1. Razona si los vectores (-1,0,1), (1,1,1) y (0,-1,1) forman una base de $\Re^3$. De ser así, calcula las coordenadas del vector (-1,3,4) en dicha base.

Solución:

Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$ los vectores son linealmente independientes, y por tanto forman una base de $\Re^3$

Para averiguar las coordenadas hay que resolver la ecuación:

x·(-1,0,1)+y· (1,1,1)+z·(0,-1,1)=(-1,3,4)

La cual es equivalente al sistema

$$\begin{cases} -x+y=-1 \\ y-z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

O matricialmente

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Calcula el ángulo formado por los vectores (1,-1,2) y (-3,0,1)

Solución:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1\cdot(-3)+(-1)\cdot 0+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+0^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{60}} \Rightarrow \alpha \approx 97^o 25' 03''$$

3. Halla una base del espacio vectorial de dimensión 2 formado por los vectores ortogonales a (1,2,3)

Solución:

Los vectores de dicho espacio han de cumplir la ecuación:

$(1,2,3)\cdot(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z=0$

La cual puede considerarse como un sistema compatible indeterminado (rango A =1)

Para expresar sus soluciones introducimos los parámetros $y=\alpha$ y $z=\beta$, por tanto:

$x=-2y-3z=-2\alpha-3\beta; \quad y=\alpha; \quad z=\beta \quad con\ \alpha,\beta\in\Re$

Es decir, los vectores ortogonales a (1,2,3) son de la forma:

$(-2\alpha-3\beta,\alpha,\beta)=\alpha(-2,1,0)+\beta(-3,0,1); \quad \alpha,\beta\in\Re$

O lo que es lo mismo, son combinación lineal de los vectores (-2,1,0) y (-3,0,1), que al ser linealmente independientes, forman la base buscada.

4. Calcula la superficie del triángulo de vértices A=(-1,2,0), B=(2,1,-3) y C=(0,0,-1)

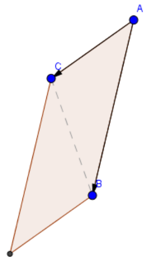
Solución:

$\overrightarrow{AB}=(3,-1,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-2,-1)$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ coincide con el valor del área del paralelogramo de vértices A,B y C

El área del triángulo buscado vendrá dado por:

$$Área=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}$$



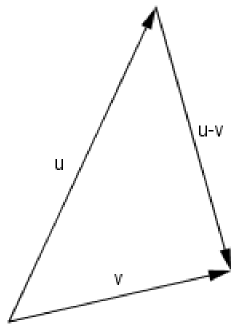
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-5,0,-5)$$

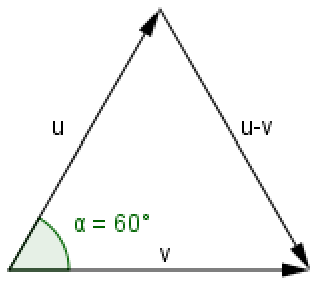
$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-5)^2+0^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Por lo tanto el área buscada será $\frac{5\sqrt{2}}{2}\ u^2$

5. Dibuja dos vectores y el vector diferencia de ambos. Calcula el ángulo que forman dos vectores distintos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tienen el mismo módulo que el vector diferencia de ambos $\vec{u}-\vec{v}$. (Puede serte útil el dibujo previo)

Solución:





Si $|\vec{u}|=|\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|$ entonces los tres vectores forman un triángulo equilátero y por tanto el ángulo es de 60º.

6. Demuestra que $|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2=(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+|\vec{u}\times\vec{v}|^2$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\Rightarrow(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\cos^2\alpha\\ |\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,\alpha\Rightarrow|\vec{u}\times\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot sen^2\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+|\vec{u}\times\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot(sen^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

7. Sabiendo que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{u}|=5$ y $|\vec{u}+\vec{v}|=8$ calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

$8^2=|\vec{u}+\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2+|\vec{u}|^2+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}=4^2+5^2+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}$

Por lo tanto

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{8^2-4^2-5^2}{2}=11{,}5$$

Por otra parte

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=0{,}575\Rightarrow\alpha=54^o\,54'\,1''$$

8. Sean los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,2,a)$ y $\vec{w}=(2,0,0)$

a) Halla los valores de a para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

b) Determina los valores de a para que los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{w}$ sean ortogonales.

Solución:

a)

$\vec{u},\vec{v}\ y\ \vec{w}\ son\ linealmente\ independientes\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\neq0$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&a\\2&0&0\end{vmatrix}=2\cdot(a-2)\neq0\Leftrightarrow a\neq2$$

entonces

$\vec{u},\vec{v}\ y\ \vec{w}\ son\ linealmente\ independientes\Leftrightarrow a\neq2$

b)
$\vec{u}+\vec{v}=(3,3,a+1)$, $\vec{u}-\vec{w}=(-1,1,1)$
$\vec{u}+\vec{v}$ *y* $\vec{u}-\vec{w}$ *ortogonales* $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{w})=0$ $\Leftrightarrow$ $-3+3+a+1=0$ $\Leftrightarrow$ $a=-1$

9.
a) Encuentra para qué valor de λ los vectores (1,1,λ), (2,-1,λ) y (3,0,1) son linealmente independientes.
b) Para el valor λ=1 expresa el vector $\vec{v}=(1,5,1)$ como combinación lineal de los vectores del apartado anterior.

Solución:
Para que sean linealmente independientes se ha de cumplir:
a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -1+3\lambda+3\lambda-2\neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

b)
Hemos de encontrar α, β y γ que cumplan:
$(1,5,1)=\alpha(1,1,1)+\beta(2,-1,1)+\gamma(3,0,1)$
O equivalentemente

$$\begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma=1 \\ \alpha-\beta=5 \\ \alpha+\beta+\gamma=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=7/3 \\ \beta=-8/3 \\ \gamma=4/3 \end{cases}$$

10. Determina los valores de a y b, a>0, para que los vectores $\vec{v}_1=(a,b,b)$, $\vec{v}_2=(b,a,b)$ y $\vec{v}_3=(b,b,a)$ sean unitarios y ortogonales dos a dos.

Solución:

$$1=|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|=|\vec{v}_3|=\sqrt{a^2+2b^2} \Leftrightarrow a^2+2b^2=1$$
$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0 \Leftrightarrow 2ab+b^2=0$$
$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_3 \Leftrightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_3=0 \Leftrightarrow 2ab+b^2=0$$
$$\vec{v}_2 \perp \vec{v}_3 \Leftrightarrow \vec{v}_2\cdot\vec{v}_3=0 \Leftrightarrow 2ab+b^2=0$$

resumiendo, ha de cumplirse

$$\begin{cases} a^2+2b^2=1 \\ 2ab+b^2=0 \end{cases}$$

$$2ab+b^2=0 \Leftrightarrow b\cdot(2a+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \\ \text{ó} \\ b=-2a \Rightarrow a^2+8a^2=1 \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3} \end{cases}$$

Tenemos pues, 4 soluciones:

$$\begin{cases} a=-1 \ , \ b=0 \\ a=1 \ , \ b=0 \\ a=-\frac{1}{3} \ , \ b=\frac{2}{3} \\ a=\frac{1}{3} \ , \ b=\frac{-2}{3} \end{cases}$$

11. Encuentra los vectores unitarios que son perpendiculares a $\vec{v}=(1,0,1)$ y forman un ángulo de 60º con $\vec{w}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$

<u>Solución</u>:

$\vec{u}=(x,y,z)$

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow x+z=0$

$\frac{1}{2}=\cos 60^{o}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{2}}{2}+\frac{z}{2}\Leftrightarrow x+\sqrt{2}\,y+z=1$

Juntando las dos ecuaciones anteriores tenemos $\sqrt{2}\,y=1\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Por otra parte, como $|\vec{u}|=1$ tenemos que $x^2+\frac{1}{2}+z^2=1\Leftrightarrow x^2+z^2=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x^2+z^2=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} z=-x \\ 2x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\end{cases}$$

Tenemos entonces dos soluciones:

$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$

12. Calcula un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas $(1,0,2)$ y $(2,1,0)$. Indica cuántas soluciones hay.

<u>Solución</u>:

Hacemos $(1,0,2)\times(2,1,0)$ para obtener un vector ortogonal

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-2,4,1)$$

Dividiendo entre su módulo obtenemos un vector unitario con la misma dirección y sentido.

$|(-2,4,1)|=\sqrt{21}$, por tanto $\left(\frac{-2}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$ es uno de los vectores buscado.

Tan solo hay dos soluciones, el vector anterior y su opuesto.

13. Resuelve la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{x}\times(2,1,-1)=(1,3,5)$$

<u>Solución</u>:

$\vec{x}=(x,y,z)$

$$\vec{x}\times(2,1,-1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-y-z,x+2z,x-2z)=(1,3,5)$$

$$\begin{cases}-y-z=1\\ x+2z=3\\ x-2z=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-1/2\\ z=-1/2\end{cases}$$

por tanto $\vec{x}=\left(4,-\frac{1}{2,}-\frac{1}{2}\right)$

14. Sean en $\Re^3$ los vectores $\vec{e}=(2,0,0)$, $\vec{u}=(1,0,-1)$ y $\vec{v}=(-2,3,-2)$.

a) Calcula el producto vectorial $\vec{e}\times\vec{u}$.

b) Calcula el seno del ángulo θ que forman $\vec{e}$ y $\vec{u}$.

c) Calcula el ángulo φ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

a)

$$\vec{e}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{j}=(0,2,0)$$

b)

$$|\vec{e}\times\vec{u}|=|\vec{e}|\cdot|\vec{u}|\cdot sen\theta \Rightarrow sen\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) $\cos\phi=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{-2+2}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=0\Rightarrow\phi=90^o$

15. Dados $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(-1,4,2)$ calcula el vector $\vec{w}$, con $|\vec{w}|=1$, tal que el producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ sea máximo.

