Probabilidad

Experimentos Aleatorios....2
Experimento aleatorio y experimento determinista....2
Espacio muestral....2
Sucesos....2
Operaciones con sucesos – Leyes de De Morgan....3
Probabilidad....4
Definición....4
Propiedades....4
Frecuencia de un suceso. Ley de los grandes números....4
Regla de Laplace....4
Técnicas de recuento....5
Estrategia Multiplicativa – Diagramas en árbol....5
Permutaciones....5
Variaciones sin repetición....6
Combinaciones....6
Probabilidad Condicionada....7
Definición....7
Independencia de sucesos....8
Teorema de las probabilidades totales....8
Teorema de Bayes....9
Variables Aleatorias....10
Definición:....10
Variables aleatorias discretas....10
Variables aleatorias continuas....11
Esperanza de una variable aleatoria....11
Media y varianza de una variable aleatoria....12
Distribución Binomial....13
Definición....13
Función de Probabilidad....13
Media y varianza de la distribución Binomial....14
Distribución Normal....14
Definición....14
Media y varianza de una distribución normal....14
Características de una distribución normal....14
Tipificación de una distribución normal....15
Aproximación de la Binomial por la Normal....16

Experimentos Aleatorios

Experimento aleatorio y experimento determinista

Un experimento se dice que es determinista si es posible predecir el resultado antes de realizar el experimento.

Un experimento se dice que es aleatorio si tiene varios resultados posibles y a priori no sabemos cual de ellos se va a producir.

Ejemplo:

Si tiramos un dado y medimos el tiempo que tarda en caer al suelo, estamos hablando de un experimento determinista, ya que las leyes de la física permiten predecir el resultado del experimento. Por el contrario, si tiramos el mismo dado y observamos cuál de las 6 caras queda hacia arriba, estamos ante un experimento aleatorio, ya que a priori, no disponemos de una ley física que nos permita preveer el resultado.

Espacio muestral

En un experimento aleatorio, al conjunto de los posibles resultados del experimento se le conoce como espacio muestral.

Ejemplo:

Al tirar un dado con sus caras numeradas, y observar cuál es la cara que queda hacia arriba, el espacio muestral sería el conjunto $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Sucesos

En un experimento aleatorio se le llama suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplos:

Si tiramos un dado y observamos qué cara queda hacia arriba podremos observar los siguientes sucesos:

- {sacar número par} = {2,4,6}
- {sacar un número menor que 5} = {1,2,3,4}
- {1,4,5}
- {sacar un número mayor que 2} = {3,4,5,6}

Tipos de sucesos:

- Suceso elemental es aquel que se corresponde con un solo elemento del espacio muestral, por ejemplo: "sacar un 6 al tirar un dado"
- Suceso compuesto, es el que se corresponde con varios elementos del espacio muestra, por ejemplo: "sacar un número impar al tirar un dado"
- Suceso seguro es aquel que siempre ocurre, por ejemplo: "sacar un número menor que 10 al tirar un dado". Al suceso seguro se le representa por Ω
- Suceso imposible es aquel que nunca ocurre, por ejemplo "sacar un número mayor que 6 al tirar un dado". El suceso imposible se representa por $\emptyset$
- Dos sucesos se dice que son **compatibles** si pueden ocurrir los dos a la vez (por ejemplo "sacar par" y "sacar nº mayor que 3". En caso contrario se dice que son incompatibles (por ejemplo "sacar par" y "sacar nº menor que 2".

- Dos sucesos son **complementarios** cuando siempre ocurre uno de los dos, pero nunca los dos al mismo tiempo. Se denotan por A y $\bar{A}$ (complementario de A)
- Al conjunto de todos los sucesos se le conoce como **espacio de sucesos** y lo representaremos por E

Operaciones con sucesos – Leyes de De Morgan

<u>Unión</u>:

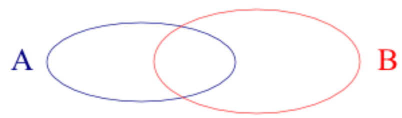
La unión de dos sucesos A y B es aquel suceso $A \cup B$ que ocurre cuando se cumple uno de los dos, A o B.

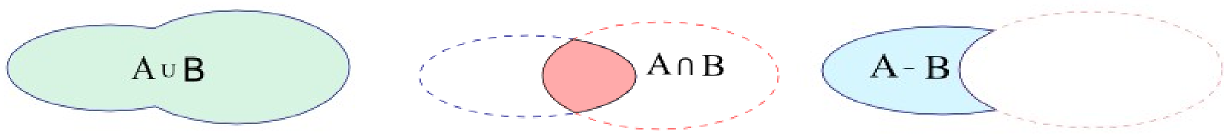
Por ejemplo, si al tirar un dado consideramos el suceso A="sacar número par" y el suceso B="sacar un número mayor que 3", entonces su unión: $A \cup B$ = "sacar 2, 4, 5 ó 6"

<u>Intersección</u>:

La intersección de dos sucesos A y B es aquel suceso $A \cap B$, que ocurre cuando se cumplen los dos a la vez, A y B.

Con los sucesos del ejemplo anterior: $A \cap B$ = "sacar 4 ó 6"





<u>Diferencia</u>:

La diferencia de dos sucesos A y B es aquel suceso A-B, que ocurre si se cumple A pero no se cumple B $(A-B=A\cap\bar{B})$

Si calculamos la diferencia de los sucesos de los ejemplos anteriores obtenemos A-B="sacar 2"

<u>Propiedades</u>

Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
Asociativa	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
Elemento neutro	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap\Omega=A$
Idempotente	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

<u>Leyes de De Morgan</u>:

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

Probabilidad

Definición

Si consideramos un experimento aleatorio con un espacio de sucesos E, definimos probabilidad como una función $P:\ E \rightarrow [0,1]$ que asigna a cada suceso un número entre 0 y 1.

