Geometría

El espacio vectorial R^3

Definición

Definimos como R^3 al conjunto $(x, y, z) / x, y, z \in \Re$ dotado de las operaciones

- Suma: $\begin{array}{l} R^3 x R^3 \rightarrow R^3 \\ (x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \end{array}$
- Multiplicación por escalar: $\begin{array}{l} \Re x R^3 \rightarrow R^3 \\ \alpha \cdot (x, y, z)=(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z); \quad \alpha, x, y, z \in \Re \end{array}$

Se puede comprobar que el conjunto R^3 con las operaciones + y · (R^3,+,·) cumple las condiciones para ser considerado espacio vectorial.

Base de R^3

Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ pertenecientes a un espacio vectorial V, se dice que son un generador del espacio si cualquier vector $\vec{u} \in V$ puede escribirse como combinación lineal de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, es decir:

$$\forall \vec{u} \in V, \exists \alpha_{1,} \ldots, \alpha_n \in \Re / \quad \vec{u}=\alpha_1 \cdot \vec{v}_1+\ldots+\alpha_n \cdot \vec{v}_n$$

Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ pertenecientes a un espacio vectorial V, se dice que son una base del espacio si son un generador de V y además son linealmente independientes.

Si tenemos un vector cualquiera $\vec{w} \in V$ y una base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, podremos expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores de la base:

$$\vec{w}=\alpha_1 \cdot \vec{u}_1+\ldots+\alpha_n \cdot \vec{u}_n; \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Re$$

A los números $\alpha_{1,} \ldots, \alpha_n$ se les llama coordenadas de $\vec{w}$ respecto a la base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$

Al número de vectores que forman una base del espacio vectorial V se le llama dimensión de V (se puede demostrar que todas las bases de V tienen el mismo número de vectores)

Los vectores (1,0,0) , (0,1,0) y (0,0,1) forman una base de R^3, esta base se conoce como base canónica.

Como consecuencia de lo anterior, podemos observar que la dimensión de R^3 es 3.

Si queremos encontrar otra base de R^3 lo único que debemos hacer es buscar tres vectores linealmente independientes.

Vectores en el Espacio Euclídeo

Definición

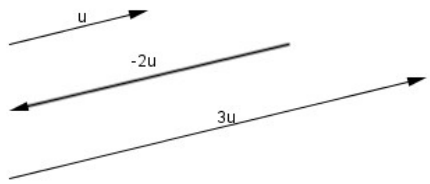
Dos puntos del espacio A y B, dados en un cierto orden, determinan lo que llamamos vector fijo. En este caso, el vector $\vec{AB}$ sería el vector que comienza en el punto A y acaba en el punto B.

- El módulo de un vector fijo $\vec{AB}$ es la longitud del segmento $\overline{AB}$
- La dirección del vector $\vec{AB}$ es la de la recta que pasa por A y B
- El sentido del vector $\vec{AB}$ es el que va del origen al extremo.
- El vector $\vec{BA}$ es el vector opuesto a $\vec{AB}$. Tiene mismo módulo, misma dirección pero sentido opuesto.
- Si el origen del vector y el extremo son el mismo punto, tenemos entonces un vector nulo.

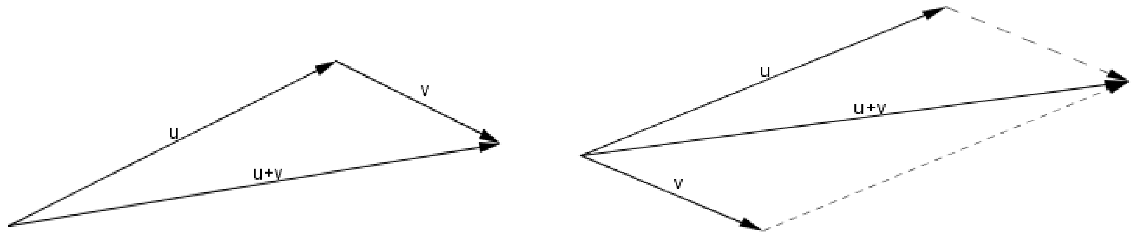
Dos vectores fijos se dicen que son equipolentes, si tienen mismo módulo, misma dirección y

mismo sentido.
Cada uno de los conjuntos que forman todos vectores equipolentes entre si se representa por lo que llamamos un vector libre.
Los vectores libres poseen las operaciones de suma y producto por un escalar.

- El resultado de multiplicar un vector por un escalar positivo es otro vector, con la misma dirección y sentido, pero cuyo módulo queda multiplicado por dicho escalar.
  Si multiplicamos un vector por un escalar negativo, la dirección se mantiene pero el sentido cambia. El módulo obviamente queda multiplicado por el valor absoluto del escalar.



