Tema 5 – Funciones

Definición de función

Llamamos magnitud a una cualidad que se puede medir, esto es, asignarle un valor numérico respecto a una unidad de referencia. Las magnitudes pueden ser constantes o variables.

Una **función es una relación entre dos variables**, de tal modo que conociendo el valor de una de ellas se puede determinar el valor de la otra. A esas dos variables les llamamos variable dependiente (y) y variable independiente (x).

Podemos definir o determinar una función de varias formas:

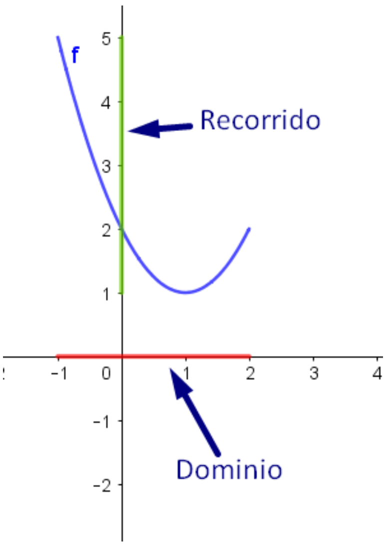
- Mediante un enunciado.
- Mediante una fórmula.
- Con una gráfica.
- Utilizando una tabla de valores.

Dominio y recorrido de una función

El dominio de una función es el conjunto de valores que toma la variable independiente (x).

El rango o recorrido de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente (y).

Gráficamente:



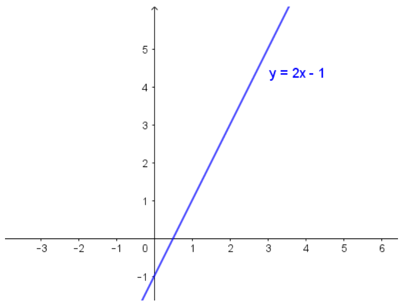
<u>Observaciones</u>:

- Cuando veamos una función expresada de forma analítica (ecuación) el dominio estará condicionado por las operaciones que aparezcan en la fórmula. Por ejemplo: en la función $y=\frac{1}{x}$ el cero no está en el dominio de la función ya que no se puede dividir entre cero, o en la función $y=\log x$, el dominio sería el conjunto de números positivos, ya que para el resto no se puede calcular el logaritmo.

- El dominio siempre estará condicionado por el contexto de la función, por ejemplo, la función y=x^2 expresa el área de un cuadrado en función de la longitud de su lado. En este caso el dominio de la función es el de los números positivos, ya que no tiene sentido hablar de longitudes negativas.

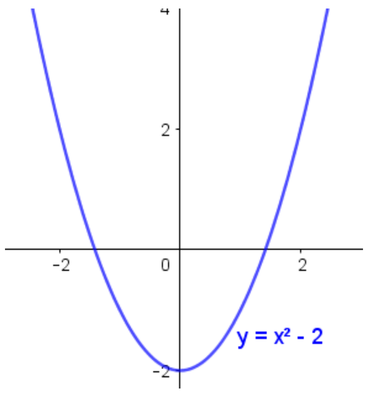
Funciones lineales

Las funciones lineales son aquellas que tienen una ecuación de la forma $\boxed{y=mx+n}$ y su gráfica es una recta. El valor m se corresponde con la pendiente de la recta (n es la ordenada en el origen).

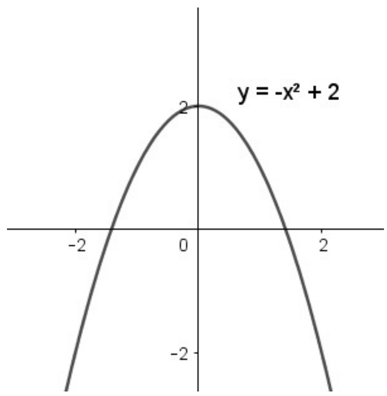


Funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas tienen una ecuación de la forma $\boxed{y=ax^2+bx+c}$ y su gráfica es una parábola.