Solución:

Como $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=|\vec{u}\times\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\alpha$ donde α es el ángulo que forman $(\vec{u}\times\vec{v})$ y $\vec{w}$.

Entonces $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ sera máximo cuando $\cos\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=0^o$, es decir el $\vec{w}$ tiene la misma dirección y sentido que $(\vec{u}\times\vec{v})$.

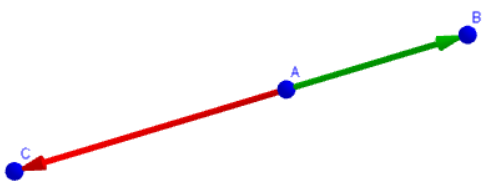
El vector buscado será, por tanto, $\dfrac{(\vec{u}\times\vec{v})}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\dfrac{(-8,-5,6)}{\sqrt{125}}$

16. Comprueba si los puntos A=(1,2,3), B=(5,0,5) y C=(-5,5,0) están alineados.

Solución:

Los puntos A, B y C están alineados si y sólo si los vectores $\overrightarrow{AB}=(4,-2,2)$ y $\overrightarrow{AC}=(-6,3,-3)$ son linealmente dependientes, o lo que es lo mismo $\exists\alpha\in\Re\,/\,\alpha\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. Para que esto ocurra, es necesario que $\dfrac{-6}{4}=\dfrac{3}{-2}=\dfrac{-3}{2}=\alpha$.

En este caso α=-1.5, es decir $\overrightarrow{AC}=-1.5\cdot\overrightarrow{AB}$ y por tanto son linealmente dependientes, lo cual implica que los puntos están alineados.



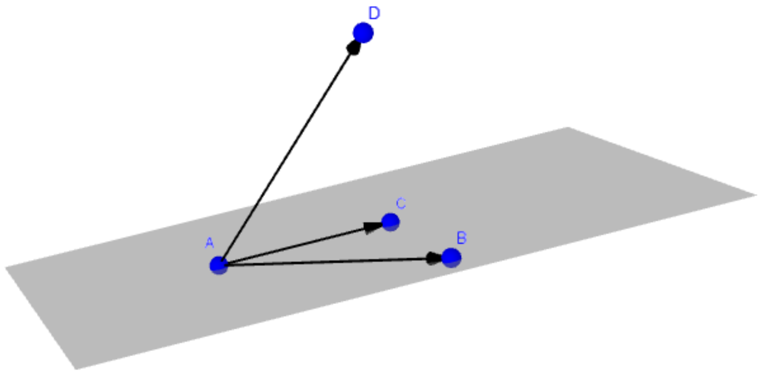
17. Estudia si los puntos A=(2,-1,1), B=(2,3,4), C=(0,1,1) y D=(1,1,7) son coplanarios.

Solución:

Los puntos A, B, C y D son coplanarios si y solo si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes.

$\overrightarrow{AB}=(0,4,3)$ $\quad\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$ $\quad\overrightarrow{AD}=(-1,2,6)$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 42 \neq 0$ entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente independientes, y por tanto los puntos A, B, C y D no son coplanarios.



18.

a) Calcular un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero distinto sentido, que el vector $\vec{v}=(-2,1,2)$.

b) Calcula otro vector de módulo 1 que sea ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{u}=(3,-1,4)$. Indica todas las soluciones posibles.

<u>Solución</u>:

a)

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

b)

$$\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=6\,\vec{i}+14\,\vec{j}-1\,\vec{k}=(6,14,-1)$$

$$|\vec{v}\times\vec{u}|=\sqrt{6^2+14^2+(-1)^2}=\sqrt{233}$$

Hay dos soluciones: $\left(\frac{6}{\sqrt{233}},\frac{14}{\sqrt{233}},-\frac{1}{\sqrt{233}}\right)$ y su opuesto $\left(\frac{-6}{\sqrt{233}},-\frac{14}{\sqrt{233}},\frac{1}{\sqrt{233}}\right)$

19. Razona si los puntos (1,0,1), (2,7,1), (5,2,2) y (2,2,7) son o no coplanarios. De no serlo, calcula el volumen del tetraedro que delimitan.

<u>Solución</u>:

$\vec{u}=(1,7,0)$, $\vec{v}=(4,2,1)$ y $\vec{w}=(1,2,6)$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=-151\neq 0\Rightarrow no\,son\,coplanarios\,.$$

$Volumen=\frac{1}{6}|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=\frac{1}{6}|-151|=\frac{151}{6}\approx 25,17\,u^3$

20. Los puntos P=(-2,3,2), Q=(-1,2,4) y R=(2,5,1) son vértices de un rectángulo. Encuentra el cuarto vértice razonando adecuadamente el procedimiento seguido.

Solución:

Primero hay que ver cuál es el vértice que está en medio

$\overrightarrow{PQ}=(1,-1,2)$, $\overrightarrow{QR}=(3,3,-3)$ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}=-6\neq 0\Rightarrow Q\,no\,está\,entre\,P\;y\,R$

$\overrightarrow{PQ}=(1,-1,2)$ $\overrightarrow{PR}=(4,2,-1)$ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0\Rightarrow P\,está\,entre\,Q\;y\,R$

Para obtener el punto buscado haremos $P+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}=Q+\overrightarrow{PR}=\mathbf{(3,4,3)}$

21.

a) Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}|=|\vec{s}|=2$, y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60º, calcula $\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s})$. (0,75 puntos)

b) Si el producto escalar del vector $\vec{u}+\vec{v}$ por si mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u}-\vec{v}$ por si mismo es 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$? (0,75 puntos)

c) Calcula el producto vectorial de los vectores $\vec{u}=(2,-3,1)$ y $\vec{v}=(-1,2,3)$ (0,5 puntos)

a) $\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s})=\vec{w}\cdot\vec{w}-\vec{w}\cdot\vec{s}=|\vec{w}|^2-|\vec{w}|\cdot|\vec{s}|\cos 60^o=4-4\cdot\frac{1}{2}=2$

b)

$25=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$

$9=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$

Restando:

$16=4\vec{u}\cdot\vec{v}\Rightarrow \boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=4}$

c) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-11\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}=\mathbf{(-11,-7,1)}$

22. Dada la recta de ecuación:

$\boldsymbol{r:\frac{x-5}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}}$

a) Indica un vector director.

b) ¿Pertenece el punto (9,-1,1) a la recta?

c) Escribe las ecuaciones de una recta que tenga la misma dirección que la dada y pase por (-1,1,0)

Solución:

a)

(4,-1,2) es un vector director de la recta.

b)
Sustituyendo las coordenadas en la ecuación de la recta, tenemos:
$$\frac{9-5}{4}=\frac{-1}{-1}=\frac{1+1}{2}\Leftrightarrow 1=1=1$$
por lo tanto, el punto (9,-1,1) está en la recta.
c)
Si tienen la misma dirección podemos usar el mismo vector director. Las ecuaciones continuas quedarían:
$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$$

23. Calcula una ecuación vectorial del plano $p\equiv 2x-3y+2z-1=0$

Solución:
Solución 1
Para obtener un punto del plano, lo más sencillo es hacer x=y=0 en la ecuación del plano, en cuyo caso tenemos el punto (0,0,1/2)
El vector (2,-3,2) es un vector normal al plano, así pues, cualquier vector del plano cumplirá
$$(2,-3,2)\cdot(x,y,z)=0\Leftrightarrow 2x-3y+2z=0\Leftrightarrow x=\frac{3y-2z}{2}$$
Introduciendo parámetros, las soluciones de la ecuación serán
$$\left(\frac{3\alpha-2\beta}{2},\alpha,\beta\right)=\alpha\cdot\left(\frac{3}{2},1,0\right)+\beta\cdot(-1,0,1);\quad \alpha,\beta\in\Re$$
Tenemos por tanto, que los vectores $\left(\frac{3}{2},1,0\right)$ y $(-1,0,1)$ son una base del espacio de vectores del plano *p*.
Con todo esto podemos escribir una ecuación vectorial de *p*:
$$p\equiv(x,y,z)=\left(0,0,\frac{1}{2}\right)+\alpha\cdot\left(\frac{3}{2},1,0\right)+\beta\cdot(-1,0,1);\quad \alpha,\beta\in\Re$$
Solución 2
Podemos obtener 3 puntos del plano dando valores:
Si x=y=0 obtenemos el punto $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$, con x=z=0 obtenemos $\left(0,-\frac{1}{3},0\right)$ y con y=z=0 obtenemos $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$
Podemos obtener dos vectores del plano haciendo $\left(0,-\frac{1}{3},0\right)-\left(0,0,\frac{1}{2}\right)=\left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$ y
$$\left(\frac{1}{2},0,0\right)-\left(0,0,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$
Y la ecuación del plano:
$$p\equiv\left(0,0,\frac{1}{2}\right)+\alpha\cdot\left(0,-\frac{1}{3,}-\frac{1}{2}\right)+\beta\cdot\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$

24. Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos $A=(-1,2,0)$, $B=(2,1,-3)$ y $C=(0,0,-1)$

Solución:
Los vectores $\vec{AB}=(3,-1,-3)$ y $\vec{AC}=(1,-2,-1)$ son vectores directores del plano
Cualquier otro punto P=(x,y,z), de dicho plano cumplirá la condición de que los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AP}=(x+1,y-2,z)$ son linealmente dependientes. Es decir:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+1)-3(y-2)-6z+z-6(x+1)+3(y-2)=0 \Leftrightarrow -5x-5z-5=0$$

Simplificando nos queda la ecuación x+z+1=0

25. Sea r la recta intersección de los planos x-4y-z=10 y 3x-4y+z=-2. Escribe la ecuación paramétrica de r

<u>Solución</u>

Los puntos de r serán solución del sistema que forman las ecuaciones de los dos planos

$$\begin{cases} x-4y-z=10 \\ 3x-4y+z=-2 \end{cases}$$

El cual es compatible indeterminado, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Si pasamos la variable z al segundo miembro y aplicamos la regla de Cramer, obtenemos:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & z+10 \\ 3 & -4 & -z-2 \end{array} \right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z+10 & -4 \\ -z-2 & -4 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-4z-40-4z-8}{8} = -z-6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z+10 \\ 3 & -z-2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-z-2-3z-30}{8} = \frac{-z}{2} - 4$$

Por lo tanto podemos escribir unas ecuaciones paramétricas de r:

$$\begin{cases} x=-t-6 \\ y=\dfrac{-1}{2}t-4 \qquad t \in \Re \\ z=t \end{cases}$$

26.

a) ¿Pueden existir $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$? Justifica la respuesta.

b) Determina todos los posibles vectores $\vec{u}=(a, 0, b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

a)

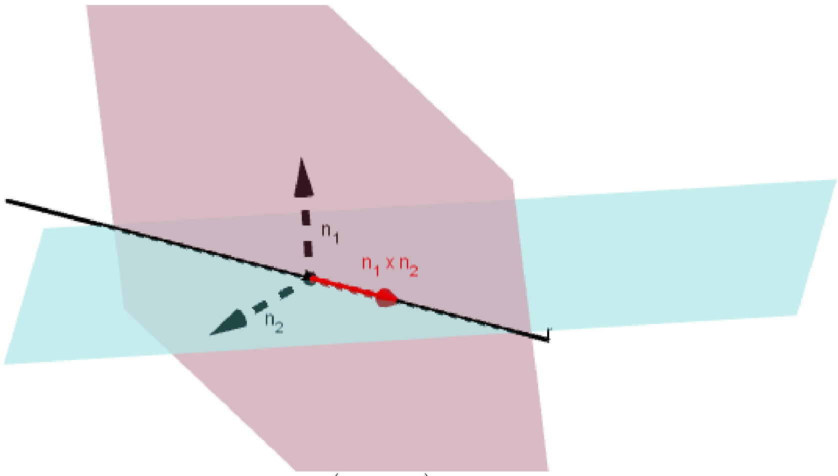
Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$ tendríamos $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{8}{5} > 1$ lo cual es imposible.

b)

La recta r está expresada como la intersección de dos planos, cuyos vectores normales son $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, -1, -1)$.

Si queremos un vector director de la recta, deberemos hacer

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = (0, 2, -2)$$



Como los vectores buscados $\vec{u}=(a,0,b)$ son perpendiculares a la recta, entonces
$(a,0,b)\cdot(0,2,-2)=0 \Leftrightarrow -2b=0 \Leftrightarrow b=0$
Y como $|\vec{u}|=8$ entonces hay dos soluciones posibles $(8,0,0)$ y $(-8,0,0)$

27. Escribe la ecuación del haz de planos que contiene a la recta $r\equiv(-1,2,3)+\lambda\cdot(2,1,-4);\ \ \lambda\in\Re$

Solución:
Las ecuaciones continuas de r son:
$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-4}$$
Con la primera y segunda ecuación obtenemos $x+1=2y-4 \Leftrightarrow x-2y+5=0$ y con la segunda y tercera $-4y+8=z-3 \Leftrightarrow 4y+z-11=0$. Estas son las ecuaciones de dos planos distintos que contienen a la recta r, así pues todo plano del haz que generen contendrá a la recta r. Por lo tanto la ecuación buscada es:
$\lambda\cdot(x-2y+5)+\mu\cdot(4y+z-11)=0\ \ ;\ \ \lambda,\mu\in\Re$

28. Sean el plano $\pi\equiv 2x-3y+z=4$ y la recta $r\equiv(-1,2,3)+\lambda\cdot(2,1,-4);\ \ \lambda\in\Re$
a) Estudia la posición relativa que hay entre el plano y la recta.
b) Calcula los puntos de corte, si los hay.

Solución
a)
El vector director de la recta, (2,1,-4) y el vector normal del plano, (2,-3,1) no son ortogonales:
$(2,1,-4)\cdot(2,-3,1)=4-3-4=-3\neq 0$
Por lo tanto la recta es secante al plano.
b)
Para calcular los puntos de corte, se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:
$2\cdot(-1+2\lambda)-3\cdot(2+\lambda)+3-4\lambda=4 \Leftrightarrow -3\lambda-5=4 \Leftrightarrow \lambda=-3$
El punto de corte será:
$(-1,2,3)+(-3)\cdot(2,1,-4)=(-7,-1,15)$

29.
a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que pasa por el punto P=(1,-1,0) y es paralela a los planos $\pi_1\equiv x+y=2$ y $\pi_2\equiv x-y+z=1$
b) Calcula también las ecuaciones paramétricas de r y un vector director de r.

Solución:
a)
Si buscamos expresar la recta r como intersección de dos planos, lo más cómodo es buscar los planos paralelos a π_1 y π_2 que pasan por el punto P.
Los planos paralelos a π_1 son de la forma $x+y+D_1=0$, y sustituyendo las coordenadas de P vemos que el que pasa por el punto es $x+y=0$. De la misma manera, los paralelos a π_2 son de la forma $x-y+z+D_2=0$ y el que pasa por P es $x-y+z-2=0$
Así pues, las ecuaciones implícitas de r son:
$$r\equiv\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$$
b)
Para encontrar un vector director multiplicamos vectorialmente los vectores normales a los planos:
$$(1,1,0)\times(1,-1,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}=(1,-1,-2)$$
Teniendo en cuenta que r pasa por P, las ecuaciones paramétricas son:
$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-\lambda\ ; \quad \lambda\in\Re \\ z=-2\lambda \end{cases}$$

30. Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\frac{x-5}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$ y al punto (3,2,1)

Solución:
Sabemos que los puntos A=(5,0,-1) y B=(3,2,1) están en el plano, así pues también lo estará el vector $\vec{AB}=(-2,2,2)$. Como la recta r está en el plano, su vector director, (4,-1,-2), también seguirá la dirección del plano.
Como estos dos vectores son linealmente independientes, su producto vectorial nos dará un vector normal al plano:
$$(-2,2,2)\times(4,-1,2)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=6\vec{i}+12\vec{j}-6\vec{k}=(6,12,-6)$$
Así pues la ecuación general o implícita del plano buscado tendrá la forma:
6x+12y-6z+D=0
y como el punto (3,2,1) pertenece a dicho plano:
$$6\cdot3+12\cdot2-6\cdot1+D=0\Leftrightarrow 36+D=0\Leftrightarrow D=-36$$
Por tanto la ecuación será
6x+12y-6z-36=0
o simplificando:
x+2y-x-6=0

31. Dadas las rectas $r:(-5,0,3)+\lambda\cdot(3,1,0)\ ;\ \lambda\in\Re$ y $s:\begin{cases} x-3z-2=0 \\ y=-1 \end{cases}$, calcula dos puntos $A\in r$ y $B\in S$ tal que el vector $\vec{AB}$ es perpendicular a r y a s.

Solución:
En primer lugar obtendremos la ecuación vectorial de s:
$$r:\begin{cases} x=3z+2 \\ y=-1 \end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases} x=3\mu+2 \\ y=-1 \\ z=\mu \end{cases}\ \mu\in\Re\ \Rightarrow r:(2,-1,0)+\mu(3,0,1)\ \ \mu\in\Re$$

Por lo tanto A y B serán de la forma:
$A=(-5+3\lambda,\lambda,3)$
$B=(2+3\mu,-1,\mu)$
Y por tanto el vector $\overrightarrow{AB}$ será de la forma
$\overrightarrow{AB}=(7+3\mu-3\lambda,-1-\lambda,\mu-3)\ ;\ \lambda,\mu\in\Re$
Como el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a r y s, deberá cumplir:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot(3,1,0)=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot(3,0,1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}21+9\mu-9\lambda-1-\lambda=0\\ 21+9\mu-9\lambda+\mu-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9\mu-10\lambda=-20\\ 10\mu-9\lambda=-18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=0\\ \lambda=2\end{cases}$$

Con lo cual tenemos $\overrightarrow{AB}=(1,-3,-3)$ y sustituyendo en las ecuaciones vectoriales de r y s: **A=(2,-1,0)** y **B=(1,2,3)**.