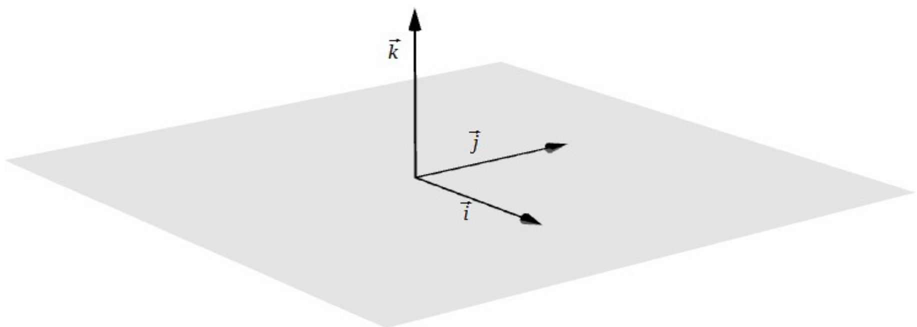
- Para calcular el resultado de la suma podemos fijar el primer vector y a continuación fijar el segundo de tal manera que su origen sea el extremo del primer vector. El vector resultante es el que va del origen del primer vector al extremo del segundo.



El conjunto de vectores libres del espacio Euclídeo con las operaciones de suma y producto por escalar es un espacio vectorial.

Base

Para obtener una base de este espacio tendremos que buscar tres vectores que no sean coplanarios (se entiende que si los aplicamos sobre el mismo punto, el origen y los 3 extremos no están todos en el mismo plano)
El espacio vectorial de los vectores libres es isomorfo a R^3. Esto viene a decir que podremos asociar cada vector libre con un elemento $(x,y,z)\in R^3$
Para hacer esto, la manera habitual consiste en buscar tres vectores que tengan módulo 1 (vectores unitarios) y que sean perpendiculares entre sí, esto es lo que se conoce como base ortonormal.
A los vectores de esta base ortonormal, les asociaremos los de la base canónica de R^3 : (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) De esta manera, podremos realizar las operaciones con los vectores de manera algebraica o geométrica, según nos interese.



$\vec{i}=(1,0,0)$ $\vec{j}=(0,1,0)$ $\vec{k}=(0,0,1)$

Producto Escalar

Definición:

El producto escalar de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un **número** que viene dado por la expresión:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha}$$

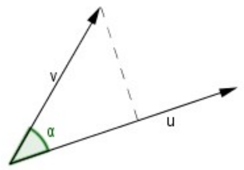
donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, cuyas coordenadas respecto a una base ortonormal son $\vec{u}=(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}=(x_2, y_2, z_2)$ se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}$$

Geométricamente, el producto escalar se interpreta como el producto del módulo de $\vec{u}$ por la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, cumpliendo la fórmula:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$



Observación: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow u\ y\ v\ son\ ortogonales$

Módulo

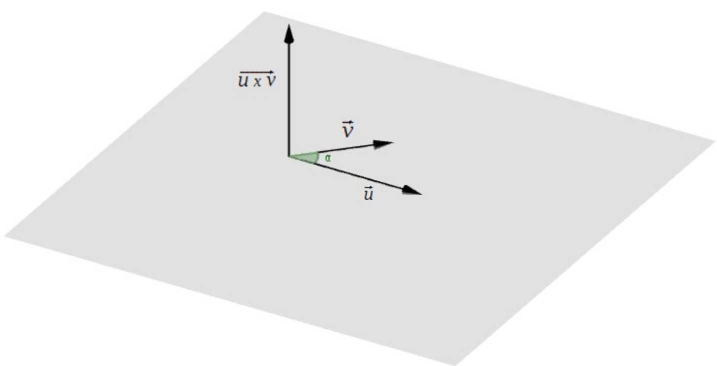
Como ya se dijo, el módulo de un vector del espacio euclídeo se corresponde con su longitud. Si las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto a una base ortonormal son $\vec{v}=(x, y, z)$ el módulo se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Producto Vectorial

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u}\times\vec{v}$ que se define de la siguiente manera:

- Si $\vec{u}$ o $\vec{v}$ son nulos, o bien tienen la misma dirección, entonces $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$
- Si $\vec{u}$ ni $\vec{v}$ son nulos, ni tienen la misma dirección entonces el vector $\vec{u}\times\vec{v}$ es tal que:
  - ☛ Su módulo queda determinado por $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,\alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
  - ☛ Su dirección es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
  - ☛ El sentido es el del movimiento de un sacacorchos (o un destornillador) que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (tomando como ángulo de giro aquel que es menor de 180º)

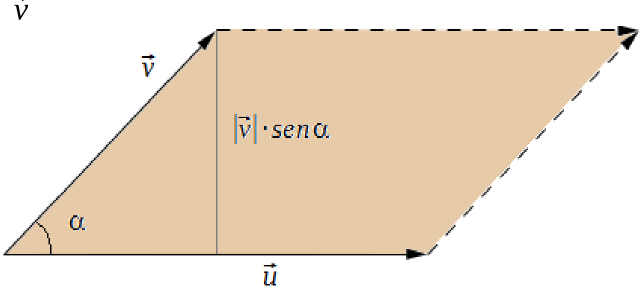


El producto vectorial de dos vectores cuyas coordenadas respecto a una base ortonormal $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)\equiv x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k}$ y $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)\equiv x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k}$ se calcula siguiendo la regla:

$$\vec{u}\,x\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}=(y_1\cdot z_2-y_2\cdot z_1,x_2\cdot z_1-x_1\cdot z_2,x_1\cdot y_2-x_2\cdot y_1)$$