Parábola convexa



Parábola cóncava

Las parábolas tienen un **vértice** (máximo o mínimo) cuya coordenada x viene dada por la fórmula $x=\frac{-b}{2a}$

Ejemplo:

Si queremos calcular el vértice de la parábola $y=2x^2+4x-6$, sú coordenada x vendrá dada por $x=\frac{-4}{2\cdot 2}=-1$. La coordenada y la obtendremos sustituyendo la coordenada x en la ecuación $y=2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)-6=-8$. Así pues, el vértice de esta parábola será el punto (-1,-8).

Si queremos calcular los **puntos de corte con los ejes**, tendremos que resolver las ecuaciones $x=0$ e $y=0$

Ejemplo:

En la parábola $y=2x^2+4x-6$, el corte con el eje Y vendrá dado por la ecuación x=0, es decir: $y=2\cdot 0^2+4\cdot 0-6$, con lo que el punto de corte es el (0,-6).

Para calcular los cortes con el eje X, haremos y=0

$$0=2x^2+4x-6 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2}\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ x=-3\end{cases}$$

con lo que los puntos de corte con el eje X serán (-3,0) y (1,0)

Otras familias de funciones

Funciones polinómicas

Su ecuación es del tipo y=p(x), donde p(x) es un polinomio de variable x.

Ejemplo: $y=4x^5-2x^3+4x-2$

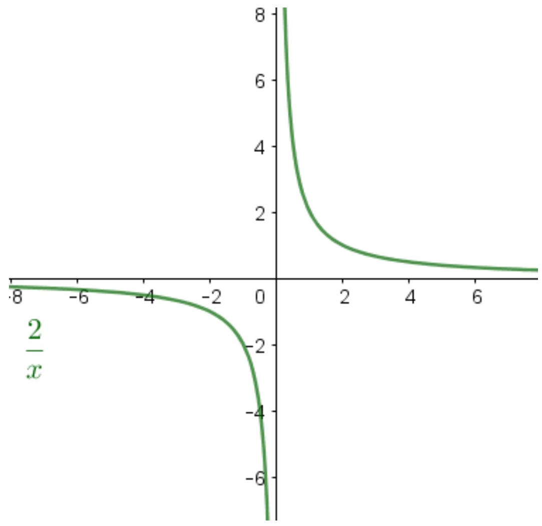
Funciones racionales

Su ecuación es del tipo $y=\frac{p(x)}{q(x)}$, donde p(x) y q(x) son polinomios de variable x.

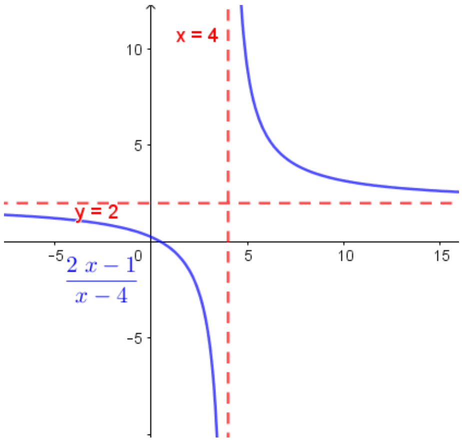
Ejemplo: $y=\frac{x^4-5x^3-2x+4}{5x^4-x^3+x-1}$

Funciones de proporcionalidad inversa

Su ecuación es del tipo $y=\frac{k}{x}$ y su gráfica una hipérbola cuyas asíntotas coinciden con los ejes

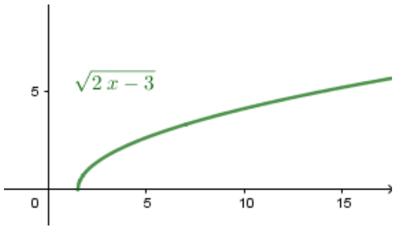


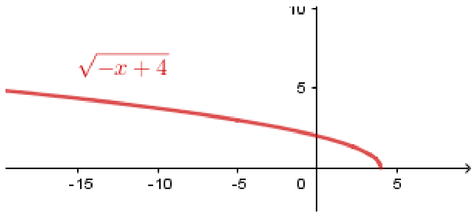
También son hipérbolas las gráficas de las funciones racionales del tipo $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, aunque en este caso las asíntotas son las rectas y=a/c y x=-d/c



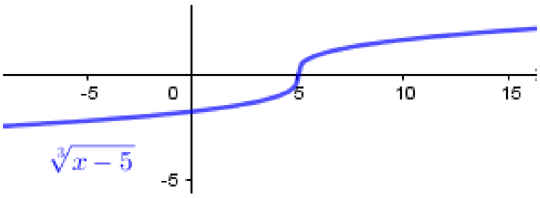
Funciones radicales

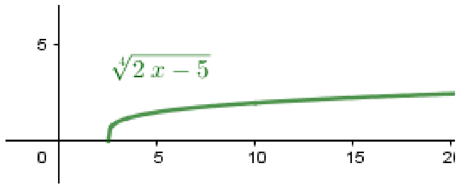
Raíces cuadradas: su gráfica tiene forma de parábola (media parábola). La característica más importante es el dominio de la función.





