos partidas.

Solución:

Al tirar dos dados y sumar las puntuaciones obtenemos los siguientes casos posibles:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Así pues, la probabilidad de sacar 6 ó 7 es $\dfrac{11}{36}$

Al jugar 20 partidas, la variable aleatoria X= "número de partidas ganadas" sigue una distribución binomial $B\left(20,\frac{11}{36}\right)$

a)

$P(X=10)=\binom{20}{10}\cdot\left(\frac{11}{36}\right)^{10}\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^{10}\approx 0.0342$

b)

$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{20}{0}\cdot\left(\frac{11}{36}\right)^{0}\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^{20}-\binom{20}{0}\cdot\left(\frac{11}{36}\right)^{1}\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^{19}\approx 0.9933$

46. Se sabe que una moneda está trucada de modo que la probabilidad de salir cara es de 5/11. Se lanza la moneda 10 veces. Halla:

a) La probabilidad de sacar 7 caras.

b) La probabilidad de sacar al menos una cruz.

Solución:

El número de caras, X, sigue una distribución binomial $B\left(10,\frac{5}{11}\right)$

a)

$P(X=7)=\binom{10}{7}\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^{7}\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^{7}\approx 0.0781$

b)

$P(X<10)=1-P(X=10)=1-\binom{10}{10}\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^{10}\approx 0.9996$

47. En una asociación juvenil, el 30% de los socios juegan al baloncesto. En un momento dado se trata de reunir gente para formar un equipo, por lo que se pregunta a un grupo de 10 socios si juegan al baloncesto.

a) Describe la variable aleatoria que representa el número de individuos del grupo que practican este deporte.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo escogido dos o más personas jueguen al baloncesto? ¿Cuántos socios de ese grupo se espera que lo practiquen?

Solución:

a)

La probabilidad de que una persona del grupo juegue o no al baloncesto es siempre de 0.3, independientemente de lo que hagan el resto.

La variable aleatoria X= "número de personas del grupo que juega a baloncesto" seguirá una distribución binomial B(10,0.3)

b)

$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{10}{0}0.3^{0}\cdot 0.7^{10}-\binom{10}{1}0.3^{1}\cdot 0.7^{9}\approx 0.8507$

E(X)=10·0.3=3 => se espera que 3 socios del grupo practiquen baloncesto.

48. En un juego se gana cuando al lanzar 2 dados, la suma de ambos es 7. Si jugamos 20 partidas, calcula la probabilidad de que:

a) Exactamente ganemos en 10 de ellas.

b) Ganemos por lo menos dos partidas.

Solución:

La probabilidad de ganar una partida es de $\frac{1}{6}$

Al jugar 20 partidas, la variable aleatoria X= "número de partidas ganadas" sigue una distribución binomial $B\left(20,\frac{1}{6}\right)$

a)

$$P(X=10)=\binom{20}{10}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\approx 0.0005$$

b)

$$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{20}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{20}-\binom{20}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{19}\approx 0.8696$$

49. En una celebración familiar, 15 personas (9 adultos y 6 niños) comieron alimentos contaminados con cierta bacteria. Es conocido que una vez se entra en contacto con esa bacteria hay un 25% de posibilidades de que un adulto manifieste cierta enfermedad intestinal y un 40% de que la manifieste un niño.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no más de 3 adultos manifiesten la enfermedad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 niños manifiesten la enfermedad?

c) ¿Qué número de personas (entre las 15) cabe esperar manifiesten esa enfermedad?

Solución:

Consideramos las variables aleatorias X= "nº de adultos enfermos" e Y= "nº de niños enfermos" las cuales siguen distribuciones $X\in B(9,0.25)$ e $Y\in B(6,0.4)$

a)

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$$
$$=\binom{9}{0}0.25^{0}\cdot 0.75^{9}+\binom{9}{1}0.25^{1}\cdot 0.75^{8}+\binom{9}{2}0.25^{2}\cdot 0.75^{7}+\binom{9}{3}0.25^{3}\cdot 0.75^{6}\approx 0.8343$$

b)

$$P(Y=2)=\binom{6}{2}0.4^{2}\cdot 0.6^{4}\approx 0.311$$

c)

E(X)=0.25·9=2.25

E(Y)=0.4·6=2.4

Los valores esperados son 2.25 adultos y 2.4 niños, en total 4.65 personas.