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

- $\vec{u}\,x\,\vec{v}=-\vec{v}\,x\,\vec{u}$
- $(\alpha\vec{u})\,x\,\vec{v}=\vec{u}\,x\,(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\,x\,\vec{v});\quad \alpha\in\Re$
- $\vec{u}\ y\ \vec{v}\ tienen\ la\ misma\ dirección\Leftrightarrow\vec{u}\,x\,\vec{v}=\vec{0}$
- $|\vec{u}\,x\,\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,\alpha$
- $|\vec{u}\,x\,\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$
- Geométricamente $|\vec{u}\,x\,\vec{v}|$ coincide con el valor del área del paralelogramo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$



$Área=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,\alpha$

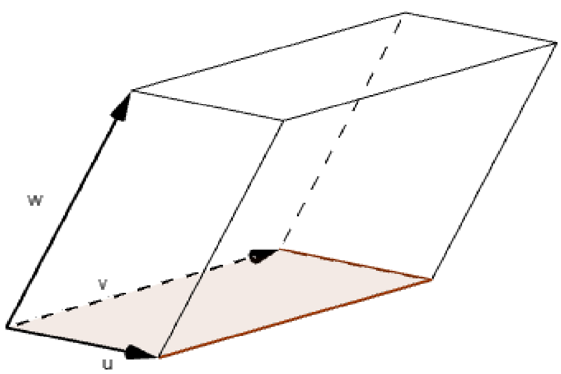
Producto Mixto

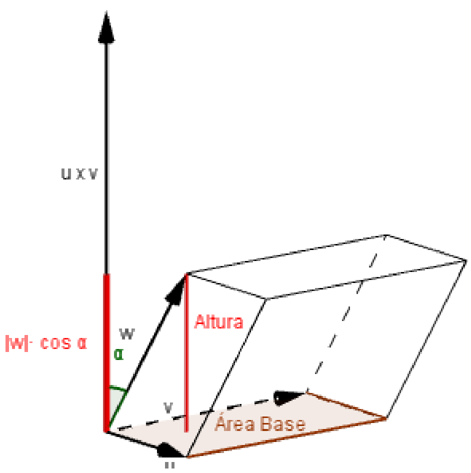
El producto mixto de 3 vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se define como $[\vec{u},\vec{w},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\,x\,\vec{w})$

Si las coordenadas de los vectores respecto a una base ortonormal son $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ y $\vec{w}=(x_3,y_3,z_3)$ entonces el producto mixto se calcula:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=x_1\cdot\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}-x_2\begin{vmatrix}x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}+x_3\cdot\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

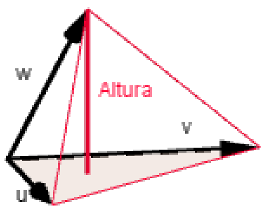
Geométricamente el producto mixto se corresponde (salvo signo) con el valor del volumen del paralelepípedo que forman los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$





$(\vec{u}\,x\,\vec{v})\cdot\vec{w}=|\vec{u}\,x\,\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\alpha=Área\ Base\cdot Altura$

Por otra parte si lo que queremos estudiar es el volumen del tetraedro formado por los tres vectores



entonces el volumen vendrá dado por:

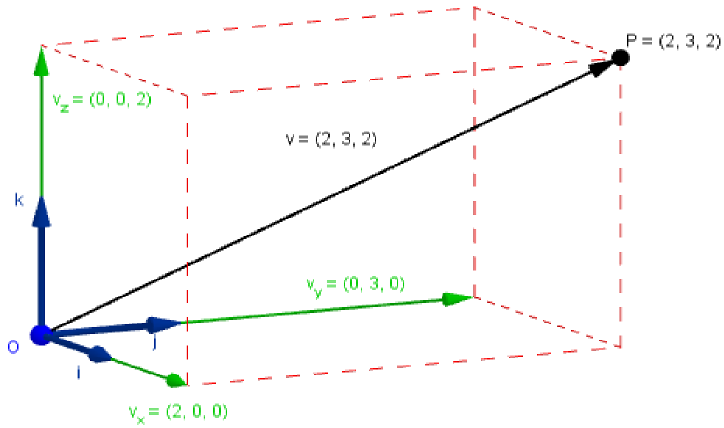
$$V=\frac{1}{3}\text{Área Base}\cdot\text{Altura}=\frac{1}{3}\cdot\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2}\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\alpha=\frac{1}{6}|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|=\frac{1}{6}|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$$

Puntos, Rectas y Planos en el Espacio Euclídeo

Sistema de referencia y coordenadas

Un sistema de referencia en el espacio está compuesto por un punto O, llamado origen, y tres vectores linealmente independientes $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

Un punto cualquiera del espacio puede expresarse como combinación de los elementos del sistema de referencia: $P=O+x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$. Diremos entonces, que los valores reales x, y, z son las coordenadas del punto P respecto a este sistema de referencia. De este modo podremos hacer referencia al punto P mediante sus coordenadas en este sistema $P\equiv(x,y,z)$



En la imagen $P\equiv(2,3,2)=2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$

<u>Nota</u>: Al establecer el sistema de referencia lo habitual es elegir unos vectores que sean ortonormales, pues de lo contrario los cálculos se complican.