La función de probabilidad ha de cumplir las siguientes condiciones (axiomas de Kolmogorov):

$$P(A) \geq 0,\ \forall A \in E$$
$$P(\Omega) = 1$$
$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propiedades

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $A \subset B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Frecuencia de un suceso. Ley de los grandes números.

Si realizamos un experimento aleatorio N veces, tendremos que un suceso A ocurre un número n_A de veces. Llamaremos entonces frecuencia relativa del suceso A al cociente $f_N(A) = \frac{n_A}{N}$

La frecuencia relativa cumple los axiomas de Kolmogorov, por tanto podría considerarse una medida de probabilidad, el problema radica en que si repetimos la serie de N experimentos obtendremos frecuencias diferentes. No obstante, la ley de los grandes números dice que al aumentar el número de repeticiones, las frecuencias relativas se acercan cada vez más a las probabilidades reales de los sucesos:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(A) = P(A)$$

Regla de Laplace

Si tenemos un espacio muestral compuesto por un número finito de sucesos elementales y **todos ellos tienen la misma probabilidad**, entonces podemos calcular la probabilidad de un suceso A:

$$P(A) = \frac{n^o\ de\ casos\ favorables}{n^o\ de\ casos\ posibles}$$

Ejemplo:

Al tirar un dado el número de casos posibles es de 6. En principio ninguna cara es distinta de las otras (el dado no está cargado) y por tanto podemos considerar que las 6 caras tienen la misma probabilidad, a partir de ahí podemos calcular la probabilidad de los distintos sucesos utilizando la regla de Laplace:

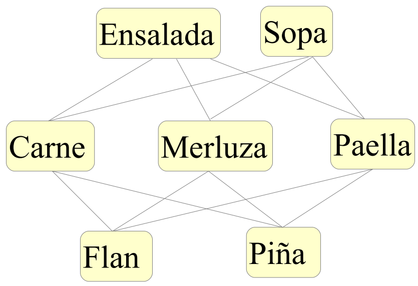
$P(\text{Sacar Par}) = \frac{\#\{2,4,6\}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\quad P(Sacar\ un\ número\ mayor\ que\ 4) = \frac{\#\{5,6\}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Técnicas de recuento

Estrategia Multiplicativa – Diagramas en árbol.

Supongamos que en un restaurante vemos el siguiente menú del día

Primer plato	Ensalada
	Sopa
Segundo plato	Carne Asada
	Merluza a la romana
	Paella
Postre	Flan
	Piña



Si queremos saber cuántas opciones diferentes hay en el menú debemos multiplicar $2\cdot3\cdot2=12$ opciones:

Ensalada-Carne-Flan	Sopa-Carne-Flan
Ensalada-Carne-Piña	Sopa-Carne-Piña
Ensalada-Merluza-Flan	Sopa-Merluza-Flan
Ensalada-Merluza-Piña	Sopa-Merluza-Piña
Ensalada-Paella-Flan	Sopa-Paella-Flan
Ensalada-Paella-Piña	Sopa-Paella-Piña

En resumen, si el número de opciones disponible en cada elección no depende de las otras, el número total de casos se obtiene multiplicando el número de opciones posibles en cada elección.

Permutaciones

Una permutación de n elementos es cada una de las maneras en las que se pueden ordenar esos n elementos.

Para calcular el número de permutaciones que se pueden hacer con n elementos (P_n) iremos colocando esos n elementos en una lista ordenada:

Supongamos que tenemos 4 elementos, numerados del 1 al 4. Las listas ordenadas que podemos formar con esos 4 elementos son las siguientes:

1-2-3-4	2-1-3-4	3-1-2-4	4-1-2-3
1-2-4-3	2-1-4-3	3-1-4-2	4-1-3-2
1-3-2-4	2-3-1-4	3-2-1-4	4-2-1-3
1-3-4-2	2-3-4-1	3-2-4-1	4-2-3-1
1-4-2-3	2-4-1-3	3-4-1-2	4-3-1-2
1-4-3-2	2-4-3-1	3-4-2-1	4-3-2-1

Permutaciones de 4 elementos:
$P_4=4!=24$

Si queremos formar listas ordenadas con n elementos, para la primera posición de la lista tendremos n posibilidades. Para la segunda posición el número de posibilidades es n-1, ya que no tendremos disponible el elemento que hemos colocado en primera posición. En la tercera posición no podremos poner los dos que ya hemos colocado, así pues quedarán n-2 elementos disponibles.

n opciones	n-1 opciones	n-2 opciones	....	2 opciones	1 opción

De esta forma iremos colocando todos los elementos hasta que en la última posición haya sólo un elemento disponible.

Para saber cuántas listas diferentes nos pueden salir, debemos multiplicar las opciones que tenemos en cada posición de la lista, obteniendo:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Variaciones sin repetición

Las variaciones sin repetición (o simplemente variaciones) de m elementos, tomados de n en n, son listas ordenadas de longitud n, que podemos formar con m elementos distintos.