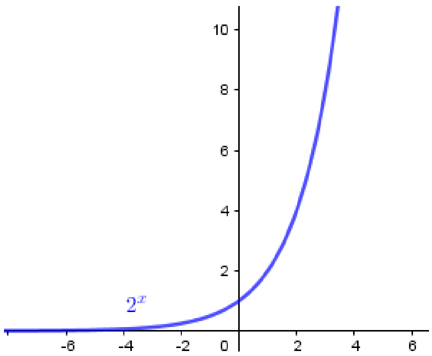
Otras raíces

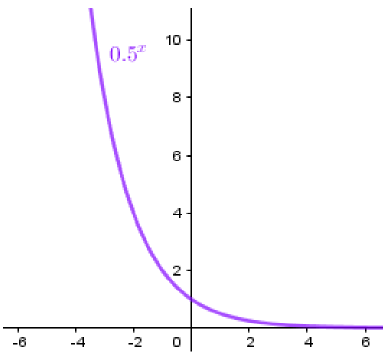




Funciones exponenciales

En estas funciones, la variable aparece en el exponente de una potencia. Hay que distinguir los casos en que la base es mayor que 1 frente a aquellos en los que es menor.

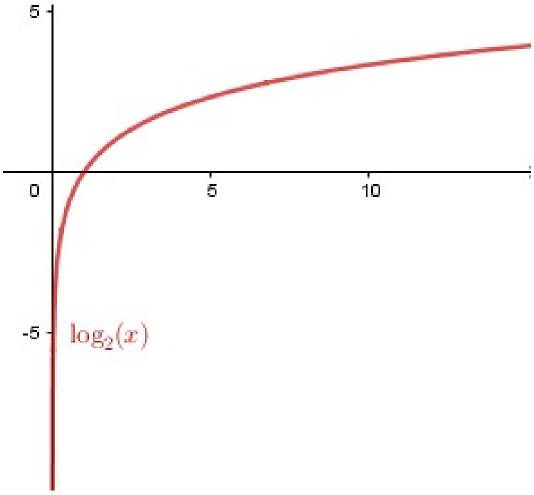


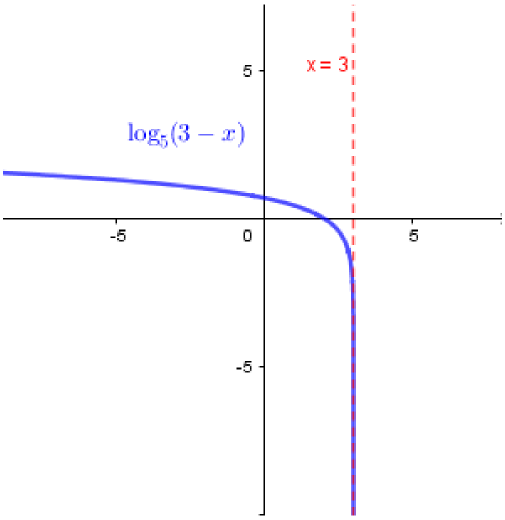


(nótese que 0.5^x puede escribirse también como 2^{-x})