32. Estudia la posición relativa de las rectas $\boldsymbol{r:\begin{cases}5x+y-2z-1=0\\ x+y+2z-9=0\end{cases}}$ **y** $\boldsymbol{s:\frac{x+5}{2}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z-1}{2}}$

Solución:
Para estudiar la posición relativa necesitamos un punto y un vector director para cada una de las rectas. Por lo tanto empezaremos buscando una ecuación vectorial de r

$$\begin{cases}5x+y-2z-1=0\\ x+y+2z-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+y=2z+1\\ x+y=-2z+9\end{cases}$$

Restando tenemos $4x=4z-8\Leftrightarrow x=z-2$ y sustituyendo en la segunda ecuación:

$y=-x-2z+9\Leftrightarrow y=-3z+11$

Por lo tanto los puntos de la recta serán de la forma $(z-2,-3z+11,z)$, a partir de esto podemos obtener una ecuación vectorial de r:

$\boxed{r:(-2,11,0)+\lambda\cdot(1,-3,1)\ ;\lambda\in\Re}$

Tenemos entonces, los puntos $A=(-2,11,0)\in r$ y $B=(-5,4,1)\in s$ así como los vectores $\vec{u}=(1,-3,1)$ y $\vec{v}=(2,-6,2)$, directores de r y s respectivamente.
La posición relativa de r y s dependerá del rango de las matrices formadas por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}=(-3,-7,1)$:

$$C=\begin{pmatrix}1&2\\-3&-6\\1&2\end{pmatrix}\text{ y }C'=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-3&-6&-7\\1&2&1\end{pmatrix}$$

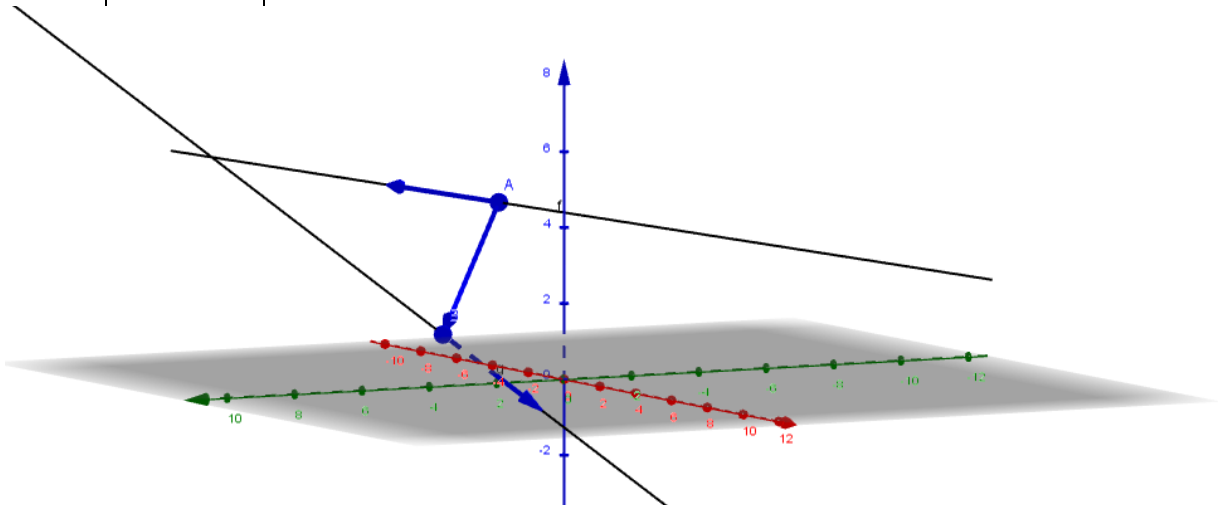
Como rango(C) =1 y $\begin{vmatrix}2&-3\\-6&-7\end{vmatrix}=-32\neq 0\Rightarrow rango(C')=2$ las rectas son paralelas. Dicho de otro modo, las rectas llevan la misma dirección ya que sus vectores directores son linealmente dependientes y no son coincidentes, ya que el vector $\overrightarrow{AB}$ no está en la dirección de las rectas. Por lo tanto sólo pueden ser paralelas.

33. Estudia la posición relativa de las rectas $\boldsymbol{r:\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{5}=z-5}$ **y**
$\boldsymbol{s:(-3,2,1)+\lambda(2,-2,-2)\ ;\ \lambda\in\Re}$

Solución:
Tenemos los puntos $A=(2,3,5)\in r$ y $B=(-3,2,1)\in s$ así como los vectores $\vec{u}=(3,5,1)$ y $\vec{v}=(2,-2,-2)$, directores de r y s respectivamente.
La posición relativa de r y s dependerá del rango de las matrices formadas por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}=(-5,-1,-4)$:

$$C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix} \text{ y } C'=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 5 & -2 & -1\\ 1 & -2 & -4\end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix}3 & 2 & -5\\ 5 & -2 & -1\\ 1 & -2 & -4\end{vmatrix}=96\neq 0$ entonces rango(C’)=3 y rango(C)=2. Por lo tanto las rectas se cruzan



34. Calcula la distancia del punto P=(-2,1,0) al plano π: 3x-2y+4z-2=0

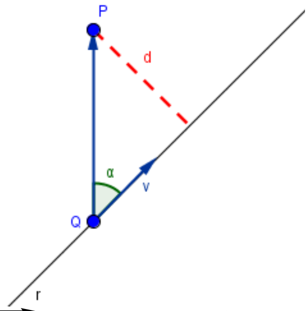
Solución:

$$d(P,\pi)=\frac{|3\cdot(-2)-2\cdot 1+4\cdot 0-2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{10}{\sqrt{29}}$$

35. Calcula la distancia del punto P=(-2,1,0) a la recta $r:\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{5}=z-5$

De la recta r conocemos el punto Q=(2,3,5) y el vector director $\vec{v}=(3,5,1)$

La distancia entre P y r vendrá dada por:



$$d=|\overrightarrow{QP}|\cdot sen\,\alpha=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$\overrightarrow{QP}=(-4,-2,-5)$$

$$\overrightarrow{QP}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & -2 & -5\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix}=23\vec{i}-11\vec{j}-14\vec{k}=(23,-11,-14)$$

$$\left.\begin{array}{r}|\overrightarrow{QP}\times\vec{v}|=\sqrt{23^2+(-11)^2+(-14)^2}=\sqrt{846}\\ |\vec{v}|=\sqrt{3^2+5^2+1^2}=\sqrt{35}\end{array}\right\}\Rightarrow d(P,r)=\frac{\sqrt{846}}{\sqrt{35}}\approx 5{,}916\,u$$

36. Calcula la distancia entre las rectas $r: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=z-1$ y $s:(-2,1,3)+\lambda(3,1,0);\ \lambda\in\Re$

<u>Solución</u>:

En primer lugar hemos de ver si las rectas son paralelas. Para ello tomamos el vector director de r, $\vec{u}=(2,-1,1)$ y el de s, $\vec{v}=(3,1,0)$ y miramos si son linealmente independientes.

Como el rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es 2 (ya que $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$), entonces los vectores son linealmente independientes y las rectas no son paralelas.

Como las rectas no son paralelas, la distancia entre ellas vendrá dada por la fórmula:

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{AB},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

en donde A es un punto de r y B es un punto de s (en nuestro caso A=(-1,0,1) y B=(-2,1,3))

$$\vec{AB}=(-1,1,2)$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}=(-1,3,5) \quad\Rightarrow\quad |\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{35}$$

$$[\vec{AB},\vec{u},\vec{v}]=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=14$$

Por lo tanto $d(r,s)=\frac{14}{\sqrt{35}}\approx 2{,}366\,u$

37. Sean el punto P=(-1,2,0) y el plano π:2x-3y+z=8. Calcula:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano π

b) La distancia d del punto P al plano π.

c) La ecuación de otro plano, paralelo a π y distinto de él, que diste de P la misma distancia d.

<u>Solución</u>:

a)

(2,-3,1) es un vector normal al plano, y por tanto es director a la recta buscada.

Una ecuación vectorial de la recta sería (-1,2,0) + λ·(2,-3,1) ; λ∈R

b)

La distancia d vendrá dada por la expresión

$$d(P,\pi)=\frac{|2\cdot(-1)-3\cdot 2+0-8|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{16}{\sqrt{14}}$$

c)

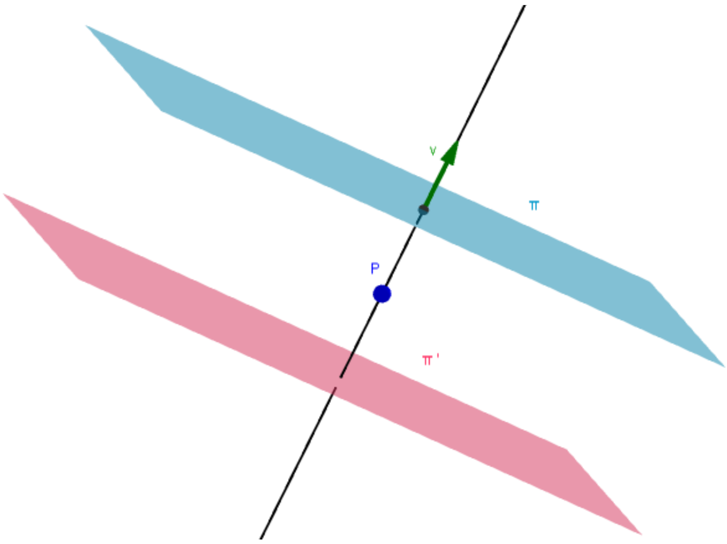
El plano buscado π’, al ser paralelo a π, tendrá una ecuación de la forma 2x-3y+z+D=0

Y deberá verificar

$$d(P,\pi')=\frac{|2\cdot(-1)-3\cdot 2+0+D|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{|D-8|}{\sqrt{14}}=\frac{16}{\sqrt{14}}=d(P,\pi)$$

Es decir $|D-8|=16\Rightarrow\begin{cases} \mathbf{D=24} \\ D=-8 \end{cases}$

Por tanto π’:2x-3y+z+24=0



38. Dados los puntos A=(1,0,1), B=(2,-1,0), C=(0,1,1) y P=(0,-3,2), calcula:

a) La distancia del punto P al punto A

b) La distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B.

c) La distancia del punto P al plano que pasa por los puntos A, B y C.