Distribución normal

50. Si la variable aleatoria X sigue una distribución N(0,1) calcula las siguientes probabilidades:

a) P(X > 2)

b) P(X < -1)

c) P(X > -1.5)

d) P(X = 3)

e) P(1.2 < X < 1.7)

f) P(|X| < 0.5)

g) P(-2.1 < X < -1.2)

h) P(-0.3 < X <1.4)

Solución:

a) $P(X>2)=1-P(X\leq 2)\approx 1-0.9772\approx 0.0228$

b) $P(X<-1)=P(X>1)=1-P(X\leq 1)\approx 1-0.8413\approx 0.1587$

c) $P(X>-1.5)=P(X<1.5)\approx 0.9332$

d) $P(X=3)=0$

e) $P(1.2<X<1.7)=P(X<1.7)-P(X<1.2)\approx 0.9554-0.8849\approx 0.0705$

f) $P(|X|<0.5)=1-2P\cdot(X\geq 0.5)=1-2\cdot(1-P(X<0.5))\approx 1-2\cdot(1-0.6915)\approx 0.3829$
g) $P(-2.1<X<-1.2)=P(1.2<X<2.1)=P(X<2.1)-P(X<1.2)\approx 0.9821-0.8849\approx 0.0972$
h) $P(-0.3<X<1.4)=P(X<1.4)-P(X<-0.3)=P(X<1.4)-P(X>0.3)=$
$P(X<1.4)-(1-P(X<0.3))\approx 0.9192-(1-0.6179)\approx 0.5372$

51. Siendo X una variable aleatoria con distribución N(0,1), calcula el valor de k que cumpla:

a) P(X<k)=0.8 — **c) P(X<k)=0.3**

b) P(X>k)=0.25 — **d) P(-k<X<k)=0.425**

Solución:

a) $P(X<k)=0.8\Rightarrow k\approx 0.84$

b) $P(X>k)=0.25\Leftrightarrow P(X<k)=0.75\Rightarrow k\approx 0.67$

c) $P(X<k)=0.3\Leftrightarrow P(X>-k)=0.3\Leftrightarrow P(X<-k)=0.7\Rightarrow -k\approx 0.52\Rightarrow k\approx -0.52$

d) $P(-k<X<k)=0.425\Leftrightarrow P(X>k)=\dfrac{1-0.425}{2}=0.2875\Leftrightarrow P(X<k)=0.7125\Rightarrow k\approx 0.56$

52. A 500 alumnos se les ha hecho una prueba resultando que las calificaciones se distribuyen normalmente con media 45 y varianza 225.

a) ¿Cuántos alumnos han obtenido una calificación inferior a 24?

b) ¿Cuántos alumnos han obtenido una calificación entre 27 y 37?

c) Si se sabe que un alumno ha obtenido más de 60 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido más de 66?

Solución:

La variable aleatoria X= “calificación obtenida” sigue una distribución N(45,15)

a)

$P(X<24)=P\left(\dfrac{X-45}{15}<\dfrac{24-45}{15}\right)=P(Y<-1.4)$ donde $Y\in N(0,1)$

Según las tablas de la N(0,1)

$P(Y<-1.4)=1-P(Y<1.4)\approx 1-0.9192\approx 0.0808$

Lo cual quiere decir que un 8.08% de los alumnos obtiene una calificación inferior a 24. Como hay 500, entonces 40 obtendrá una puntuación inferior a 24.

b)

$P(27<X<37)=P\left(\dfrac{27-45}{15}<\dfrac{X-45}{15}<\dfrac{37-45}{15}\right)=P(-1.2<Y<-0.53)$ donde $Y\in N(0,1)$

Según las tablas de la N(0,1)

$P(-1.2<Y<-0.53)=P(0.53<Y<1.2)=P(Y<1.2)-P(Y<0.53)\approx 0.8849-0.7019\approx 0.183$

Lo cual quiere decir que un 18.3% de los alumnos obtiene una calificación entre 27 y 37. Como hay 500, entonces 91.5 ≈ 92 obtendrá una puntuación entre 27 y 37.

c)

Buscamos $P(X>66/X>60)=\dfrac{P(X>66\cap X>60)}{P(X>60)}=\dfrac{P(X>66)}{P(X>60)}$