Funciones logarítmicas

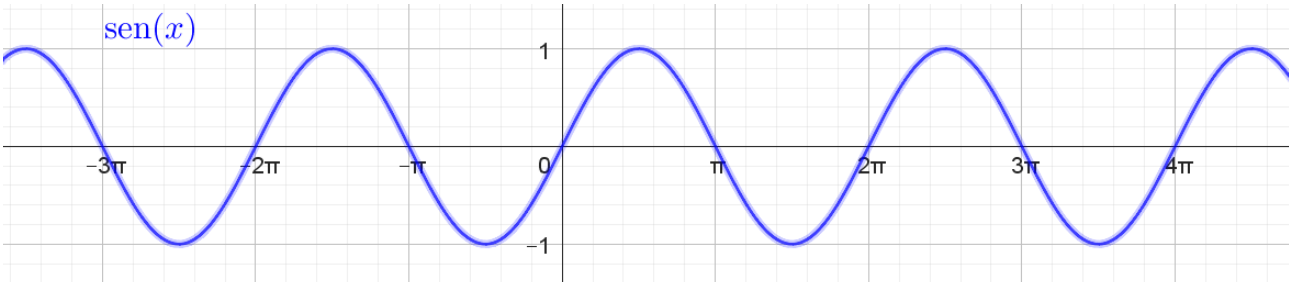
En este caso, la variable está dentro de un logaritmo. Hay que prestar atención al dominio de la función (también hay que observar que estas funciones presentan una asíntota vertical en el extremo del dominio).