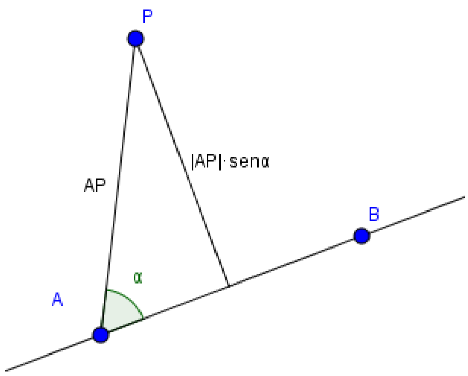
Solución:

a)

$$d(A,P)=\sqrt{(0-1)^2+(-3-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{11}\ u$$

b)

$$r\equiv A+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=(1,0,1)+\lambda\cdot(1,-1,-1);\ \ \lambda\in\Re$$



$$d(P,r)=|\overrightarrow{AP}|\cdot sen\,\alpha=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)\ ,\ \ \overrightarrow{AP}=(-1,-3,1)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=-4\,\vec{i}-4\,\vec{k}=(-4,0,-4)$$

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}\ u$$

c)

A=(1,0,1), $\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-1\cdot(x-1)-y+0\cdot(z-1)=0\Leftrightarrow-x-y+1=0$$

$$d(P,\pi)=\frac{|-0-(-3)+1|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\ u$$

39. Considera la recta r que pasa por los puntos A=(1,0,-1) y B=(-1,1,0)

a) Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por C=(-2,3,2)

b) Calcula la distancia de r a s.

Solución:

a)

El vector $\overrightarrow{AB}=(-2,1,1)$ es un vector director, tanto de r como de s.

Por tanto la ecuación vectorial de s será: $s\equiv(-2,3,2)+\lambda\cdot(-2,1,1);\quad \lambda\in\Re$

b)

Como r y s son paralelas, su distancia coincidirá con la distancia de C a la recta r.

$d(s,r)=d(C,r)=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$ (ver distancia punto-recta)

$\overrightarrow{AC}=(-3,3,3)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}=(0,3,-3)$$

$$\left.\begin{array}{r} |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18} \\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}=\sqrt{6} \end{array}\right\}\Rightarrow d(s,r)=d(C,r)=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}$$

40. Sea r la recta definida por $\begin{cases} \boldsymbol{x+2y-z=3} \\ \boldsymbol{2x-y+z=1} \end{cases}$

a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto (1,1,0)

Solución:

a)

El haz de planos que contiene a la recta r tiene como ecuación:

$\alpha\cdot(x+2y-z-3)+\beta\cdot(2x-y+z-1)=0;\quad \alpha,\beta\in\Re$

Como el plano x+2y-z=3 no pasa por el origen, entonces podemos suponer $\alpha\neq0$ y el resto de planos del haz cumplen:

$(x+2y-z-3)+\lambda\cdot(2x-y+z-1)=0;\quad \lambda\in\Re\quad(\lambda=\beta/\alpha)$

Para encontrar la ecuación del plano, sólo tenemos que sustituir las coordenadas del origen en el haz y calcular el valor de λ :

$-3+\lambda\cdot(-1)=0\Rightarrow\lambda=-3$

Por tanto la ecuación del plano buscado es:

$(x+2y-z-3)-3\cdot(2x-y+z-1)=0\Leftrightarrow-5x+5y-4z=0$

b)

Los vectores directores de r serán normales al plano. Para obtener un vector director de $r\equiv\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ podemos hacer $\vec{v}=(1,2,-1)\times(2,-1,1)=(1,-3,-5)$

Así pues la ecuación del plano será $x-3y-5z+D=0$ y como pasa por el punto (1,1,0) tenemos que D=2

Como nos piden las ecuaciones paramétricas del plano, necesitamos dos vectores perpendiculares al vector normal (1,-3,-5), y que sean linealmente dependientes para generar el plano. Si nos damos cuenta, los vectores (1,2,-1) y (2,-1,1) cumplen esas condiciones.

Por lo tanto, unas ecuaciones paramétricas del plano serían:

$$\begin{cases} x=1+\alpha\cdot 1+\beta\cdot 2 \\ y=1+\alpha\cdot 2+\beta\cdot(-1) \\ z=\alpha\cdot(-1)+\beta\cdot 1 \end{cases} \quad \alpha,\beta\in\Re$$

41. Se consideran los puntos en el espacio A=(1,-1,1) y B=(2,2,2)

a) Halla el punto medio de A y B

b) Da la ecuación del plano respecto al cual A y B son simétricos.

Solución:

a) El punto medio se obtendrá sumando las coordenadas de A y B y dividiendo entre dos:

$$M=\left(\frac{1+2}{2},\frac{-1+2}{2},\frac{1+2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

b)

El vector $\overrightarrow{AB}=(1,3,1)$ será un vector normal del plano buscado, por lo que dicho plano tendrá una ecuación de la forma: **x+3y+z+D=0**

Como el punto M está contenido en este plano, sus coordenadas deben cumplir la ecuación:

$$\frac{3}{2}+3\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+D=0\Leftrightarrow D=-\frac{9}{2}$$

Por lo tanto, una ecuación del plano que buscamos será:

$$\boxed{x+3y+z-\frac{9}{2}=0}$$

42.

a) Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \text{ y } s\equiv\begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$$

b) Calcula la distancia entre las rectas r y s

Solución:

a)

Necesitamos un punto y un vector director para cada una de las rectas. Para ello resolvemos los sistemas:

$$\begin{cases} x+y=1+z \\ 2x+y=1+2z \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ 1+2z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1+z-1-2z}{-1}=z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 2 & 1+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1+2z-2-2z}{-1}=1$$

Por lo tanto las soluciones del sistema (puntos de la recta) son de la forma $(\lambda,1,\lambda)$, así pues:

$$\boxed{r:(0,1,0)+\lambda(1,0,1);\lambda\in\Re}$$

$$\begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=z \\ y=6 \end{cases}$$

las soluciones en este caso son de la forma $(\mu,6,\mu)$, y por tanto $\boxed{s:(0,6,0)+\mu(1,0,1);\mu\in\Re}$

Como las dos rectas tienen el mismo vector director, han de ser paralelas o coincidentes. Si observamos que el punto (0,6,0) pertenece a s pero no a r (no cumple las ecuaciones) concluimos que **r y s son paralelas**.

b)

Al ser paralelas, la distancia de r a s será la misma que la de cualquier punto de r a s, por ejemplo el (0,1,0).

Para calcular dicha distancia primero calculamos el vector que va de (0,6,0) a (0,1,0). Dicho vector será (0,-5,0). Entonces obtendremos la distancia buscada haciendo:

$$d(r,s)=\frac{|(0,-5,0)\times(1,0,1)|}{|(1,0,1)|}=\frac{|(5,0,-5)|}{|(1,0,1)|}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{25}=5u$$

43.

a) Estudia la posición relativa del plano $\pi\equiv x-y-z=a$ y la recta $r\equiv\begin{cases}2x+y+az=0\\ x-2y=0\end{cases}$ en función del parámetro $a\in\Re$

b) Calcula la distancia entre π y r para cada valor de $a\in\Re$

Solución:

a)

Es obvio que (0,0,0) es un punto de r. Para obtener un vector director de r haremos

$$\vec{v}=(2,1,a)\times(1,-2,0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & a\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=2a\vec{i}+a\vec{j}-5\vec{k}=(2a,a,-5)$$

por tanto $r:(0,0,0)+\lambda\cdot(2a,a,-5);\ \lambda\in\Re$

Si hacemos el producto escalar de $\vec{v}$ por el vector normal de π: $\vec{n}=(1,-1,-1)$ puede ocurrir:

- $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$, en cuyo caso o bien la recta está contenida en el plano, o bien son paralelos
- $\vec{v}\cdot\vec{n}\neq 0$ en cuyo caso la recta es secante al plano.

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{n}=2a-a+5=5+a}$$

Por lo tanto si $a\neq-5$ entonces la recta y el plano son secantes.

En el caso $a=-5$ hay que ver si la recta es paralela al plano o está contenida dentro de él. Para ello comprobamos si un punto de la recta, por ejemplo el (0,0,0), cumple la ecuación del plano.