$P(X>66)=P\left(\dfrac{X-45}{15}>\dfrac{66-45}{15}\right)=P(Y>1.4)=1-P(Y<1.4)\approx 0.0808$

$P(X>60)=P\left(\dfrac{X-45}{15}>\dfrac{60-45}{15}\right)=P(Y>1)=1-P(Y<1)\approx 0.1587$

$P(X>66/X>60)\approx\dfrac{0.0808}{0.1587}\approx 0.5091$

53. Para aprobar cierta oposición es necesario obtener un mínimo de 100 puntos. Se sabe que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal de media 110 y desviación típica 15.

a) ¿Qué probabilidad tiene un opositor elegido al azar de aprobar?

b) Si sabemos que hay 1000 opositores para 300 plazas, ¿qué puntuación mínima debería pedirse para ajustar el número de plazas con el número de aprobados?

Solución:

a)

X= "puntuación" $X \in N(110,15)$

$P(X \geq 100) = P\left(\frac{X-110}{15} \geq \frac{100-110}{15}\right) = P\left(Y \geq -\frac{2}{3}\right)$ donde $Y = \frac{X-110}{15} \in N(0,1)$

Según las tablas de la normal

$P\left(Y \geq -\frac{2}{3}\right) = P\left(Y \leq \frac{2}{3}\right) \approx 0.7454$

b)

Si llamamos k a la puntuación mínima para aprobar, debería cumplirse $P(X \geq k) = 0.3$.

De esta manera la variable aleatoria Z= "nº de aprobados" seguiría una distribución binomial B(1000 , 0.3) y su esperanza sería de 300 opositores aprobados.

Para obtener el valor k deseado debemos normalizar la variable X y utilizar las tablas:

$P(X \geq k) = 0.3 \Leftrightarrow P(X < k) = 0.7 = P\left(\frac{X-110}{15} < \frac{k-110}{15}\right)$

observando la tabla $\frac{k-110}{15} \approx 0.52 \Rightarrow k \approx 117.8$

54. Un saltador de longitud salta una media de 8 metros con desviación típica de 20 cm. Para poder ir a la próxima olimpiada es necesario tener una marca de 8,30 metros. ¿Qué probabilidad tiene de conseguir esta marca en un salto? ¿Y si realiza 10 saltos?

Solución:

a)

$X = \text{“ } Longitud\, del\, salto \text{ ”} \in N(8, 0.2)$

$P(X \geq 8.3) = P\left(\frac{X-8}{0.2} \geq \frac{8.3-8}{0.2}\right) = P(Y \geq 1.5) = 1 - P(Y < 1.5) \approx 0.0668 \;\; ; \;\; Y = \frac{X-8}{0.2} \in N(0,1)$

b)

Si consideramos la variable Z= "número de saltos de al menos 8,30 m", entonces $Z \in B(10, 0.0668)$

La probabilidad buscada es:

$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.0668^0 \cdot 0.9332^{10} \approx 0.4991$

55. El precio por metro cuadrado de terreno edificable en una determinada ciudad sigue una distribución normal de media 570 € por metro cuadrado con desviación típica de 42 €.

a) ¿Qué probabilidad hay de que en una zona de esa ciudad el precio sea menor que 600 € el metro cuadrado?

b) ¿Qué precio habría que pagar como mínimo en un terreno que estuviese entre el 3% de los terrenos más caros?

c) ¿Qué precio habría que pagar como máximo si el terreno estuviese entre el 15% de los más baratos?

Solución:

X= “Precio del metro cuadrado” ; $X \in N(570,42)$; $Y = \frac{X-570}{42} \in N(0,1)$

a)

$P(X<600) = P\left(\frac{X-570}{42} < \frac{600-570}{42}\right) = P\left(Y < \frac{5}{7}\right) \approx 0.7611$

b)

$P(X \geq k) = 0.03 \Leftrightarrow P\left(Y \geq \frac{k-570}{42}\right) = 0.03 \Rightarrow \frac{k-570}{42} \approx 1.88 \Rightarrow k \approx 648.96 \quad €/m^2$

c)

$P(X \leq t) = 0.15 \Leftrightarrow P\left(Y \leq \frac{t-570}{42}\right) = 0.15 \Rightarrow \frac{t-570}{42} \approx -1.04 \Rightarrow t \approx 526.32 \quad €/m^2$

56. La vida útil de una marca de lámparas sigue una distribución normal de media 1200 horas y desviación típica 250 horas. ¿Qué proporción de lámparas tiene un tiempo de vida inferior a 1050 horas?, ¿qué proporción de lámparas tiene un tiempo de vida superior a 1350 horas? Explica brevemente el porqué de la relación entre los resultados. ¿Qué proporción de lámparas tiene un tiempo de vida entre 1050 y 1350 horas?