1	2	3		n-1	n
m opciones	m-1 opciones	m-2 opciones	....	m-n+2 opciones	m-n+1 opciones

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n viene dado por

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

ya que:

$$\frac{m!}{(m-n)!} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) \cdot (m-n) \cdot (m-n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(m-n) \cdot (m-n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

Si tenemos cinco elementos disponibles y queremos formar listas de tres elementos donde tengamos en cuenta el orden, las listas posibles serán:

1-2-3	2-1-3	3-1-2	4-1-2	5-1-2
1-2-4	2-1-4	3-1-4	4-1-3	5-1-3
1-2-5	2-1-5	3-1-5	4-1-5	5-1-4
1-3-2	2-3-1	3-2-1	4-2-1	5-2-1
1-3-4	2-3-4	3-2-4	4-2-3	5-2-3
1-3-5	2-3-5	3-2-5	4-2-5	5-2-4
1-4-2	2-4-1	3-4-1	4-3-1	5-3-1
1-4-3	2-4-3	3-4-2	4-3-2	5-3-2
1-4-5	2-4-5	3-4-5	4-3-5	5-3-4
1-5-2	2-5-1	3-5-1	4-5-1	5-4-1
1-5-3	2-5-3	3-5-2	4-5-2	5-4-2
1-5-4	2-5-4	3-5-4	4-5-3	5-4-3

Variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3:
$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Combinaciones

Las combinaciones de m elementos tomados de n en n, $C_{m,n}$ son listas de longitud n que podemos formar con esos m elementos disponibles. La diferencia respecto a las variaciones es que en este caso el orden de los elementos no importa.

Si observamos en el ejemplo anterior las variaciones de 5 elementos tomadas de 3 en 3, veremos que hay varias variaciones que representan la misma combinación:

1-2-3 ≡ 1-3-2 ≡ 2-1-3 ≡ 2-3-1≡ 3-1-2 ≡ 3-2-1

1-2-3	1-2-4	1-2-5	1-3-4	1-3-5	1-4-5	2-3-4	2-3-5	2-4-5	3-4-5
1-3-2	1-4-2	1-5-2	1-4-3	1-5-3	1-5-4	2-4-3	2-5-3	2-5-4	3-5-4
2-1-3	2-1-4	2-1-5	3-1-4	3-1-5	4-1-5	3-2-4	3-2-5	4-2-5	4-3-5
2-3-1	2-4-1	2-5-1	3-4-1	3-5-1	4-5-1	3-4-3	3-5-2	4-5-2	4-5-3
3-2-1	4-1-2	5-1-2	4-1-3	5-1-3	5-1-4	4-2-3	5-2-3	5-2-4	5-3-4
3-1-2	4-2-1	5-2-1	4-3-1	5-3-1	5-4-1	4-3-2	5-3-2	5-4-2	5-4-3
{1,2,3}	**{1,2,4}**	**{1,2,5}**	**{1,3,4}**	**{1,3,5}**	**{1,4,5}**	**{2,3,4}**	**{2,3,5}**	**{2,4,5}**	**{3,4,5}**

Aquí podemos ver que con la combinación elementos 1, 2 y 3 podemos formar 6 variaciones (permutando el orden de los elementos). Lo mismo ocurre con las otras combinaciones posibles, por tanto podemos calcular el número de combinaciones: $C_{5,3}=\frac{60}{6}=10$

En general, una combinación (lista no ordenada) de n elementos da lugar a n! variaciones (listas ordenadas) que se obtienen permutando los elementos que forman la combinación. Es decir:

$$V_{m,n}=C_{m,n}\cdot P_n \quad \Leftrightarrow \quad C_{m,n}=\frac{V_{m,n}}{P_n}=\frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Para expresar el número de combinaciones es habitual utilizar números combinatorios:

$$\boxed{C_{m,n}=\binom{m}{n}=\frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}}$$

Probabilidad Condicionada

Definición

Se le llama probabilidad condicionada de un suceso A respecto a otro suceso B, P(A/B), a la probabilidad de que ocurra el suceso A suponiendo que ocurre el suceso B.

La probabilidad condicionada también se puede calcular de la siguiente manera:

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad si\ P(B)\neq 0}$$

<u>Ejemplo 1</u>:

Consideramos el experimento aleatorio consistente en extraer consecutivamente dos bolas de una bolsa donde hay 5 bolas negras y 5 bolas blancas. Entonces si consideramos el suceso B="sacar la primera bola blanca" y A="sacar la segunda bola blanca" entonces $P(A/B)=\frac{4}{9}$ ya que, aplicando la regla de Laplace, después de la primera extraccion quedan 9 bolas de las cuales 4 son blancas.

<u>Ejemplo 2:</u>

Al tirar un dado podemos considerar el suceso A="sacar un número par" y B="sacar un número mayor o igual a 4". Si calculamos P(A/B) tendremos, según la regla de Laplace:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2/6}{3/6}=\frac{2}{3}$$

Lo cual es coherente, ya que hay 3 números mayores o iguales a cuatro, de los cuales 2 son pares.

Independencia de sucesos

Dos sucesos A y B se dicen independientes si

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$$

- Lo anterior es equivalente a:
  $P(A/B)=P(A)$ o también $P(B/A)=P(B)$
- Si dos sucesos son independientes, también lo son sus complementarios, es decir, si A y B son independientes, entonces también lo serán $A\ y\ \bar{B}$, $\bar{A}\ y\ B$ y $\bar{A}\ y\ \bar{B}$.