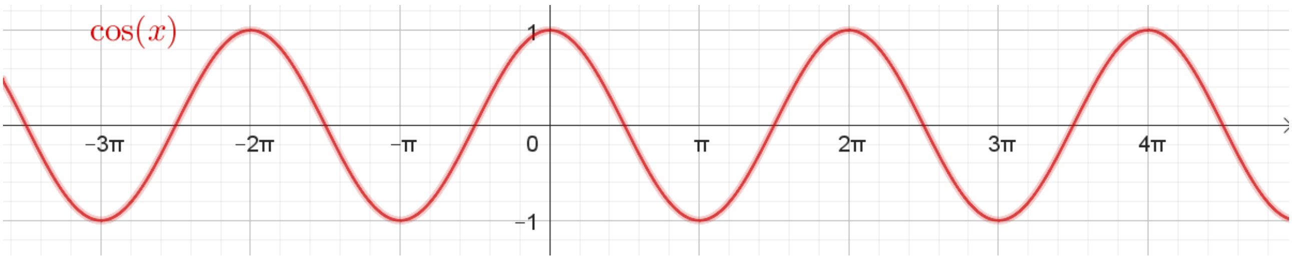


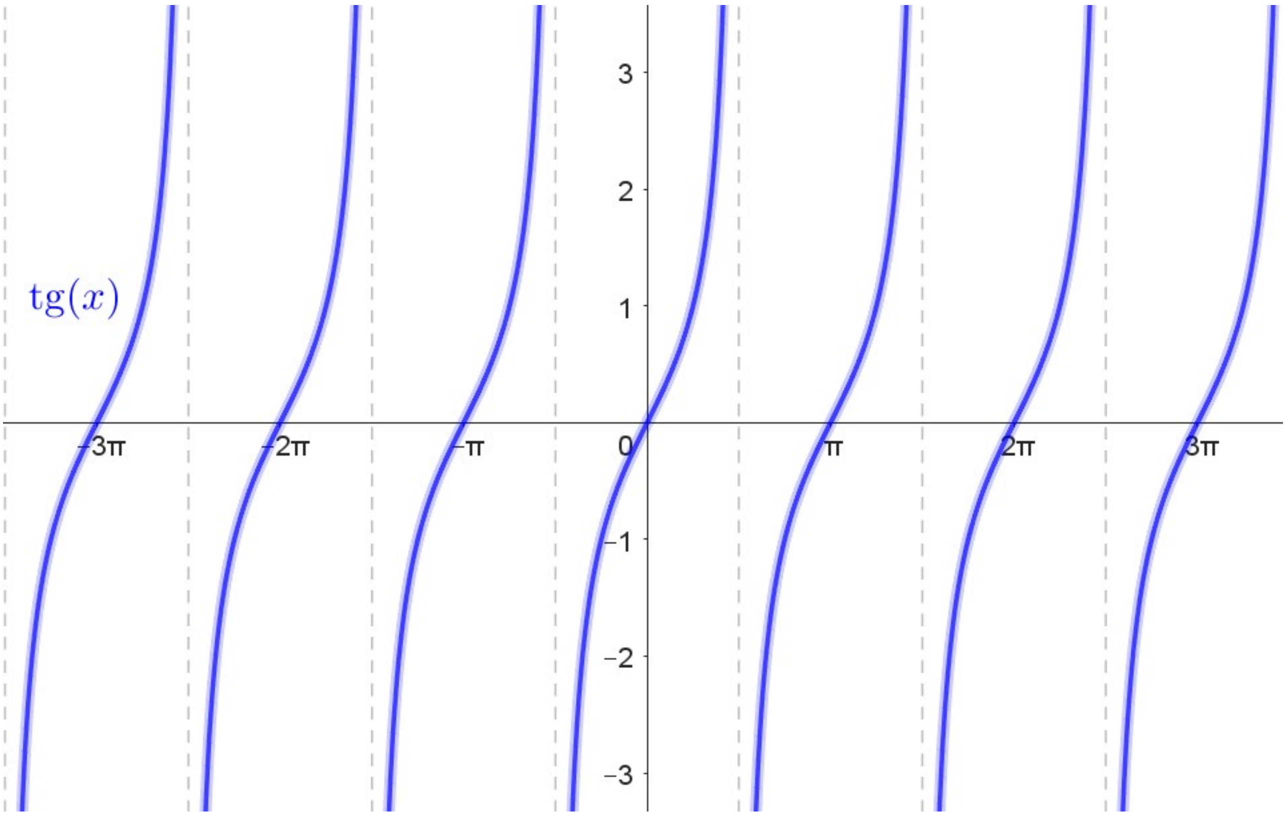


Funciones trigonométricas

Principalmente estudiaremos las funciones seno, coseno y tangente. Su característica principal es que son **funciones periódicas** (su gráfica se puede construir a partir de un trozo que se repite indefinidamente). En una función periódica existe un valor T, para el cual se cumple f(x+T)=f(x). A este número T se le llama periodo de la función.







El seno y el coseno son funciones periódicas de periodo 2π. En la tangente el periodo es π. (en estas funciones, el valor de x está en radianes).

Funciones definidas a trozos

Son funciones en las que su dominio está dividido en varios subconjuntos, en cada uno de los cuales se utiliza una ecuación diferente.

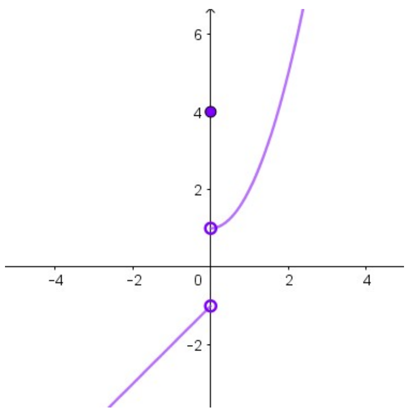
Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\, x<0 \\ 4 & si\, x=0 \\ x^2+1 & si\, x>0 \end{cases}$$

En este ejemplo

$$f(-1)=2\cdot(-1)-1=-3 \ ; \ f(0)=4 \ ; \ f(2)=2^2+1=5$$

Y la gráfica sería:

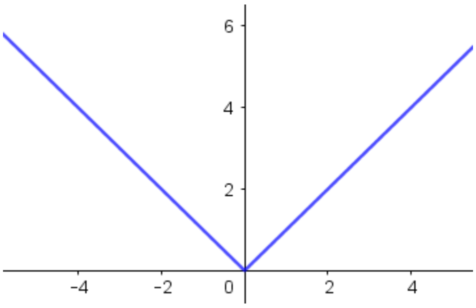


Función valor absoluto

La función valor absoluto se define como:

$$|x| = \begin{cases} -x & si\; x < 0 \\ x & si\; x \geq 0 \end{cases}$$

Su gráfica



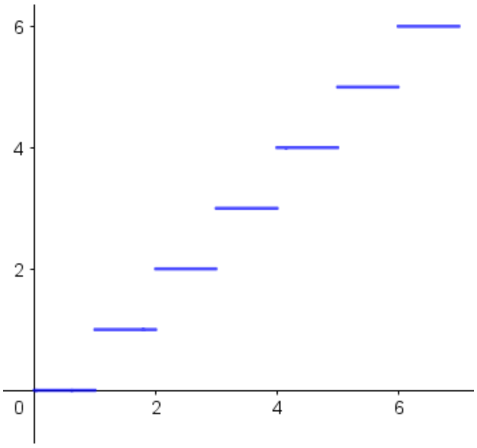
Función parte entera

La parte entera de un número es el entero anterior a dicho número (la parte entera de 2,31 es 2)

La función parte entera se define $[x]=n \quad si\; x \in [n, n+1)$.