Como $a=-5\neq 0$, este punto no satisface la ecuación del plano, por lo tanto la recta es paralela al plano.

b)

Si $a\neq-5$ la distancia es cero, ya que la recta y el plano son secantes.

Si $a=-5$ al ser la recta paralela al plano, la distancia será la que hay desde cualquier punto de la recta al plano, por ejemplo el (0,0,0)

$$d(r,\pi)=\frac{|0-0-0+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{3}}u$$

44. Sean los puntos A=(1,2,-1), P=(0,0,5), Q=(1,0,4) y R=(0,1,6).

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A, es paralela al plano que pasa por los puntos P, Q y R y tal que la primera componente de su vector director es doble que la segunda.

b) Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por P, Q y R.

Solución:

a)

Obtendremos un vector normal al plano haciendo $\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(1,-1,1)$

Cualquier vector director de la recta $\vec{v}=(a,b,c)$ ha de cumplir las ecuaciones:

$$\begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{n}=0 \\ a=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ a=2b \end{cases}$$

si sustituimos en la primera ecuación, tenemos que c=-b y por tanto los vectores directores son de la forma $(2b, b, -b);\ b\in\Re$, por lo tanto podemos tomar como vector director de la recta el (2,1,-1)

La ecuación de la recta será $\boxed{(1,2,-1)+\lambda(2,1,-1);\ \lambda\in\Re}$

b)

Para obtener la ecuación del plano, tenemos en cuenta que si el vector $\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(1,-1,1)$ es normal al plano, este tendrá una ecuación de la forma x-y+z+D=0.

Como el punto P=(0,0,5) está en el plano, sus coordenadas han de verificar la ecuación, por lo tanto D=-5 y la ecuación del plano, será $\boxed{x-y+z-5=0}$

Calculamos la distancia de A=(1,2,-1) al plano:

$$\boxed{d=\frac{|1-2-1-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{3}}\ u}$$

45. Sean los puntos P=(1,4,-1), Q=(0,3,-2) y la recta $r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y-z=4 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por P, por un punto R de la recta r y es perpendicular a la recta que pasa por Q y por R.

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π: x-y-3=0

Solución:

a)

Los puntos de la recta r son de la forma (1, 4+z, z), por lo tanto el punto R será: $(1, 4+\lambda, \lambda)$, siendo λ un número real por determinar.

El vector $\overrightarrow{QR}=(1, 1+\lambda, 2+\lambda)$ es normal al plano, con lo cual la ecuación del plano será de la forma: $x+(1+\lambda)\cdot y+(2+\lambda)\cdot z+D=0$

Para obtener la ecuación del plano buscado, debemos determinar los valores de λ y D. Para ello tenemos en cuenta que los puntos $R=(1, 4+\lambda, \lambda)$ y P=(1,4,-1) están en el plano. Con lo cual:

$$\begin{cases} 1+(1+\lambda)\cdot(4+\lambda)+(2+\lambda)\cdot\lambda+D=0 \\ 1+(1+\lambda)\cdot 4+(2+\lambda)\cdot(-1)+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda^2+7\lambda+5+D=0 \\ 3\lambda+3+D=0 \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones, obtenemos:

$$2\lambda^2+4\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

Si λ=-1, entonces D=0 y el plano buscado es $\boxed{x+z=0}$

b)

Los puntos de la recta r son de la forma (1, 4+z, z)=(1,4,0)+(0,z,z), con lo cual

$r:(1,4,0)+\lambda\cdot(0,1,1);\ \lambda\in\Re$

Por lo tanto tenemos un vector director de la recta $\vec{v}=(0,1,1)$ y un vector normal del plano $\vec{n}=(1,-1,0)$

El ángulo vendrá dado por la expresión:

$$sen\,\alpha=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|0-1+0|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=30^o$$

46. Dados los puntos P=(1,0,-1) y Q=(-1,2,3), encuentra un punto R de la recta $r:\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-3}{-1}$ que cumpla que el triángulo de vértices P, Q y R es isósceles, siendo $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ los lados iguales del triángulo.

Solución:

La ecuación vectorial de la recta es $r:(-3,-4,3)+\lambda\cdot(2,3,-1);\ \ \lambda\in\Re$. Así pues, el punto R ha de ser de la forma $(-3+2\lambda,-4+3\lambda,3-\lambda)$ con λ por determinar.

$$d(P,R)=\sqrt{(-4+2\lambda)^2+(-4+3\lambda)^2+(4-\lambda)^2}=\sqrt{14\lambda^2-48\lambda+48}$$
$$d(Q,R)=\sqrt{(-2+2\lambda)^2+(-6+3\lambda)^2+(-\lambda)^2}=\sqrt{14\lambda^2-44\lambda+40}$$

Como $d(P,R)=d(Q,R)$ tendremos:

$$14\lambda^2-48\lambda+48=14\lambda^2-44\lambda+40 \Leftrightarrow 14\lambda^2-44\lambda+16=0 \Leftrightarrow -4\lambda+8=0 \Leftrightarrow \lambda=2$$

Por lo tanto el punto R será $(-3,-4,3)+2\cdot(2,3,-1)=(1,2,1)$

47. Sean O=(0,0,0), A=(1,0,1), B=(2,1,0) y C=(0,2,3). Calcula:

a) El área del triángulo de vértices O, A y B, y el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C.

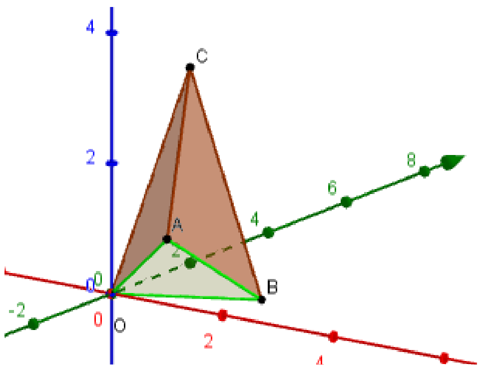
b) La distancia del vértice C al plano que contiene al triángulo OAB.

c) La distancia del punto C' al plano que contiene al triángulo OAB, siendo C' el punto medio del segmento de extremos O y C.

Solución:

a)

El área del triángulo vendrá dada por



$$\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot sen\,\alpha=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|}{2}$$
$$\overrightarrow{OA}=(1,0,1)\ \ ;\ \ \overrightarrow{OB}=(2,1,0)$$
$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}=(-1,2,1)$$
$$Área=\frac{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \ u^2$$

El volumen del tetraedro se calculará utilizando el producto mixto:

$$Volumen=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]|$$
$$\overrightarrow{OA}=(1,0,1)\ \ ;\ \ \overrightarrow{OB}=(2,1,0)\ ;\ \ \overrightarrow{OC}=(0,2,3)$$
$$|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=7$$

Por lo tanto el volumen del tetraedro es $\frac{7}{6}\ \ u^3$

b)

Nos están pidiendo la altura del tetraedro, tomando como base el triángulo OAB.

Si tenemos en cuenta que el volumen de un tetraedro se puede calcular mediante la fórmula

$$Volumen=\frac{1}{3}\cdot área\,de\,la\,base\cdot altura$$

podemos sustituir los resultados obtenidos en el apartado a)

$$\frac{7}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot altura \Rightarrow altura=\frac{7}{\sqrt{6}}\ \ u$$

La distancia pedida es, por lo tanto, $\frac{7}{\sqrt{6}}\ u$

c)

Primero calcularemos la ecuación del plano, para ello tenemos en cuenta que el vector $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(-1,2,1)$ es un vector normal al plano y por lo tanto su ecuación será de la forma $-x+2y+z+D=0$. Como el punto O=(0,0,0) está en el plano, tenemos que D=0 y la ecuación buscada es $\pi\equiv -x+2y+z=0$

El punto medio C' tiene coordenadas $\left(0,1,\frac{3}{2}\right)$, así pues la distancia de C' al plano será:

$$d(C',\pi)=\frac{\left|-0+2\cdot 1+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\frac{7/2}{\sqrt{6}}=\frac{7}{2\sqrt{6}}\ u$$

48. Dado el punto P=(1,1,1) y el plano π: x- y+z=5:

a) Calcula las ecuaciones continuas de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P

b) Calcula el punto simétrico de P respecto del plano π

Solución:

a)

La recta pasa por el punto (1,1,1) y tiene como vector director (1,-1,1) (vector normal al plano), por lo que sus ecuaciones continuas son:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

b)

Empezaremos calculando el punto de corte de la recta con el plano. Las ecuaciones paramétricas de la recta son $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$; $\lambda\in\Re$, si las sustituimos en la ecuación del plano, queda:

$$(1+\lambda)-(1-\lambda)+(1+\lambda)=5\Leftrightarrow 1+3\lambda=5\Leftrightarrow\lambda=\frac{4}{3}$$

Con lo cual el punto de corte es $\left(1+\frac{4}{3},1-\frac{4}{3},1+\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$. Este punto ha de ser el punto medio del segmento que une P con su simétrico P'=(x', y' , z'), con lo cual:

$$\begin{cases} \frac{1+x'}{2}=\frac{7}{3} \\ \frac{1+y'}{2}=\frac{-1}{3} \\ \frac{1+z'}{2}=\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{14}{3}-1=\frac{11}{3} \\ y'=\frac{-2}{3}-1=\frac{-5}{3} \\ z'=\frac{14}{3}-1=\frac{11}{3} \end{cases}$$