Ecuaciones de la recta

Una recta es un conjunto de puntos que sigue una misma dirección.

La mejor manera de definir un conjunto de puntos es mediante una ecuación. Los puntos cuyas coordenadas cumplen la ecuación están en el conjunto, los que no la cumplen no están.

<u>Ecuación vectorial de la recta</u>

Si tenemos un punto P que pertenece a la recta r y un vector $\vec{v}$ que sigue la dirección de la recta (vector director) entonces los puntos X, de la recta r cumplirán la ecuación

$$\boxed{X=P+\lambda\cdot\vec{v}\ \text{ para algún }\ \lambda\in\Re}$$

Ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas se obtienen trabajando con coordenadas en la ecuación vectorial:

$$(x,y,z)=(p_x,p_y,p_z)+\lambda\cdot(v_x,v_y,v_z)\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=p_x+\lambda\cdot v_x\\ y=p_y+\lambda\cdot v_y\\ z=p_z+\lambda\cdot v_z\end{cases}\quad \lambda\in\Re}$$

Ecuaciones continuas

Si en las ecuaciones paramétricas despejamos el parámetro λ

$$\boxed{\frac{x-p_x}{v_x}=\frac{y-p_y}{v_y}=\frac{z-p_z}{v_z}}$$

Ecuaciones del plano

Un plano está definido por tres puntos o bien por un punto y dos vectores.

Ecuación vectorial

La condición para que el punto X pertenezca al plano definido por $P,\vec{u}\,y\,\vec{v}$ consiste en que el vector $\vec{AP}$ pueda expresarse como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

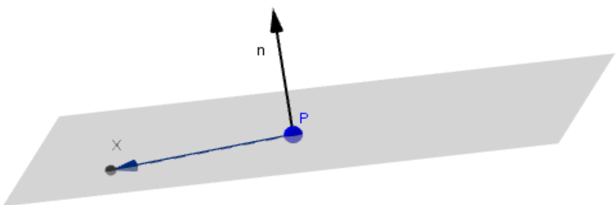
$$\boxed{\vec{PX}=\lambda\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\boxed{\begin{cases}x=p_x+\lambda\cdot u_x+\beta\cdot v_x\\ y=p_y+\lambda\cdot u_y+\beta\cdot v_y\\ z=p_z+\lambda\cdot u_z+\beta\cdot v_z\end{cases}\quad \lambda,\beta\in\Re}$$

Ecuación normal

Si P es un punto del plano y $\vec{n}$ es un vector normal, entonces, para todo punto X del plano, se cumple $\boxed{\vec{n}\cdot\vec{PX}=0}$



Ecuación general o implícita

Si introducimos coordenadas en la ecuación normal:

$$(n_x,n_y,n_z)\cdot(x-p_x,y-p_y,z-p_z)=0\Leftrightarrow n_x\cdot x+n_y\cdot y+n_z\cdot z-n_x\cdot p_x-n_y\cdot p_y-n_z\cdot p_z=0$$

entonces obtenemos una ecuación de la forma

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

Observaciones:

- Los coeficientes de la ecuación general son las coordenadas de un vector normal al plano $\vec{n}=(A,B,C)$
- Si lo que conocemos del plano son un punto P y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ entonces podremos obtener la ecuación general razonando que para todo punto X del plano los vectores $\vec{PX}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, y por tanto

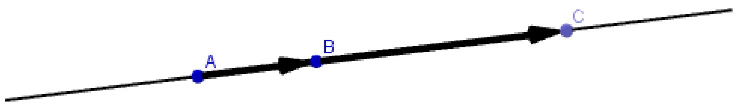
$$\begin{vmatrix} x-p_x & y-p_y & z-p_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=0$$

Aunque también podemos obtener un vector normal con el producto vectorial $\vec{n}=\vec{u}\,x\,\vec{v}$

Puntos alineados y coplanarios

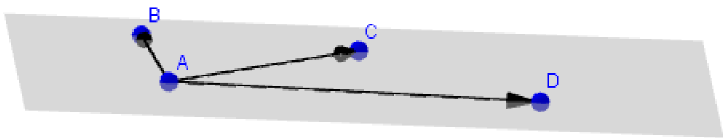
La condición para que tres puntos A, B y C estén alineados es que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean linealmente dependientes. O dicho de otro modo

$$\exists\lambda\in\Re\,/\,\overrightarrow{AB}=\lambda\cdot\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow rango\begin{pmatrix} b_x-a_x & b_y-a_y & b_z-a_z \\ c_x-a_x & c_y-a_y & c_z-a_z \end{pmatrix}=1$$