Solución:

X= “duración de la lámpara” ; $X \in N(1200,250) \Rightarrow Y = \frac{X-1200}{250} \in N(0,1)$

$P(X<1050) = P\left(\frac{X-1200}{250} < \frac{1050-1200}{250}\right) = P(Y<-0.6) = P(Y>0.6) = 1-P(Y \leq 0.6) \approx \mathbf{0.2743}$

$P(1050<X<1350) = P\left(\frac{1050-1200}{250} < \frac{X-1200}{250} < \frac{1350-1200}{250}\right) =$

$= P(-0.6<Y<0.6) = P(Y<0.6) - P(Y \leq -0.6) = P(Y<0.6) - P(Y \geq 0.6) =$

$P(Y<0.6) - (1-P(Y<0.6)) = 2 \cdot P(Y<0.6) - 1 \approx \mathbf{0.4514}$

57. El número de visitantes que diariamente acuden a una atracción se distribuye según una normal N(2000,250)

a) Hallar la probabilidad de que un día determinado el número de visitantes no supere los 2100.

b) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera los visitantes sean más de 1500.

c) En un mes de treinta días, ¿en cuántos días cabe esperar que el número de visitantes supere los 2210?

Solución:

X= “nº diario de visitantes” ; $X \in N(2000,250) \Rightarrow Y = \frac{X-2000}{250} \in N(0,1)$

a)

$P(X<2100) = P\left(\frac{X-2000}{250} < \frac{2100-2000}{250}\right) = P(Y<0.4) \approx 0.6554$

b)

$P(X>1500) = P\left(\frac{X-2000}{250} > \frac{1500-2000}{250}\right) = P(Y>-2) = P(Y<2) \approx 0.9772$

c)

$P(X>2210) = P\left(\frac{X-2000}{250} > \frac{2210-2000}{250}\right) = P(Y>0.84) = 1-P(Y \leq 0.84) \approx 0.2005$

Si consideramos la variable aleatoria Z= “nº de días con más de 2210 visitantes” entonces

$Z \in B(30, 0.2005)$ y E(Z) = 30·0.2005 = **6,015 días**.

58.

a) En un test realizado a 1000 alumnos, las puntuaciones se distribuyen normalmente con media 100 y desviación típica 6. Calcula el porcentaje de alumnos con puntuaciones superiores a 112

b) Supongamos que de la variable anterior conocemos que su media es 100, pero que desconocemos su desviación típica. Si se sabe que 719 de esos 1000 alumnos han obtenido puntuaciones inferiores a 129, ¿cuánto vale la desviación típica?

Solución:

a)

X= "puntuación" ; $X \in N(100, \sigma) \Rightarrow Y = \frac{X-100}{\sigma} \in N(0,1)$

$$P(X>112) = P\left(\frac{X-100}{6} > \frac{112-100}{6}\right) = P(Y>2) = 0.0228$$

b)

$$0.719 = P(X<129) = P\left(\frac{X-100}{\sigma} < \frac{129-100}{\sigma}\right) = P\left(Y < \frac{29}{\sigma}\right)$$

Mirando la tabla de la N(0,1)

$$\frac{29}{\sigma} = 0.58 \Rightarrow \sigma = 50$$

59. Se sabe que el 10% de los alumnos de Bachillerato son fumadores. En base a esto, calcula la probabilidad aproximada de que, por lo menos haya 310 alumnos fumadores de los 3000 que se presentan al examen de selectividad.