Por lo tanto el punto simétrico de P respecto al plano π es $P'=\left(\frac{11}{3},-\frac{5}{3},\frac{11}{3}\right)$

49. Encuentra un valor de $a\neq 0$ para que las rectas $\begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases}$ y $x+1=\frac{y-3}{a}=\frac{z}{2}$ sean paralelas. Para el valor de a que has encontrado, calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Solución:

Empezaremos calculando un vector director de la primera recta. Para ello hacemos

$$(1,1,-5)\times(-2,0,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}-11\vec{j}-2\vec{k}=(1,9,2)$$

Por otra parte como el vector director de la segunda recta es $(1,a,2)$, para que sean paralelas es necesario que a=9

Para encontrar el plano que contiene a ambas, lo más sencillo es buscar en el haz de planos que contienen a la primera recta aquel que contenga también un punto de la segunda, por ejemplo el $(-1,3,0)$

Como el plano -2x+z=1 no contiene al punto $(-1,3,0)$, entonces el plano buscado será de la forma: $x+y-5z+3+\lambda\cdot(-2x+z-1)=0$ siendo λ un número real por determinar. Para ello sustituimos las coordenadas del punto en la ecuación del haz:

$-1+3-5\cdot 0+3+\lambda\cdot(-2\cdot(-1)+0-1)=0 \Leftrightarrow 5+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-5$

Con lo cual el plano buscado será:

$x+y-5z+3-5\cdot(-2x+z-1)=0 \Leftrightarrow \mathbf{11x+y-10z+8=0}$

50. Dados el punto P=(-1,0,2) y las rectas: $r\equiv\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$ **y** $s\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{cases}$ **se pide:**

a) Determinar la posición relativa de r y s.

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.

c) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

Solución:

a)

En primer lugar necesitamos un punto y un vector director de cada una de las rectas. En la recta r tenemos que x=1+z e y=-1+z, con lo cual los puntos de r son de la forma (1+z,-1+z,z). Así pues su ecuación vectorial es $r\equiv(1,-1,0)+\mu\cdot(1,1,1)$.

Entonces tenemos los puntos $A=(1,-1,0)\in r$ y $B=(1,0,3)\in s$, además de los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{v}=(1,1,0)$ directores de r y s respectivamente.

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes las rectas no tienen la misma dirección. Con lo cual sólo pueden cruzarse o ser secantes. Para distinguir entre estos dos casos estudiaremos si las rectas son o no coplanarias. Para ello calculamos el determinante de la matriz formada por las coordenadas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$.

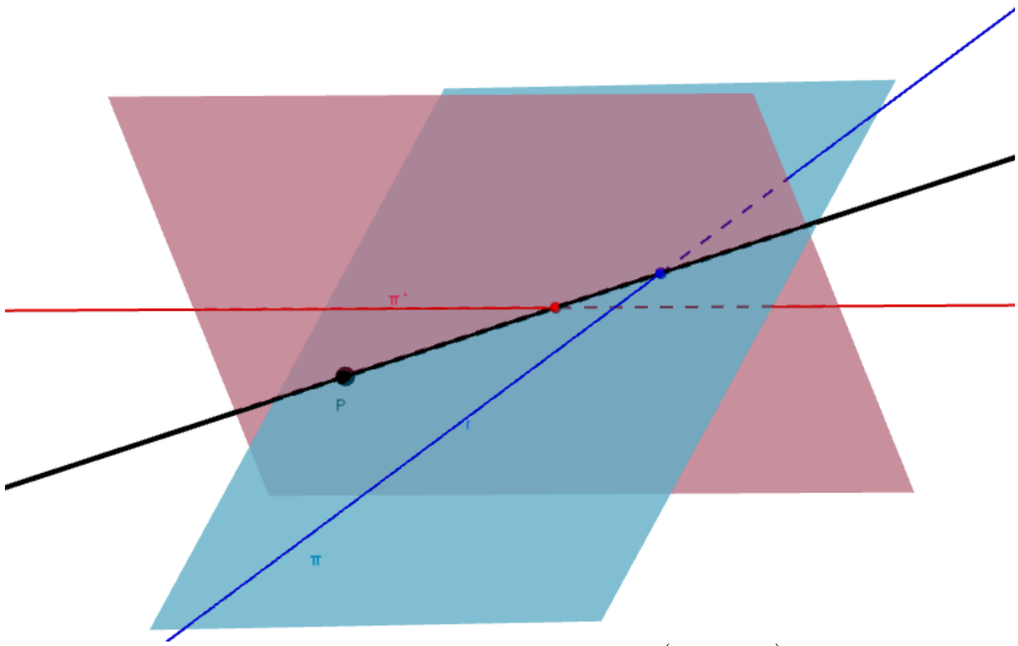
Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1$ los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente independientes, lo cual quiere decir que las rectas se cruzan.

b)

La recta buscada, al cortar a r, es coplanaria con r. Para calcular dicho plano, π, debemos buscar entre los planos del haz que contiene generado por r aquel que pase por el punto P.

Del mismo modo la recta también es coplanaria con s, por lo que estará contenida en el plano del haz generado por s que pasa por P. Llamemos π’ a este plano.

Como la recta esta contenida tanto en π como en π’, podrá expresarse como intersección de estos planos.



El haz generado por r será de la forma $x-z-1+k\cdot(y-z+1)=0$ si sustituimos las coordenadas de P obtenemos: $-4+k\cdot(-1)\Leftrightarrow k=-4$ y por tanto $\underline{\pi\equiv x-4y+3z-5=0}$

Para obtener el haz generado por s, primero necesitamos dos planos que la contengan. Por una parte tenemos que s esta contenida en el plano z=3 y por otra podemos igualar λ en las ecuaciones paramétricas obteniendo x-1=y

$s\equiv\begin{cases}x-y-1=0\\ z-3=0\end{cases}$ y el haz es de la forma $x-y-1+k\cdot(z-3)=0$. Sustituyendo las coordenadas de P tendremos $-2-k=0\Leftrightarrow k=-2$ y por tanto $\underline{\pi'\equiv x-y-2z+5=0}$

Así pues la recta buscada será

$$\begin{cases}x-4y+3z-5=0\\ x-y-2z+5=0\end{cases}$$

c)

Llamemos t a la recta perpendicular común a r y s. Sea M el punto donde t corta a r y N el punto donde t corta a s.

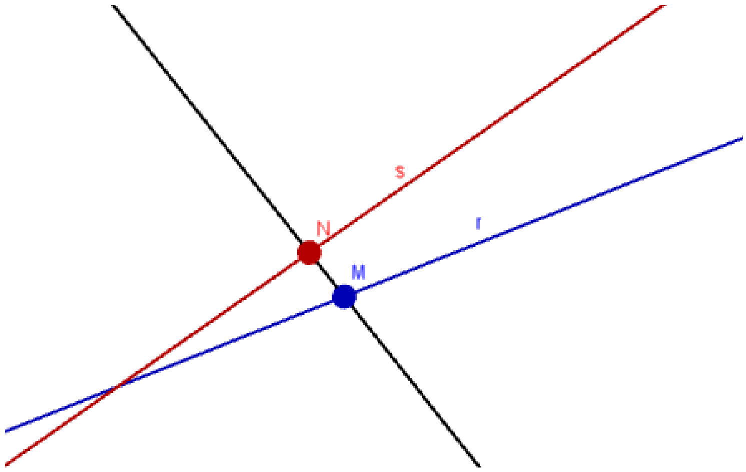
Como $M\in r$ entonces $M=(1+\mu,-1+\mu,\mu)$ siendo μ un número por determinar. Análogamente $N=(1+\lambda,\lambda,3)$

Por otra parte el vector $\overrightarrow{MN}=(\lambda-\mu,\lambda-\mu+1,3-\mu)$ es ortogonal a los vectores directores de r y s. Con lo que:

$$\begin{cases}\lambda-\mu+\lambda-\mu+1+3-\mu=0\\ \lambda-\mu+\lambda-\mu+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda-3\mu=-4\\ 2\lambda-2\mu=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{5}{2}\\ \mu=3\end{cases}$$

Por tanto M=(4,2,3) , $N=\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},3\right)$ y $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

Con lo cual $t\equiv(4,2,3)+\phi(-1,1,0);\ \phi\in\Re$



51. Dados el punto P=(1,0,-1), el plano $\pi\equiv 2x-y+z+1=0$ y la recta $r\equiv\begin{cases}-2x+y-1=0\\ 3x-z-3=0\end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

b) Hallar el ángulo entre r y π.