Cuatro puntos A, B, C y D son coplanarios si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes, lo cual es equivalente a decir

$$\begin{vmatrix} b_x-a_x & b_y-a_y & b_z-a_z \\ c_x-a_x & c_y-a_y & c_z-a_z \\ d_x-a_x & d_y-a_y & d_z-a_z \end{vmatrix}=0$$



Posiciones relativas de dos rectas

Sean las rectas r y s de ecuaciones

$$r\equiv A+\lambda\vec{v}\Leftrightarrow r\equiv\begin{cases} x=a_x+\lambda v_x \\ y=a_y+\lambda v_y \\ z=a_z+\lambda v_z \end{cases}\quad\lambda\in\Re \qquad s\equiv B+\mu\vec{w}\Leftrightarrow s\equiv\begin{cases} x=b_x+\mu w_x \\ y=b_y+\mu w_y \\ z=b_z+\mu w_z \end{cases}\quad\mu\in\Re$$

Con las coordenadas de los vectores directores podemos formar la matriz

$$C=\begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \\ v_z & w_z \end{pmatrix}$$

y si la ampliamos con el vector $\overrightarrow{AB}$ tendremos la matriz

$$C'=\begin{pmatrix} v_x & w_x & b_x-a_x \\ v_y & w_y & b_y-a_y \\ v_z & w_z & b_z-a_z \end{pmatrix}$$

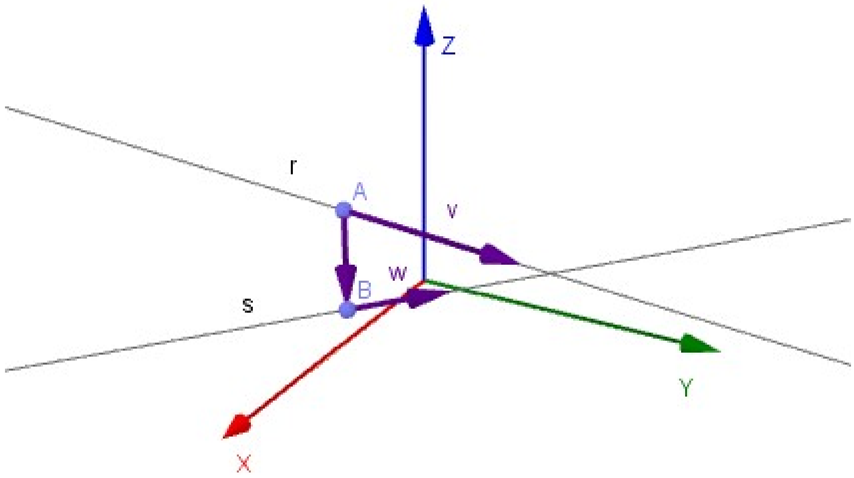
Sobre estas matrices podemos decir lo siguiente:

- Rango C = 1 $\Leftrightarrow$ r y s tienen la misma dirección (paralelas o coincidentes)
- Rango C' = 3 $\Leftrightarrow$ r y s no son coplanarias (y por tanto se cruzan)
- Rango C' = 2 $\Leftrightarrow$ r y s son coplanarias (se cortan o son paralelas)

- Rango C' = 1 $\Leftrightarrow$ r y s son coincidentes

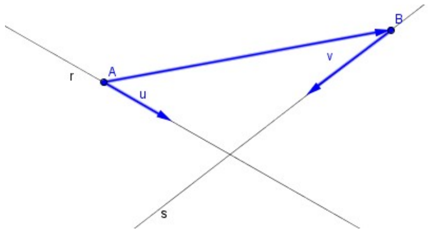
Por tanto las posibles posiciones relativas entre dos rectas son:

Las rectas se cruzan



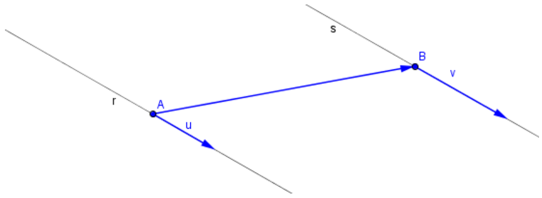
En este caso rango C' = 3 y rango C = 2

Las rectas se cortan



Aquí rango C' = 2 y rango C = 2

Las rectas son paralelas



rango C' = 2 y rango C = 1

Las rectas son coincidentes

rango C' = 1 y rango C = 1

Posiciones relativas de una recta y un plano

Suponemos el plano de ecuaciones $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y la recta

$$r \equiv P+\lambda\vec{v} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x=p_x+\lambda v_x \\ y=p_y+\lambda v_y \\ z=p_z+\lambda v_z \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

Si sustituimos las ecuaciones de la recta en la del plano para intentar hallar los puntos de corte, tendremos:

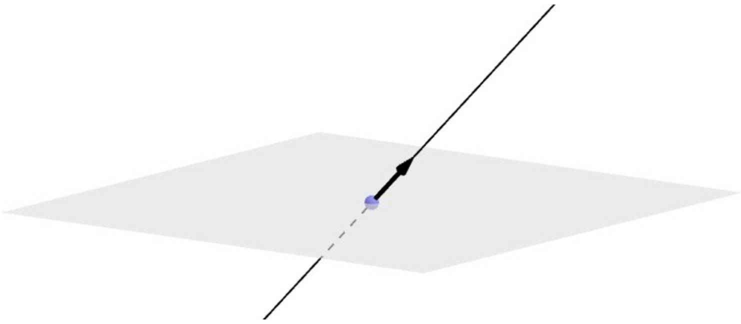
$$A(p_x+\lambda v_x)+B(p_y+\lambda v_y)+C(p_z+\lambda v_z)+D=0 \Leftrightarrow A p_x+B p_y+C p_z+D+\lambda(A v_x+B v_y+C v_z)=0$$

con lo que $\lambda=-\frac{A p_x+B p_y+C p_z+D}{A v_x+B v_y+C v_z}=0$ (siempre que el denominador sea distinto de 0)

y el punto de corte se obtiene sustituyendo λ en las ecuaciones de r

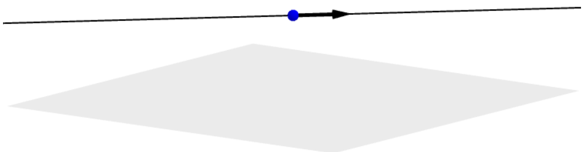
<u>Recta secante</u>

La ecuación tiene una única solución, esto ocurre cuando $\vec{n}\cdot\vec{v}=A v_x+B v_y+C v_z\neq 0$



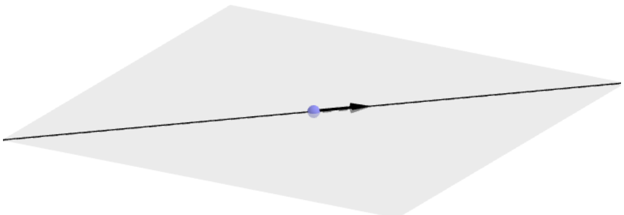
<u>Recta paralela al plano</u>

La ecuación no tiene solución, esto ocurre cuando $\vec{n}\cdot\vec{v}=A v_x+B v_y+C v_z=0$ y $A p_x+B p_y+C p_z+D\neq 0$ $(P\notin\pi)$



<u>Recta en el plano</u>

La ecuación tiene infinitas soluciones, esto ocurre cuando $\vec{n}\cdot\vec{v}=A v_x+B v_y+C v_z=0$ y $A p_x+B p_y+C p_z+D=0$ $(P\in\pi)$



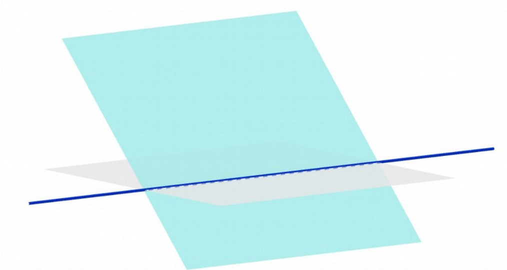
Posición relativa de dos planos

Sean los planos $\pi=Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi'=A'x+B'y+C'z+D'=0$ entonces con los coeficientes formamos las matrices

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

Entonces:

Si rango(M)=rango(M')=2 los planos <u>se cortan</u> formando una recta



Si rango(M)=1 y rango(M')=2 los planos <u>son paralelos</u>

Si rango(M)=rango(M')=1 los planos <u>son coincidentes</u>

<u>Observación</u>

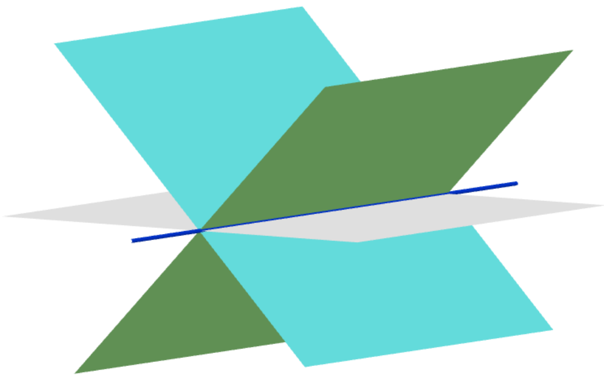
Además de las ecuaciones habituales, es común expresar una recta como la intersección de dos planos:

$$r\equiv\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

Haz de planos

Sean $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi'\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ dos planos que se cortan según la recta r. Llamamos haz de planos generado por π y π' a toda combinación lineal que se puede hacer con las ecuaciones de π y π'

$$\boxed{\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')=0}$$



- Para cada par de valores λ y μ se obtiene un plano que contiene a la recta r
- Todos los planos que continenen a la recta r se pueden expresar como combinación lineal de π y π' y por tanto están contenidos en el haz.