Solución:

P("fumador")= 0.1

X= "nº de alumnos fumadores" ; $X \in B(3000, 0.1)$

Como 3000>30, 3000·0.1 ≥ 5 y 3000·0.9 ≥ 5 entonces $X \approx Y \in N(300, \sqrt{270})$

Con la aproximación de medio punto:

$$P(X \geq 310) \approx P(Y > 309.5) = P\left(\frac{Y-300}{\sqrt{270}} > \frac{309.5-300}{\sqrt{270}}\right) \approx P(Z>0.58) = 1 - P(Z \leq 0.58) \approx 0.281$$

Donde $Z = \frac{Y-300}{\sqrt{270}} \in N(0,1)$

60. El 60% de los habitantes de un pueblo están a favor de la construcción de una depuradora. Escogidas al azar 100 personas de ese pueblo, ¿cuál es la probabilidad de que más de 55 de ellas no apoyen la construcción?

Solución:

P("no apoyar la construcción")=0.4

X= "nº de personas en contra de la construcción"; $X \in B(100, 0.4)$

Como 100 ≥ 30, 100·0.4 ≥ 5 y 100·0.6 ≥ 5 entonces $X \approx Y \in N(40, \sqrt{24})$

Con la aproximación de medio punto:

$$P(X>55) \approx P(Y>55.5) = P\left(\frac{Y-40}{\sqrt{24}} > \frac{55.5-40}{\sqrt{24}}\right) \approx P(Z>3.16) = 1 - P(Z \leq 3.16) \approx 0.0008$$

61. El cociente intelectual de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20. Para un grupo especial se eligen aquellos alumnos con un coeficiente superior a 110. En un grupo de 9 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que más de 5 sean elegidos?

Solución:

X = "cociente intelectual"; $X \in N(100, 20) \Rightarrow Y = \frac{X-100}{20} \in N(0,1)$

$$P(X>110) = P\left(\frac{X-100}{20} > \frac{110-100}{20}\right) = P(Y>0.5) = 1 - P(Y \le 0.5) \approx 0.3085$$

Z= "nº de elegidos" ; $Z \in B(9, 0.3085)$

Como 9·0.3085= 2.7765 <5 entonces Z no se puede aproximar por una normal.

$$P(Z>5) = \binom{9}{6} 0.3085^6 \cdot 0.6195^3 + \binom{9}{7} 0.3085^7 \cdot 0.6195^2 + \binom{9}{8} 0.3085^8 \cdot 0.6195 + \binom{9}{9} 0.3085^9 \approx 0.0291$$

62. Supongamos que tiramos una moneda 100 veces.

a) ¿Cuál es el número de caras esperado?

b) ¿Cuál es la distribución a la que se adapta el experimento?

c) Calcula el valor α tal que la probabilidad de que el número de caras esté entre 50-α y 50+α sea del 95%

Solución:

a) b)

Suponiendo que la moneda no esté cargada, el número de caras, X, seguirá una distribución binomial $B(100, 0.5)$ así pues, la esperanza será E(X)=100·0.5=50 caras.

c)

Como 100 > 30 y 100·0.5>5 entonces $X \approx Y \in N(50,5)$

$$P(50-\alpha < X < 50+\alpha) \approx P(50.5-\alpha < Y < 49.5+\alpha) = P\left(\frac{0.5-\alpha}{5} < \frac{Y-50}{5} < \frac{-0.5+\alpha}{5}\right) =$$

$$2 \cdot P\left(Z < \frac{-0.5+\alpha}{5}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{-0.5+\alpha}{5}\right) = 0.975 \text{ ; con } Z = \frac{Y-50}{5} \in N(0,1)$$

Buscando en la tabla de la N(0,1): $\frac{-0.5+\alpha}{5} \approx 1.96 \Rightarrow \alpha \approx 1.96 \cdot 5 + 0.5 = 10.3$

Por lo tanto P(40 ≤ X ≤ 60) ≈ 0.95

63. Según una encuesta de opinión se sabe que el 80% de la población adolescente de una determinada ciudad sigue una serie de TV. Se elige una muestra aleatoria de 225 adolescentes de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que sigan la serie de TV entre 170 y 190 (incluidos) adolescentes?