La misma definición puede aplicarse a más sucesos:

Un conjunto de n sucesos $A_1,\dots,A_n$ son independientes $\Leftrightarrow P(A_1\cap\dots\cap A_n)=P(A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$

Ejemplo 1:

Si tenemos una bolsa con 5 bolas blancas y 5 bolas negras, podemos considerar el experimento aleatorio consistente en extraer una bola al azar, devolver la bola a la bolsa y realizar una segunda extracción aleatoria. En este experimento podemos considerar los sucesos:

B_1="La primera bola es blanca" y B_2="La segunda bola es blanca"

Como la segunda extracción es independiente de la primera, entonces la probabilidad del suceso $B_1\cap B_2=\text{Sacar dos bolas blancas}$, tendrá una probabilidad:

$$P(B_1\cap B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2)=\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{4}$$

Ejemplo 2:

Si repetimos el experimento anterior, pero sin volver a introducir la primera bola en la bolsa entonces los sucesos B_1 y B_2 ya no son independientes, ya que $P(B_2/B_1)=\frac{4}{9}$ y $P(B_2)=\frac{1}{2}$

En este caso

$$P(B_1\cap B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

Teorema de las probabilidades totales

Decimos que los sucesos $A_1,\dots,A_n$ forman un **sistema completo de sucesos** si cumplen:

- $A_1\cup\dots\cup A_n=\Omega$ (su unión es el espacio muestral)
- $A_i\cap A_j=\emptyset \quad i\neq j$ (son sucesos mutuamente incompatibles)

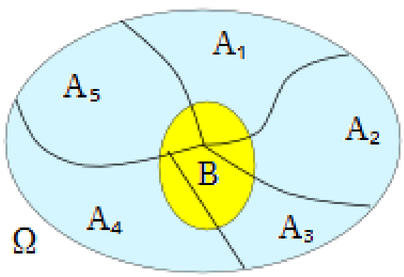
Teorema de las probabilidades totales:

Si los sucesos $A_1,\dots,A_n$ forman un sistema completo de sucesos, entonces la probabilidad de un suceso B podrá expresarse de la forma:

$$\boxed{P(B)=P(B/A_1)\cdot P(A_1)+\dots+P(B/A_n)\cdot P(A_n)}$$

La demostración de este teorema es bastante sencilla, ya que $B=(B\cap A_1)\cup\dots\cup(B\cap A_n)$ y como $(B\cap A_i)\cap(B\cap A_j)=\emptyset$ ya que $A_i\cap A_j=\emptyset$ entonces:

$$P(B)=P(B\cap A_1)+\dots+P(B\cap A_n)=P(B/A_1)\cdot P(A_1)+\dots+P(B/A_n)\cdot P(A_n)$$



Ejemplo:

Consideremos el experimento, visto anteriormente, consistente en extraer dos bolas sin reemplazamiento de una bolsa donde hay 5 bolas blancas y 5 bolas negras. Si consideramos el suceso B_1="sacar bola blanca en la primera extracción", entonces los sucesos B_1 y su complementario $\bar{B}_1$ forman un sistema completo de sucesos. Así pues, podremos utilizar el teorema de las probabilidades totales para calcular la probabilidad del suceso B_2="sacar bola blanca en la segunda extracción"

$$P(B_2)=P(B_2/B_1)\cdot P(B_1)+P(B_2/\bar{B}_1)\cdot P(\bar{B}_1)=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{10}+\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Teorema de Bayes

Sea $A_1,\dots,A_n$ un sistema completo de sucesos y B un suceso cualquiera. Entonces

$$\boxed{P(A_i/B)=\frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B/A_1)\cdot P(A_1)+\dots+P(B/A_n)\cdot P(A_n)}}$$

Las probabilidades $P(A_i)$ se llaman probabilidades "iniciales" o "a priori"

Las probabilidades $P(A_i/B)$ se conocen como probabilidades "finales" o "a posteriori"

Las probablidades $P(B/A_i)$ se conocen como verosimilitudes.

Demostración:

$$P(A_i/B)\cdot P(B)=P(A_i\cap B)=P(B/A_i)\cdot P(A_i)\Rightarrow P(A_i/B)=\frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)}$$

y aplicando el teorema de las probabilidades totales en el denominador obtenemos el resultado deseado.

Ejemplo:

Consideremos el experimento aleatorio ya estudiado, consistente en extraer sin reemplazamiento dos bolas de una bolsa donde hay 5 blancas y 5 negras. No obstante supongamos que tan solo podemos observar el color de la segunda bola extraida y que esa bola fuese blanca.

Si quisiesemos calcular la probabilidad de que la primera bola también fuese blanca, estaríamos hablando de la probabilidad a posteriori $P(B_1/B_2)$, la cual podríamos calcular utilizando el teorema de Bayes:

$$P(B_1/B_2)=\frac{P(B_2/B_1)\cdot P(B_1)}{P(B_2/B_1)\cdot P(B_1)+P(B_2/\bar{B}_1)\cdot P(\bar{B}_1)}=\frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{10}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{10}+\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{10}}=\frac{4}{9}$$

Variables Aleatorias

Definición:

Una variable aleatoria es una función $X:\Omega\to\Re$, que asigna un valor numérico a cada elemento del espacio muestral.

Ejemplo 1:

Si consideramos el experimento aleatorio consistente en tirar dos monedas y observar si en cada una sale cara o cruz, tendremos un espacio muestral formado por 4 elementos:

Ω ={c,c}, {c,+}, {+,c} y {+,+}

Sobre este espacio muestral, podemos definir una variable aleatoria que cuente el **número de caras**

$$X(s)=\begin{cases} 0 & si \;\; s=\{+,+\} \\ 1 & si \;\; s=\{+,c\} \;\; ó \;\; \{c,+\} \\ 2 & si \;\; s=\{c,c\} \end{cases}$$

Ejemplo 2:

Si consideramos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados, podremos definir una variable aleatoria para la **suma de las puntuaciones** obtenidas:

$\Omega=\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,1\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,1\},\{3,2\},\{3,3\},$
$\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,1\},\{4,2\},\{4,3\},\{4,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,1\},\{5,2\},\{5,3\},\{5,4\},\{5,5\},\{5,6\},\{6,1\},$
$\{6,2\},\{6,3\},\{6,4\},\{6,5\},\{6,6\}$

$$Y(s)=\begin{cases} 2 \;\; si \;\; s=\{1,1\} \\ 3 \;\; si \;\; s=\{1,2\} \;\; ó \;\; \{2,1\} \\ 4 \;\; si \;\; s=\{1,3\},\{2,2\} ó \{3,1\} \\ 5 \;\; si \;\; s=\{1,4\},\{2,3\},\{3,2\} ó \{4,1\} \\ \ldots \\ \ldots \\ 11 \;\; si \;\; s=\{5,6\} \;\; ó \;\; \{6,5\} \\ 12 \;\; si \;\; s=\{6,6\} \end{cases}$$

Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria se dice que es discreta, si el rango de posibles valores es un conjunto finito o numerable (algo así como una sucesión infinita)

Para una variable aleatoria discreta, X, es posible definir una función de probabilidad $p:\Re\rightarrow[0,1]$ de tal forma que $p(x_i)=P(X=x_i)$

La función de probabilidad cumple:

1. $p(x_i)\geq 0$
2. $\sum_i x_i=1$

También se puede definir la función de distribución de X, $F:\Re\rightarrow[0,1]$ como $F(x)=P(X\leq x);\; x\in\Re$

Ejemplo

Si consideramos la variable aleatoria X="número de caras al tirar dos monedas" su función de probabilidad será

$$p(x)=\begin{cases} 0,25 & si \;\; x=0 \\ 0,5 & si \;\; x=1 \\ 0,25 & si \;\; x=2 \\ 0 & en\,otro\,caso \end{cases}$$ y su función de distribución $$F(x)=\begin{cases} 0 & si \;\; x<0 \\ 0,25 & si \;\; 0\leq x<1 \\ 0,75 & si \;\; 1\leq x<2 \\ 1 & si \;\; 2\leq x \end{cases}$$

Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria continua puede tomar un conjunto no numerable de valores. En la práctica esto quiere decir que puede tomar cualquier valor posible en un intervalo de números reales.

Por ejemplo, el tiempo que tarda en estropearse una bombilla es una variable aleatoria continua, ya que a priori, el conjunto de valores posibles es cualquier número positivo.

Otra característica importante de las variables aleatorias continuas es que cada valor concreto tiene probabilidad cero. Es decir, la probabilidad de que la bombilla se estropee exactamente 130675254,235874615... segundos después de su instalación es cero.

Cuando se trata de variables continuas lo que tiene sentido es hablar de probabilidades de intervalos, es decir, la probabilidad de que la variable tome algún valor de un intervalo concreto. Por ejemplo, la probabilidad de que una bombilla determinada dure entre 3 y 4 años sí es distinta de cero.

La siguiente cuestión es como calcular la probabilidad de un intervalo, mejor dicho, la probabilidad de que la variable aleatoria tome alguno de los valores de un intervalo dado. Para eso está la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria.

La función de densidad de una variable aleatoria continua X es una función, f ,que ha de cumplir:

- $f(x) \geq 0; \quad -\infty < x < +\infty$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

A partir de la función densidad, la función de distribución se define de manera similar al caso discreto: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

La función de distribución cumple las siguientes propiedes:

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
- $F'(x) = f(x)$

Esperanza de una variable aleatoria

Si la variable aleatoria X es discreta, entonces

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$$

mientras que si es continua

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

La esperanza de una variable aleatoria viene siendo la media ponderada de los valores de la variable. Tiene el significado de "valor esperado", de ahí su nombre.

Ejemplo:

Al tirar un dado perdemos el dinero apostado salvo que salga 6, en cuyo caso nos devuelven nuestra apuesta multiplicada por 5. Si realizamos una apuesta de 1 €, entonces la variable aleatoria discreta X={dinero ganado} toma los valores:

$$X = \begin{cases} -1\text{€} & si\, sale\, 1,2,3,4\, ó\, 5 \\ +4\text{€} & si\, sale\ un\ 6 \end{cases}$$

Suponiendo que el dado no esté cargado, la probabilidad de ganar es de 1/6 y la de perder 5/6. Si calculamos la esperanza:

$E(X)=-1\cdot P(X=-1)+4\cdot P(X=4)=-1\cdot\frac{5}{6}+4\cdot\frac{1}{6}=\frac{-1}{6}=-0{,}1\hat{6}$

Por lo tanto, lo esperado es perder aproximadamente 17 céntimos por cada apuesta de 1€. Esto quiere decir, que si apostamos 1000 veces, lo esperado es perder unos 167 €

Media y varianza de una variable aleatoria

Se define como la media de una variable aleatoria a su esperanza $\mu=E(X)$

La varianza se define como $\sigma^2=E((X-\mu)^2)$ donde $E((X-\mu)^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)\,dx$ si X es una variable aleatoria continua, o $E((X-\mu)^2)=\sum_i (x_i-\mu)^2\cdot P(X=x_i)$ si X es discreta.

La desviación típica σ es la raíz cuadrada de la varianza.

La varianza también se puede calcular mediante la fórmula $\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$

<u>En el ejemplo anterior</u>:

$$\mu=E(X)=-\frac{1}{6}$$

$$E(X^2)=(-1)^2\cdot P(X=-1)+4^2\cdot P(X=4)=1\cdot\frac{5}{6}+16\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2=\frac{7}{2}-\frac{1}{36}=\frac{125}{36}\approx 3{,}47$$

<u>Ejemplo</u>:

Consideremos la variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & si\,x\geq 0\\ 0 & si\,x<0\end{cases}$$

Vemos que cumple $f(x)\geq 0\ \forall\, x\in\Re$ y $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}2e^{-2x}\,dx=\left[-e^{-2x}\right]_0^{+\infty}=0-(-1)=1$