Posiciones relativas de tres planos

Sean $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ $\pi'\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ y $\pi''\equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$

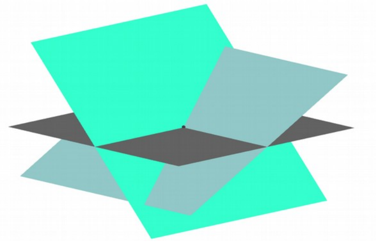
Formamos las matrices

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

y tenemos los siguientes casos

Rango (M) = 3

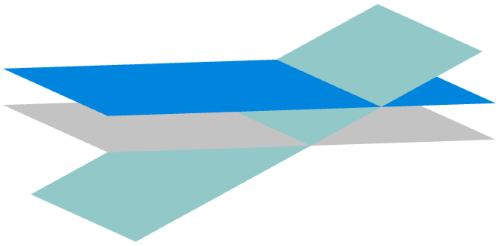
Los tres planos se cortan en un punto (la solución del sistema)



Rango (M) = 2 y rango (M') = 3

El sistema es incompatible, así que no hay ningún punto común a los tres planos. Hay dos posibilidades:

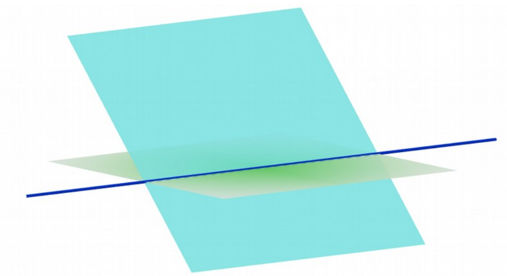
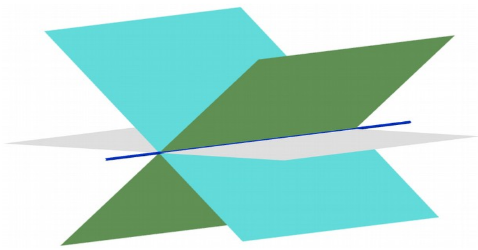
- Alguna fila de M es múltiplo de otra. Esto implicaría que hay dos planos paralelos y el tercero los cortaría.
- Ninguna fila de M es múltiplo de otra. Entonces no hay ningún par de planos paralelos y los planos se cortan dos a dos.

Rango (M) = 2 y rango (M') = 2

Los planos tienen una recta en común. Aquí también hay dos casos

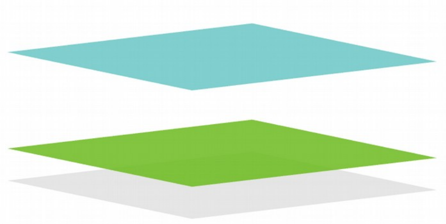
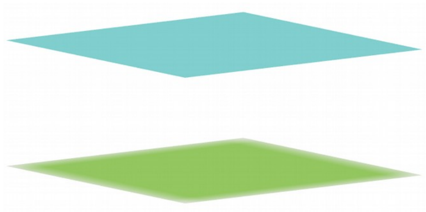
- Alguna fila de M es múltiplo de otra. Esto implicaría que dos planos son coincidentes y por tanto, el tercero los corta siguiendo una recta.
- Ninguna fila de M es múltiplo de otra. Entonces son tres planos distintos de un mismo haz.

Rango (M) = 1 y rango (M') = 2

Los planos no tienen ningún punto en común, pero sus vectores normales llevan la misma dirección (lo que implica que son paralelos o coincidentes). Hay dos casos.

- Los tres planos son paralelos (todas las submatrices de orden 2x4 de A' tienen rango 2)
- Dos planos son coincidentes y el tercero paralelo (alguna submatriz de orden 2x4 de A' tiene rango 1)

Rango (M) = 1 y rango (M') =1

Los tres planos son coincidentes.

Distancias en el Espacio Euclídeo

Distancia entre dos puntos

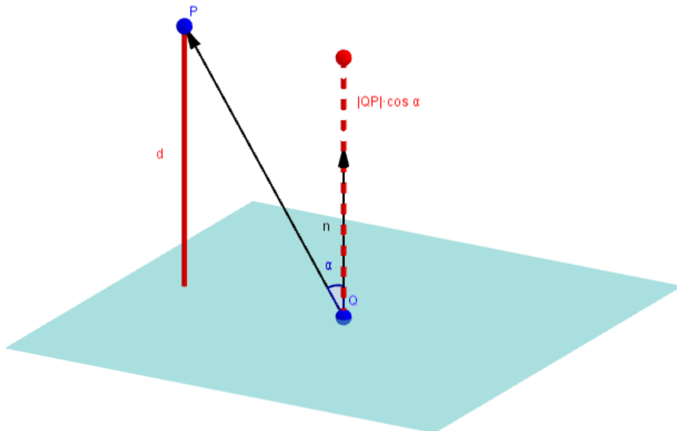
Si $A=(a_x,a_y,a_z)$ y $B=(b_x,b_y,b_z)$ son dos puntos del espacio, entonces la distancia de A a B será el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{d(A,B)=\overrightarrow{AB}=\sqrt{(b_x-a_x)^2+(b_y-a_y)^2+(b_z-a_z)^2}}$$