Ejemplos: [3,21]=3; [9]=9; [9,99,]=9 ;…..

Su gráfica



Composición de funciones

La composición de dos funciones consiste en aplicar primero una y luego la otra
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ($g \circ f$ se lee f compuesta con g)

<u>Ejemplo</u>:

$$f(x) = 2x^2 + 1 \; ; \;\; g(x) = \frac{1}{x+1}$$

Para calcular $(g \circ f)(1) = \frac{1}{4}$, hacemos

$$1 \xrightarrow{f} 2 \cdot 1^2 + 1 = 3 \xrightarrow{g} \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

También podemos calcular la ecuación de la función compuesta:

$f(x)=2x^2+1$; $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{f(x)+1}=\dfrac{1}{2x^2+1+1}=\dfrac{1}{2x^2+2}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\cdot(g(x))^2+1=2\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2+1=\dfrac{2}{x^2+2x+1}+1=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1}$

Nótese que $\boxed{(g\circ f)\neq(f\circ g)}$

Función identidad

A la función f(x)=x se la llama función identidad (también se representa por id_x)

La función identidad es la única que cumple $f\circ id_x=id_x\circ f=f$ (elemento neutro de la composición).

Funciones inversas

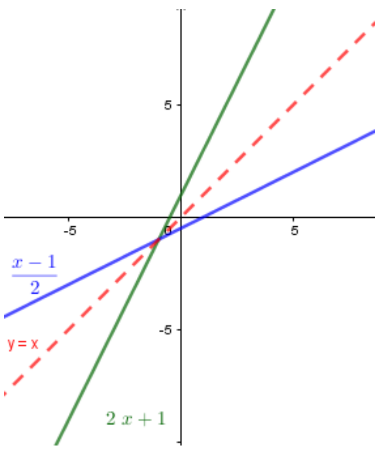
Dos funciones f y g se dice que son inversas si cumplen $\boxed{f\circ g=g\circ f=id_x}$

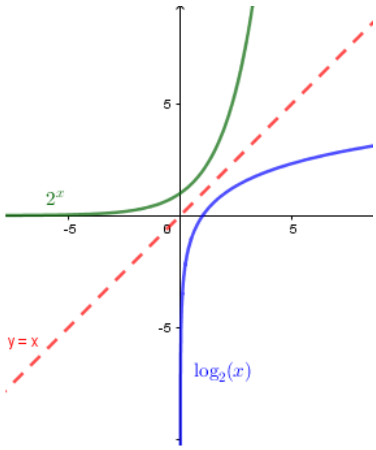
En este caso es posible escribir g= f^{-1} . A este respecto hay que tener cuidado en no confundir f^{-1} (función inversa de f) con $(f(x))^{-1}=\dfrac{1}{f(x)}$ (potencia de exponente negativo)

Ejemplos de funciones inversas:

- $f(x)=2x+1$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{2}$
- $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$
- $f(x)=2^x$ y $g(x)=\log_2 x$
- $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es inversa de sí misma.

Si dos funciones son inversas, entonces sus gráficas son simétricas respecto a la recta y=x



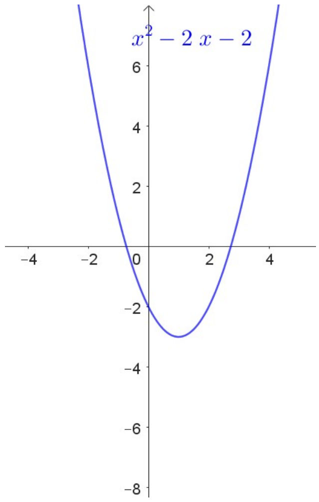


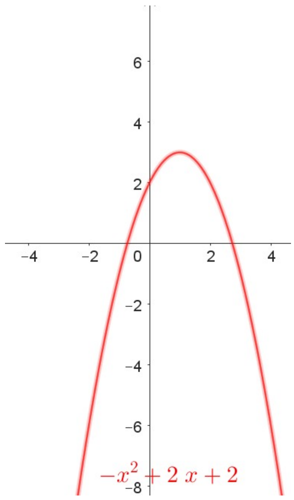
Transformaciones

Vamos a estudiar algunos movimientos en la gráfica de la función y los cambios que estos producen en la ecuación.