Solución:

a)

En primer lugar obtenemos un vector director de r

$$\vec{v}=(-2,1,0)\times(3,0,-1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}=(-1,-2,-3)$$

Los vectores normales del plano buscado serán aquellos ortogonales al vector $\vec{v}=(-1,-2,-3)$ (ya que la recta y el plano son paralelos) y al vector normal de π, $\vec{n}_\pi=(2,-1,1)$ (ya que los planos son perpendiculares). La manera más rápida de encontrar uno de ellos es mediante el producto vectorial.

$$(-1,-2,-3)\times(2,-1,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-5\vec{i}-5\vec{j}+5\vec{k}=(-5,-5,5)$$

El plano buscado ha ser de la forma -5x-5y+5z+D=0. Como ha de pasar por el punto (1,0,-1) entonces D=10 y el plano tiene ecuación $-5x-5y+5z+10=0 \Leftrightarrow \mathbf{x+y-z+2=0}$

b)

$$sen\,\alpha=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}_\pi|}=\frac{|-1\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+(-3)\cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{84}}\Rightarrow \boldsymbol{\alpha=19^{o}6'24''}$$

52. Dado el plano π : x + y + 3z = 6

a) Calcula el punto simétrico al punto A(1 , 1 , 1) respecto al plano π

b) Estudia, en función del parámetro K∈ℝ, la posición relativa del plano π y la recta

$$\boldsymbol{r:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+4}{K}}$$

Solución:

a)

El vector (1,1,3) es normal al plano π así pues, la recta s: (1,1,1)+t·(1,1,3) pasa por A y es perpendicular a π. (Tanto A como su simétrico están en esta recta)

Para calcular el punto de corte, P, de s con π sustituimos las coordenadas paramétricas de r en la ecuación de π

$$(1+t)+(1+t)+3\cdot(1+3t)-6=0 \Leftrightarrow -1+11t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{11}$$

El punto es $P=(1,1,1)+\frac{1}{11}\cdot(1,1,3)=\left(\frac{12}{11},\frac{12}{11},\frac{14}{11}\right)$, el cuál será el punto medio entre A y su simétrico.

Para calcular el simétrico de A haremos $P+\overrightarrow{AP}=\left(\frac{12}{11},\frac{12}{11},\frac{14}{11}\right)+\left(\frac{1}{11},\frac{1}{11},\frac{3}{11}\right)=\boldsymbol{\left(\frac{13}{11},\frac{13}{11},\frac{17}{11}\right)}$

b)

En primer lugar observamos que el punto (-1,0,-4) está en la recta pero no está en el plano, con lo cual descartamos que la recta esté contenida en el plano. Así pues los únicos casos posibles es que la recta sea secante al plano o que la recta sea paralela al mismo.

La condición para que la recta sea paralela al plano es que los vectores directores de la recta y los vectores normales del plano sean ortogonales. En otro caso la recta será secante.

El vector director de la recta es $\vec{v}=(2,-1,K)$ y el normal al plano $\vec{n}=(1,1,3)$

$$0=\vec{v}\cdot\vec{n}=2-1+3K \Leftrightarrow K=-\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la recta será paralela al plano si $\boldsymbol{K=-\frac{1}{3}}$ y será secante en cualquier otro caso.

53. **Dada la recta r, intersección de los planos y+z=0 y x-2y-1=0 y la recta s de ecuación** $\boldsymbol{\frac{x}{2}=y-1=-z+3}$

a) Obtén, razonadamente, ecuaciones paramétricas de r y s.

b) Explica, de un modo razonado, cuál es la posición relativa de r y s.

c) Calcula la distancia entre r y s.

<u>Solución</u>:

a)

$\begin{cases} y+z=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=1-2z \end{cases}$ sustituyendo z por λ obtenemos las ecuaciones paramétricas de r

$$r:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} ;\lambda\in\Re$$

Para s, obtenemos las ecuaciones continuas $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$ donde vemos que (0,1,3) es un punto de r y (2,1,-1) es un vector director. Así pues, unas ecuaciones paramétricas de s serán:

$$s:\begin{cases} x=2\mu \\ y=1+\mu \\ z=3-\mu \end{cases} ;\mu\in\Re$$

b)

Para estudiar la posición relativa necesitamos un punto y un vector director de cada recta:

A=(1,0,0) y $\vec{u}=(-2,-1,1)$ para r y B=(0,1,3) y $\vec{v}=(2,1,-1)$ para s. También obtenemos el vector $\overrightarrow{AB}=(-1,1,3)$.

Haciendo el producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}]=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$ vemos que las rectas son coplanarias.

Estudiando el rango de la matriz formada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $rango\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=1$, vemos que las dos rectas tienen la misma dirección, así pues son paralelas o coincidentes.

Como el punto $A\in r$ no cumple las ecuaciones de s, $\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{-3}{-1}$, entonces **las rectas son paralelas**.

c)

$$d(r,s)=d(A,s)=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{3}\ u}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\vec{v}|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-4,5,-3)\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{50}$$

54. **Sean π el plano que pasa por los puntos A=(1,-1,1), B=(2,3,2), C=(3,1,0) y r la recta dada por** $r:\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+6}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$

a) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.

b) Calcula los puntos de la recta r que distan 6 unidades del plano π

Solución:

$\overrightarrow{AB}=(1,4,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,2,-1)$

$$0=\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z-1\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=-4x+4+2y+2+2z-2-8z+8-2x+2+y+1=-6x+3y-6z+15$$

$\pi:-6x+3y-6z+15=0$

a)

El vector director de la recta es $\vec{v}=(2,-1,2)$ y el normal del plano $\vec{n}=(-6,3,-6)$

El ángulo, α, que forman la recta y el plano, ha de cumplir

$$sen\,\alpha=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{27}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{81}}=\frac{27}{27}=1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\alpha=90^{o}}$$

b)

A partir de las ecuaciones paramétricas, podemos ver que los puntos de la recta son de la forma $P=(7+2t,-6-t,-3+2t);t\in\Re$

$$d(P,\pi)=6\Leftrightarrow\frac{|-6\cdot(7+2t)+3\cdot(-6-t)-6\cdot(-3+2t)+15|}{9}=6\Leftrightarrow|-27t-27|=54\Rightarrow\begin{cases}t=1\\ t=-3\end{cases}$$

Obteniendo, por tanto los puntos **(9,-7,-1)** y **(1,-3,-9)**

55. **Dados el punto P=(-4,6,6), el origen O=(0,0,0), y la recta** $r\equiv\begin{cases}x=-4+4\lambda\\ y=8+3\lambda\\ z=-2\lambda\end{cases}$

a) ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

b) Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ **sea el punto medio de este segmento.**

Solución:

a)

Para que exista R, es necesario que la recta que pasa por O y P corte a r.

La recta que pasa por O y P tiene ecuación vectorial $O+t\cdot\overrightarrow{OP}=(0,0,0)+t\cdot(-4,6,6)\,;t\in\Re$

Para que las dos rectas se corten han de ser coplanarias, como A=(-4,8,0) es un punto de r y $\vec{v}=(4,3,-2)$ un vector director, entonces el producto mixto $[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP},\vec{v}]$ ha de ser 0

$$[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP},\vec{v}]=\begin{vmatrix}-4 & 8 & 0\\ -4 & 6 & 6\\ 4 & 3 & -2\end{vmatrix}=248\neq 0$$

Con lo cual las rectas se cruzan y no puede existir R.

b)

El punto medio de $\overline{OP}$ será M=(-2,3,3)

El punto R será la intersección del plano perpendicular a $\overline{OP}$ que pasa por M y la recta r.

Como widevec OP=(-4,6,6) el plano buscado tendrá la forma $\pi:-4x+6y+6z+D=0$. Para que pase por M, ha de cumplir $-4\cdot(-2)+6\cdot 3+6\cdot 3+D=0\Leftrightarrow D=-44$ por tanto

$$\pi:-4x+6y+6z-44=0$$

Ahora intersecamos el plano con la recta:

$$-4\cdot(-4+4\lambda)+6\cdot(8+3\lambda)+6\cdot(-2\lambda)-44=0\Leftrightarrow 20-10\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=2$$

Así pues, R=(4,14,-4)

56. Dadas las rectas $r:(1,k,-1)+\lambda\cdot(-1,0,3);\lambda\in\Re$ y $s:\begin{cases}x-y=2\\ x+y-z=1\end{cases}$

a) Estudia su posición relativa en función del parámetro k.

b) Calcula la distancia entre r y s cuando k=5

c) En los casos en que las rectas sean secantes o paralelas, calcula la ecuación implícita del plano que contiene a r y s.

<u>Solución</u>:

$$r:(1,k,-1)+\lambda\cdot(-1,0,3);\lambda\in\Re\Rightarrow A=(1,k,-1)\in r;\quad \vec{u}=(-1,0,3)\ \ director\,de\,r$$

$$s:(2,0,1)+\mu\cdot(1,1,2);\mu\in\Re\Rightarrow B=(2,0,1)\in r;\quad \vec{v}=(1,1,2)\ \ director\,de\,s$$

a)

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección $\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\right)$, entonces los únicos casos posibles son que las rectas se crucen o que se corten. Para distinguir entre estos dos casos estudiaremos el producto mixto $[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}]=\begin{vmatrix}1 & -k & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-5-5k$

Como $[\vec{AB},\vec{u},\vec{v}]=0 \Leftrightarrow k=-1$ entonces las rectas **se cortan cuando k=-1 y se cruzan en cualquier otro caso.**

b)

Cuando k=5 las rectas se cruzan, por lo tanto la distancia entre r y s vendrá dada por la fórmula:

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{AB},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\mathbf{\frac{30}{\sqrt{35}}\approx 5{,}0709\,u}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(-3{,}5,-1)\Rightarrow|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{35}$$

c)

El plano que contiene a r y s cuando k=-1 será:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -3(x-2)+5y-(z-1)=0 \Leftrightarrow \mathbf{-3x+5y-z+7=0}$$

57.