Entonces $\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}2x\cdot e^{-2x}\,dx=\left[-x\cdot e^{-2x}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-e^{-2x}\,dx=\left[-e^{-2x}x-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-2x}x-\frac{e^{-2x}}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2}\right)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ya que $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}}{2}=0$ y $\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-2x}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2e^{2x}}=0$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot 2e^{-2x}\,dx=\left[-x^2e^{-2x}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-2xe^{-2x}\,dx=$$

$$=\left[-x^2e^{-2x}\right]_0^{+\infty}+\left[-e^{-2x}x-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty}=\left[\left(-x^2-x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

Entonces $\sigma^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Distribución Binomial

Definición

Consideramos un experimento aleatorio que tiene dos posibles resultados, llamémosles "éxito" y "fracaso". Supongamos que repetimos el experimento aleatorio n veces, de tal modo que

- **Los n ensayos son independientes entre sí.**
- **La probabilidad de "éxito", p, permanece constante.**

Entonces podemos definir una variable aleatoria X="número de exitos" y a la función de distribución de probabilidad de X le llamaremos distribución binomial B(n,p).

Ejemplo

Si tiramos una moneda no cargada 5 veces, se cumple que cada tirada es independiente de las otras y además la probabilidad de sacar cara siempre es 0,5. Por lo tanto la variable aleatoria X="número de caras" sigue una distribución binomial B(5, 0.5).

Si queremos calcular la probabilidad de sacar 3 caras tendremos que ver en primer lugar en cuántos de los sucesos del espacio muestral salen 3 caras. Obtendremos que el número de sucesos en que salen 3 caras es de $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$:

"CCC++", "CC+C+", "C+CC+", "+CCC+" , "CC++C", "C+C+C", "+CC+C", "C++CCC", "+C+CCC" y "++CCC"

(Para contar miramos en que posiciones podemos colocar las C, así obtenemos $C_{5,3}$ casos)

Cada uno de los 10 casos anteriores tiene la misma probabilidad: $P(C)^3 \cdot P(+)^2 = 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2$

Por lo tanto $P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2$

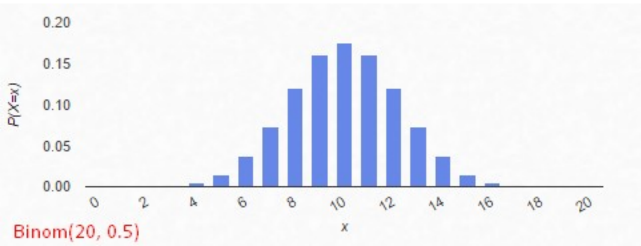
Función de Probabilidad

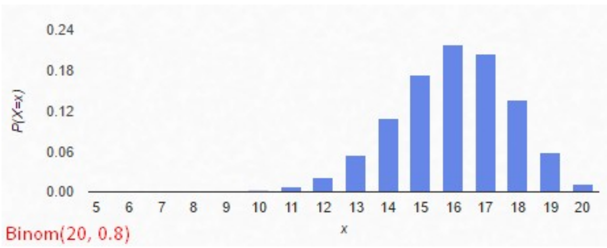
En general, si X sigue una distribución binomial B(n,p) entonces

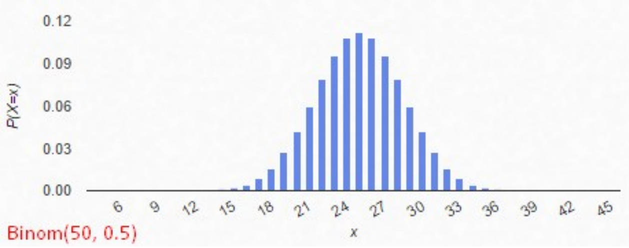
$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad ; k=0,\dots,n$$

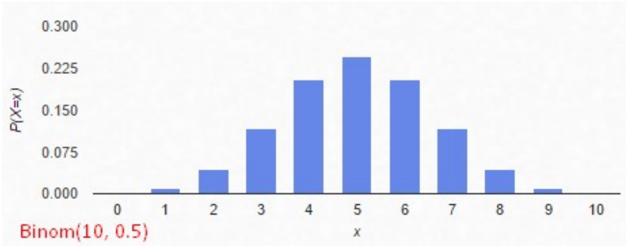
donde p="probabilidad de éxito" y q=1-p="probabilidad de fracaso".

Acontinuación podemos ver varios ejemplos de gráficas de funciones de probabilidad de distribuciones binomiales con diferentes parámetros:









Media y varianza de la distribución Binomial

La media de la distribución binomial:

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

donde n es el número de repeticiones y p la probabilidad de "exito"

La varianza viene dada por:

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

con q = "probabilidad de fracaso" = 1-p

Distribución Normal

Definición

Decimos que una variable aleatoria continua X, sigue una distribución normal de parámetros μ y σ, $X \in N(\mu, \sigma)$, cuando su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