Solución:

X= "nº de adolescentes que siguen la serie"

Suponemos que lo que haga cada adolescente es independiente del resto, así pues, $X \in B(225, 0.8)$

Como $225 \ge 30$, $225 \cdot 0.8 \ge 5$ y $225 \cdot 0.2 \ge 5$ entonces $X \approx Y \in N(180, 6)$

Teniendo en cuenta la corrección de medio punto:

$$P(170 \le X \le 190) \approx P(169.5 \le X \le 190.5) = P\left(\frac{169.5-180}{6} \le \frac{X-180}{6} \le \frac{190.5-180}{6}\right) =$$

$$= P(-1.75 \le Z \le 1.75) = 2 \cdot P(Z \le 1.75) - 1 \approx 0.9198 \qquad \text{siendo } Z \in N(0,1)$$

64. Se está planificando una encuesta con pequeñas empresas de una población. Se escoge una muestra de empresas a partir de la guía de teléfonos. Por experiencia, se sabe que sólo la mitad de las empresas con las que se contacta responden. Si se contacta con 150 empresas:

a) ¿Cuál es el número esperado de empresas que responden?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo respondan 70 empresas?

Solución:

X= "número de empresas que responden" ; $X \in B(150, 0.5)$

a)

$E(X)=150 \cdot 0.5=75$ empresas

b)

Como $150 \geq 30$ y $150 \cdot 0.5 \geq 5$ entonces $X \approx Y \in N(75, \sqrt{37.5})$

Aplicando la corrección de medio punto:

$$P(X \leq 70) \approx P(Y \leq 70.5) = P\left(\frac{Y-75}{\sqrt{37.5}} \leq \frac{70.5-75}{\sqrt{37.5}}\right) \approx P(Z \leq -0{,}73) \;\; ; \;\; Z \in N(0,1)$$

$$P(Z \leq -0{,}73) = P(Z \geq 0{,}73) = 1 - P(Z < 0{,}73) \approx 1 - 0.7673 = 0.2327$$

65. Sabiendo que P(A)=0.5, P(B)=0.3 y $P(A \cap \overline{B}) = 0.4$

a) Razona si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcula:

- **P(A/B)**
- $\boldsymbol{P(A/A \cap B)}$
- $\boldsymbol{P((A \cap B)/(A \cup B))}$
- $\boldsymbol{P(A/A \cup B)}$

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{r} 0.5 = P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \\ P(A \cap \overline{B}) = 0.4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.1$$

$$\left.\begin{array}{r} P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15 \\ P(A \cap B) = 0.1 \end{array}\right\} \Rightarrow A \; y \; B \; no \; son \; independientes$$

b)

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A/A \cap B) = \frac{P(A \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$$

$$P((A \cap B)/(A \cup B)) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} =$$

$$= \frac{0.1}{0.5 + 0.3 - 0.1} = \frac{1}{7}$$

$$P(A/A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0.5}{0.5+0.3-0.1}=\frac{5}{7}$$

66. En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es de 0,1. Si este se produce, la probabilidad de que la alarma suene es de 0,95. La probabilidad de que funcione la alarma sin que haya incidente es de 0,03. Si ha funcionado la alarma, calcular la probabilidad de que no haya habido incidente.

Solución:

I= "ocurre un incidente" ; A= "suena la alarma"

$P(I)=0.1$

$P(A/I)=0.95$

$P(A/\bar{I})=0.03$

$$P(\bar{I}/A)=\frac{P(\bar{I}\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A/\bar{I})\cdot P(\bar{I})}{P(A/\bar{I})\cdot P(\bar{I})+P(A/I)\cdot P(I)}=\frac{0.03\cdot 0.9}{0.03\cdot 0.9+0.95\cdot 0.1}\approx 0.2213$$

67. De una baraja española de 40 cartas se sacan dos.

a) Calcular la probabilidad de que las dos sean oros o las dos sean figuras.

b) Hallar la probabilidad de que a lo sumo una de ellas sea de oros.

Solución:

a)

$$\boldsymbol{P(\text{“}sacar\,2\,oros\text{”})}=P(\text{“}oro\,la\,1^a\text{”})\cdot P(\text{“}oro\,la\,2^a\text{”}/\text{“}oro\,la\,1^a\text{”})=\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}=\boldsymbol{\frac{1}{156}}$$

$$\boldsymbol{P(\text{“}sacar\,2\,figuras\text{”})}=P(\text{“}figura\,la\,1^a\text{”})\cdot P(\text{“}figura\,la\,2^a\text{”}/\text{“}figura\,la\,1^a\text{”})=\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}=\boldsymbol{\frac{11}{130}}$$

$$\boldsymbol{P(\text{“}sacar\,2\,oros\text{”}\cap\text{“}sacar\,2\,figuras\text{”})=}$$