Simetría respecto al eje x

Ocurre cuando cambiamos de signo la fórmula de la función: $f(x) \rightarrow -f(x)$

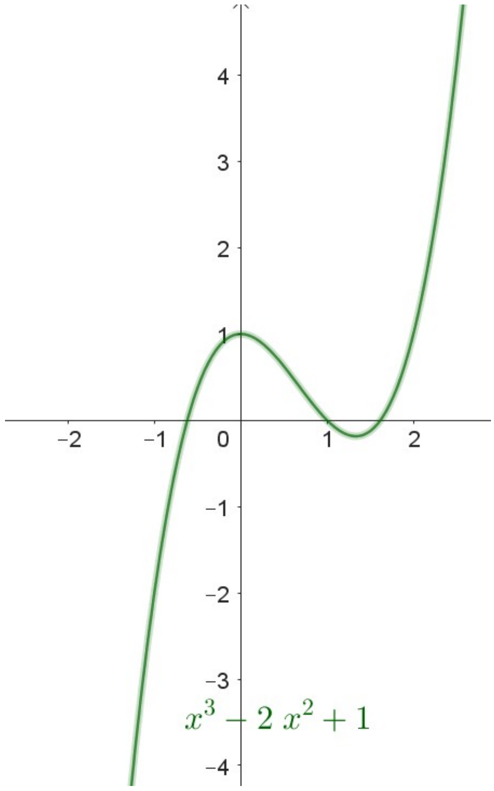


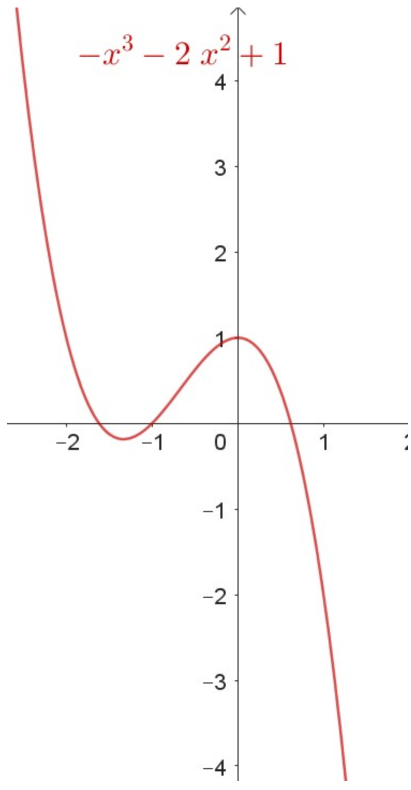


Simetría respecto al eje y

Ocurre cuando, en la expresión de la función, cambiamos de signo la variable: $f(x) \rightarrow f(-x)$

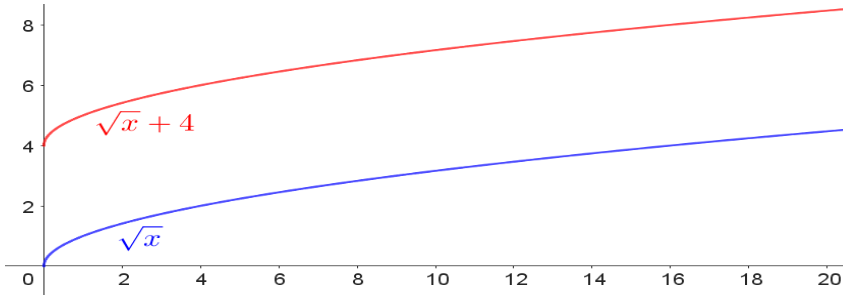
$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 + 1 = -x^3 - 2x^2 + 1$





Desplazamiento vertical

Ocurre cuando sumamos (o restamos) una constante en la fórmula de la función: $f(x) \to f(x)+k$



Desplazamiento horizontal

Ocurre cuando en la expresión de la función cambiamos x por x+k, donde k es una constante: $f(x) \to f(x+k)$. La función se desplaza a la izquierda si k es positiva, y a la derecha si es negativa.

$f(x)=x^2-3x+4 \;\to\; f(x+2)=(x+2)^2-3(x+2)+4=x^2+4x+4-3x-6+4=x^2+x+2$