con $\mu, \sigma \in \Re ; \sigma > 0$

Media y varianza de una distribución normal

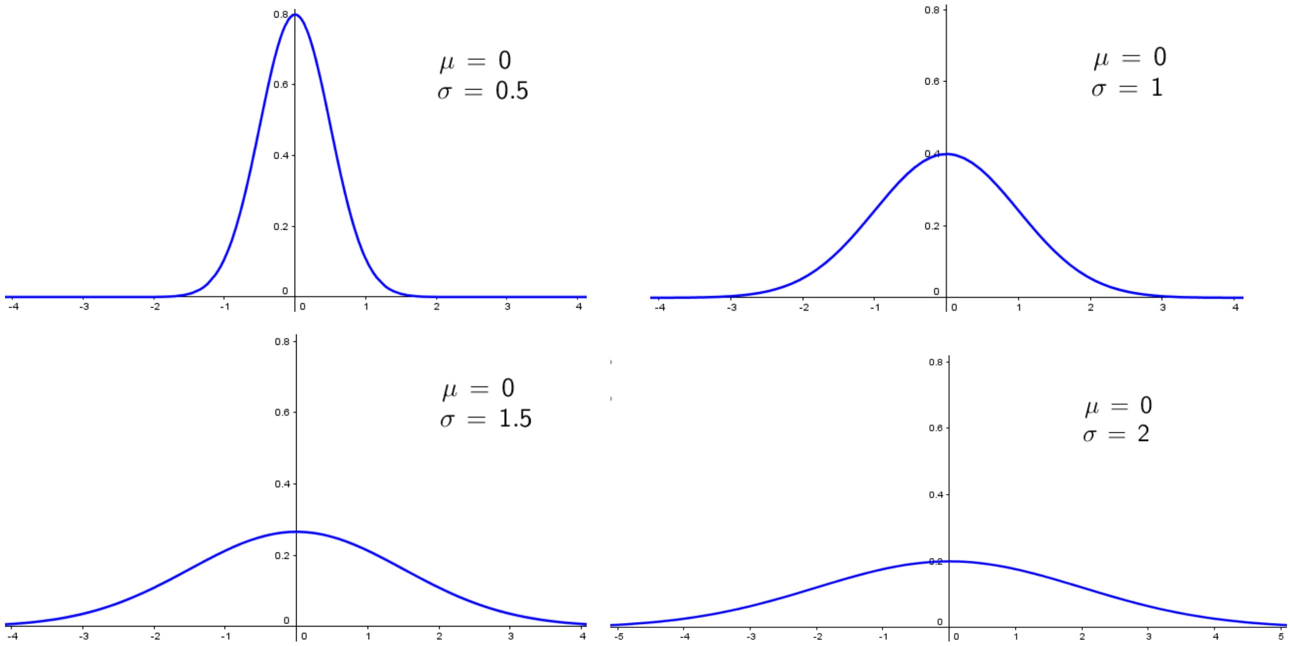
La media y la varianza de la variable aleatoria se corresponden con el valor de los parámetros μ y σ, de tal modo que:

$$X \in N(\mu, \sigma) \Rightarrow \begin{cases} media: \mu \\ varianza: \sigma^2 \end{cases}$$

Características de una distribución normal

- En una distribución normal los datos están agrupados en torno a la media, de tal manera que sea poco probable encontrar datos que difieran sustancialmente de la media.
- Es simétrica, la probabilidad de encontrar datos mayores que la media es la misma que la de encontrar datos menores que la media, dicha probabilidad sólo depende de lo alejados que estén de la media.
- Existe un resultado teórico (teorema central del límite) que garantiza que cuando una variable es la acumulación de multitud de pequeños factores independientes dicha variable sigue una distribución normal. Por ejemplo la altura de una persona depende de diversos factores independientes: alimentación, factores genéticos, hormonales, contaminación ambiental, etc. Por tanto dicha altura se considerará como una variable aleatoria con

distribución normal.



Tipificación de una distribución normal

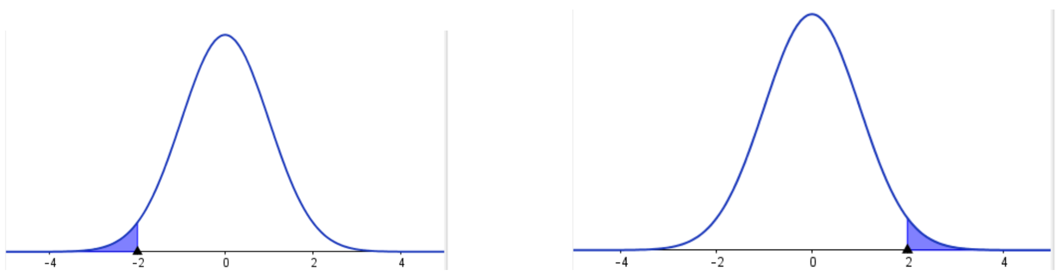
Si tenemos una variable aleatoria continua X, y queremos calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores dentro del intervalo [a,b], P(a<X<b), deberíamos hacer $\int_a^b f(x)\,dx$

En el caso de la distribución normal, el problema está en que la función de densidad no tiene una primitiva analítica, con lo que no se puede utilizar la regla de Barrow para calcular probabilidades.

En la práctica, si la distribución X es una N(0,1) se usa una tabla de probabilidades (ver anexo), donde aparecen las probabilidades de que X tome valores menores que un determinado número, P(X<a). A partir de esta tabla podemos calcular el resto de probabilidades, utilizando las propiedades y teniendo en cuenta que la distribución normal es simétrica respecto a la media.

Ejemplo:

Supongamos que $X \in N(0{,}1)$ y queremos calcular P(X<-2). Como la densidad de probabilidad de una N(0,1) es simétrica respecto al 0, tendremos que
$P(X<-2)=P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-0{,}9772=0{,}0228$



Si la distribución X es una normal N(μ,σ) lo que hay que hacer es transformarla en una N(0,1):

$$\boxed{X \in N(\mu,\sigma) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \in N(0,1)}$$

Ejemplo:

Supongamos que $X \in N(20{,}5)$ y queremos calcular P(X>21). Entonces la variable aleatoria

$Y=\frac{X-20}{5}\in N(0,1)$ y por tanto

$$P(X>21)=P\left(\frac{X-20}{5}>\frac{21-20}{5}\right)=P(Y>0.2)=1-P(Y\leq 0.2)=1-0.5793=0.4297$$