$$=P(\text{“}oro\,y\,figura\,la\,1^a\text{”})\cdot P(\text{“}oro\,y\,figura\,la\,2^a\text{”}/\text{“}oro\,y\,figura\,la\,1^a\text{”})=\frac{3}{40}\cdot\frac{2}{39}=\boldsymbol{\frac{1}{260}}$$

$$P(\text{“}sacar\,2\,oros\text{”}\cup\text{“}sacar\,2\,figuras\text{”})=P(\text{“}sacar\,2\,oros\text{”})+P(\text{“}sacar\,2\,figuras\text{”})-$$

$$P(\text{“}sacar\,2\,oros\text{”}\cap\text{“}sacar\,2\,figuras\text{”})=\frac{1}{156}+\frac{11}{130}-\frac{1}{260}\approx\mathbf{0.0872}$$

b)

$$P(\text{“}al\,menos\,una\,sea\,oro\text{”})=1-P(\text{“}ninguna\,sea\,oro\text{”})=$$

$$=1-P(\text{“}no\,oro\,la\,1^a\text{”})\cdot P(\text{“}no\,oro\,la\,2^a\text{”}/\text{“}no\,oro\,la\,1^a\text{”})=1-\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\approx 0.4423$$

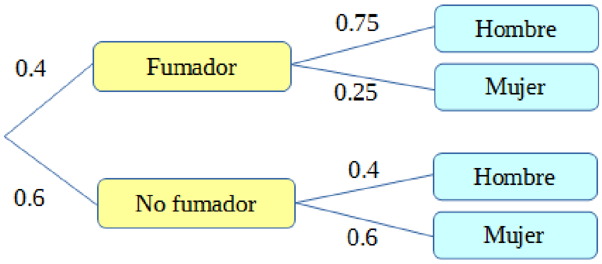
68. Un médico ha observado que el 40% de sus pacientes fuma, y de estos el 75% son hombres. Entre los que no fuman, el 60% son mujeres. Calcula:

a) La probabilidad de que un paciente no fumador sea hombre.

b) La probabilidad de que un paciente sea hombre fumador.

c) La probabilidad de que un hombre sea fumador.

Solución:



a) $P(\text{“}Hombre\text{”}/\text{“}No\ fumador\text{”})=0.4$

b) $P(\text{“}Hombre\text{”}\cap\text{“}Fumador\text{”})=P(\text{“}Hombre\text{”}/\text{“}Fumador\text{”})\cdot P(\text{“}Fumador\text{”})=0.75\cdot 0.4=0.3$

c)

$$P(\text{“}Fumador\text{”}/\text{“}Hombre\text{”})=\frac{P(\text{“}Fumador\text{”}\cap\text{“}Hombre\text{”})}{P(\text{“}Hombre\text{”})}=$$

$$\frac{P(\text{“}Hombre\text{”}/\text{“}Fumador\text{”})\cdot P(\text{“}Fumador\text{”})}{P(\text{“}Hombre\text{”}/\text{“}Fumador\text{”})\cdot P(\text{“}Fumador\text{”})+P(\text{“}Hombre\text{”}/\text{“}No\ fumador\text{”})\cdot P(\text{“}No\ fumador\text{”})}=$$

$$=\frac{0.75\cdot 0.4}{0.75\cdot 0.4+0.4\cdot 0.6}=\frac{0.3}{0.54}=\frac{5}{9}\approx 0.5556$$

69. La probabilidad de que determinado jugador de baloncesto anote un tiro libre es del 70%. Si tira 30 tiros libres, calcula:

a) La probabilidad de que anote al menos 25 tiros.

b) El número mínimo de tiros libres, cuya probabilidad de anotar sea de al menos el 90%.