Supongamos ahora que $X\in N(7{,}0.5)$ y queremos calcular $P(6<X<8)$:

$$P(6<X<8)=P\left(\frac{6-7}{0.5}<\frac{X-7}{0.5}<\frac{8-7}{0.5}\right)=P(-2<Y<2)=P(Y<2)-P(Y\leq -2)=$$

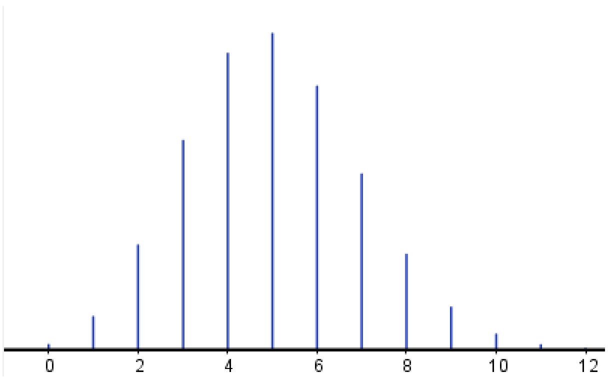
$$P(Y\leq 2)-P(Y\leq -2)=P(Y\leq 2)-P(Y>2)=P(Y\leq 2)-[1-P(Y\leq 2)]=$$

$$=0.9772-(1-0.9772)=0{,}9954$$

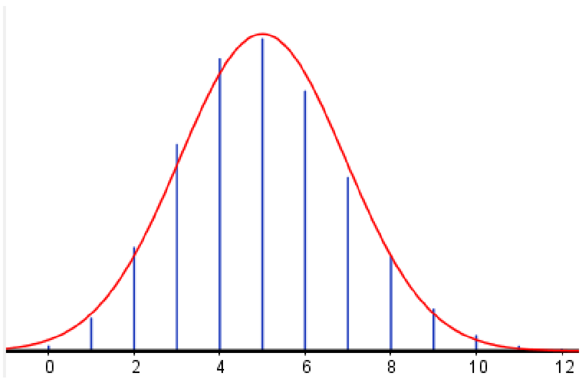
Aproximación de la Binomial por la Normal

Si $X\in B(n,p)$, de tal forma que $np\geq 5$ y $n(1-p)\geq 5$ entonces X puede aproximarse por una distribución normal de parámetros $\mu=np$ y $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$

$$\left.\begin{array}{c} X\in B(n,p)\\ n\cdot p\geq 5\\ n\cdot(1-p)\geq 5\end{array}\right\}\Rightarrow X\approx N\left(np,\sqrt{np(1-p)}\right)$$



Binomial(20 , 0.25)



Aproximación B(20 , 0.25) por $N(5,\sqrt{3.75})$

<u>Corrección de medio punto</u>

A la hora de realizar la aproximación hay que tener en cuenta que en una variable aleatoria continua la probabilidad de que la variable tome un valor puntual es cero ($X\in N(\mu,\sigma)\Rightarrow P(X=a)=0$).
Con lo cual, si aproximamos una binomial por una normal y deseamos estimar la probabilidad de un valor entero determinado, deberemos obtener un intervalo que represente la probabilidad de dicho entero. Tomaremos ese intervalo centrado en el valor deseado y con una unidad de longitud.

Si $X\in B(n,p)$ e $Y\in N(np,\sqrt{npq})$ entonces $P(X=a)\approx P(a-0.5<Y<a+0.5)$; $a\in\mathbb{N}$

siempre que $np\geq 5$ y $nq\geq 5$

Si lo que queremos es aproximar la probabilidad de un intervalo entonces también hemos de tener en cuenta la probabilidad de esos valores puntuales.

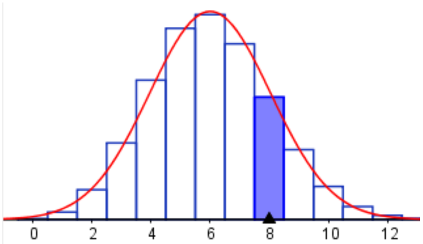
<u>Ejemplos</u>:

- $X\in B(20{,}0.3)\Rightarrow P(X\geq 8)\approx P(Y>7.5)$ *donde* $Y\in N(6,\sqrt{4.2})$ la cual calculamos tipificando la variable

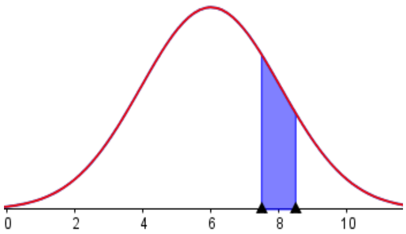
$$P(Y>7.5)=P\left(\frac{Y-6}{\sqrt{4.2}}>\frac{7.5-6}{\sqrt{4.2}}\right)\approx P\left(\frac{Y-6}{\sqrt{4.2}}>0{,}732\right)=1-P\left(\frac{Y-6}{\sqrt{4.2}}\leq 0{,}732\right)\approx 1-0.7673=$$
$$=0.2327$$

- $X\in B(20{,}0.3)\Rightarrow P(X>8)\approx P(Y>8.5)$ *donde* $Y\in N(6,\sqrt{4.2})$ la cual calculamos tipificando la variable

$$P(Y>8.5)=P\left(\frac{Y-6}{\sqrt{4.2}}>\frac{8.5-6}{\sqrt{4.2}}\right)\approx P\left(\frac{Y-6}{\sqrt{4.2}}>1{,}22\right)=1-P\left(\frac{Y-6}{\sqrt{4.2}}\leq 1{,}22\right)=1-0.8888=$$
$$=0.1112$$



$X\in B(20{,}0.3)$
P(X=8)=0.1144



$Y\in N(6,\sqrt{4.2})$
P(7.5 < Y < 8.5)=0.1209