Solución:

X= “nº de tiros libres anotados”; $X\in B(30,0.7)$

$$\left.\begin{array}{r}30\cdot 0.7=21>5\\ 30\cdot 0{,}3=9>5\end{array}\right\}\Rightarrow X\approx Y\in N(21,\sqrt{6.3})\ ;\ Z=\frac{Y-21}{\sqrt{6.3}}\in N(0{,}1)$$

Con la corrección de medio punto:

a)

$$P(X\geq 25)\approx P(Y>24.5)=P\left(\frac{Y-21}{\sqrt{6.3}}>\frac{24.5-21}{\sqrt{6.3}}\right)=P(Z>1.39)=1-P(Z\leq 1.39)\approx 0.0823$$

b)

$$P(X\geq k)=0.9\Leftrightarrow P(Y\geq k-0.5)=0.9\Leftrightarrow P\left(Z\geq\frac{k-21.5}{\sqrt{6.3}}\right)=0.9\Leftrightarrow\frac{k-21.5}{\sqrt{6.3}}\approx -1.28$$

Con lo cual $k\approx 21.5-1.28\cdot\sqrt{6.3}\approx 18.28$

Así pues el jugador anotará al menos 18 tiros libres con una probabilidad superior al 90%

70. Sabiendo que P(A)=0.6 P(B)=0.4 y $P(A/\overline{B})=\frac{2}{3}$

a) Calcula:

- $P(A/B)$
- $P(A\cap B)$
- $P(B/A)$

- $\boldsymbol{P(A \cup B)}$
- $\boldsymbol{P(\overline{B}/(A \cup B))}$

b) Justifica si los sucesos A y B son o no independientes.

Solución:

$P(\overline{B})=1-P(B)=0.6$

$P(A)=P(A/B)\cdot P(B)+P(A/\overline{B})\cdot P(\overline{B}) \Leftrightarrow 0.6=P(A/B)\cdot 0.4+\frac{2}{3}\cdot 0.6 \Leftrightarrow \boldsymbol{P(A/B)=0.5}$

$P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B) \Leftrightarrow \boldsymbol{P(A\cap B)=0.2}$

$\boldsymbol{P(B/A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.2}{0.6}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

$\boldsymbol{P(A\cup B)}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.4-0.2=\mathbf{0.8}$

$\boldsymbol{P(\overline{B}/(A\cup B))}=\frac{P(\overline{B}\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{0.6-0.2}{0.8}=\mathbf{0.5}$

Como $P(A)\cdot P(B)=0.24$ y $P(A\cap B)=0.2$, los sucesos A y B no son independientes.

71. La probabilidad de que una máquina fabrique una pieza defectuosa es de 0.01. Por cada pieza fabricada correctamente, la empresa gana 0,1 €, mientras que por cada pieza defectuosa, la empresa pierde 1€. Si se fabrican 10000 piezas:

a) ¿Cuál es la ganancia esperada?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa gane más de 901€?

Solución:

a)

El número de piezas defectuosas, X, sigue una distribución binomial B(10000, 0.01), como E(X)=10000·0.01=100, se espera que salgan 100 piezas defectuosas y 9900 correctas. Así pues la ganancia esperada es 0.1·9900 – 1·100=**890 €**

b)

Lo primero que tendremos que calcular es cuántas piezas defectuosas se pueden producir para ganar más de 780€:

$0.1\cdot(10000-X)-1\cdot X>901 \Leftrightarrow 1000-0.1X-X>901 \Leftrightarrow -1.1X>901-1000 \Leftrightarrow -1.1X>-99 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1.1X<99 \Leftrightarrow X<90$

Como $X\in B(10000, 0.01)$, 10000·0.01>5 y 10000·0.99>5 , entonces $X\approx Y\in N(100,\sqrt{99})$

$P(X<90)\approx P(Y<89.5)=P\left(\frac{Y-100}{\sqrt{99}}<\frac{-10.5}{\sqrt{99}}\right)\approx P(Z<-1.05)=1-P(Z<1.05)\approx\mathbf{0.1469}$

72. En una urna hay 7 bolas blancas y 5 bolas negras. Sacamos dos bolas de la urna consecutivamente. Calcula la probabilidad de:

a) Sacar al menos una bola blanca. (0,5 puntos)

b) Que la segunda bola que saquemos sea blanca. (0,75 puntos)

c) Que la primera bola fuese negra, si sabemos que la segunda ha salido blanca. (0,75 puntos)

Solución:

a) $P(B_1 \cup B_2) = 1 - P(N_1 \cap N_2) = 1 - P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = 1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = 0.\widehat{84}$

b)

$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2/N_1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = 0{,}58\hat{3}$

c) $P(N_1/B_2) = \frac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(N_1) \cdot P(B_2/N_1)}{P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2/N_1)} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11}}{\frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11}} = 0.\widehat{45}$