Distancia entre un punto y un plano

Si $P=(p_x,p_y,p_z)$ es un punto del espacio y $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ entonces:

$$\boxed{d(P,\pi)=\frac{|A\cdot p_x+B\cdot p_y+C\cdot p_z+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$



Demostración

Si $Q=(q_x,q_y,q_z)$ es un punto del plano , como el vector $\vec{n}=(A,B,C)$ es un vector normal de π tendremos

$$\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}=|\overrightarrow{QP}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\alpha$$

y como

$$d(P,\pi)=|\overrightarrow{QP}|\cdot\cos\alpha$$

entonces

$$d(P,\pi)=\left||\overrightarrow{QP}|\cdot\cos\alpha\right|=\frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(p_x-q_x)+B(p_y-q_y)+C(p_z-q_z)|}{|\vec{n}|}=$$

$$=\frac{|A\,p_x+B\,p_y+C\,p_z-(A\,q_x+B\,q_y+C\,q_z)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

pero como $Q\in\pi\Rightarrow A\,q_x+B\,q_y+C\,q_z=-D$ tendremos

$$d(P,\pi)=\frac{|A\,p_x+B\,p_y+C\,p_z+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Distancia entre una recta y un plano

Primero tenemos que estudiar la posición relativa entre la recta y el plano:

- Si la recta corta al plano, entonces la distancia será cero

- Si la recta no corta al plano, calcularemos la distancia eligiendo un punto de la recta y calculando la distancia de ese punto al plano.

Distancia entre dos planos

Si los planos se cortan la distancia es cero

Si los planos son paralelos, buscamos un punto de uno para hallar la distancia al otro.

Distancia entre un punto y una recta

Si Q es un punto de la recta r y $\vec{v}$ un vector director, entonces

$$\boxed{d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{QP}\,x\,\vec{v}|}{|\vec{v}|}}$$

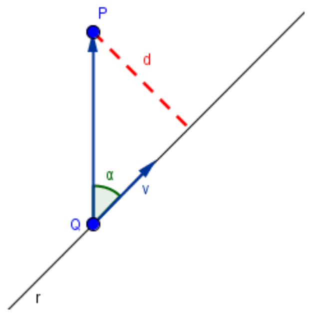
<u>Demostración</u>:

La distancia entre P y r, podrá calcularse utilizando las razones trigonométricas, de la forma

$$d(P,r)=|\overrightarrow{QP}|\cdot sen\,\alpha$$

como $|\overrightarrow{QP}\,x\,\vec{v}|=|\overrightarrow{QP}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,\alpha$ entonces

$$d(P,r)=|\overrightarrow{QP}|\cdot sen\,\alpha=\frac{|\overrightarrow{QP}\,x\,\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$



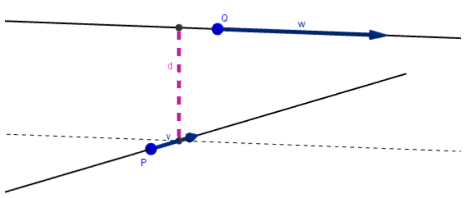
Distancia entre dos rectas

El cálculo de la distancia entre dos rectas $r\equiv P+\lambda\vec{v}$ y $s\equiv Q+\lambda\vec{w}$ dependerá de la posición relativa en la que se encuentren.

- Si las recta se cortan la distancia es cero
- Si las rectas son paralelas, deberemos elegir un punto de una y calcular la distancia de ese punto a la otra. (d(r,s) = d(P,s) = d(Q,r))
- Suponemos ahora que las rectas se cruzan, entonces la distancia vendrá dada por la fórmula

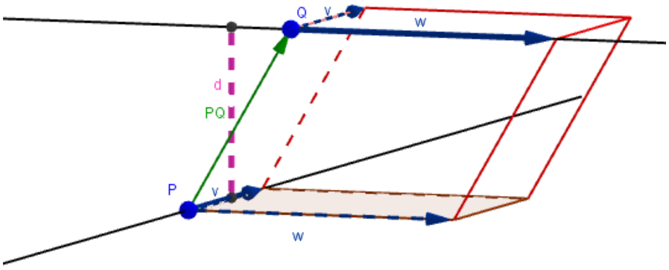
$$\boxed{d(r,s)=\frac{[\overrightarrow{PQ},\vec{v},\vec{w}]}{|\vec{v}\,x\,\vec{w}|}=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot(\vec{v}\,x\,\vec{w})|}{|\vec{v}\,x\,\vec{w}|}}$$

<u>Demostración</u>



Si las rectas se cruzan, la distancia será la longitud del segmento perpendicular a r y s.

Se puede observar que esta distancia coincide con la altura del paralelepípedo determinado por P, $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$



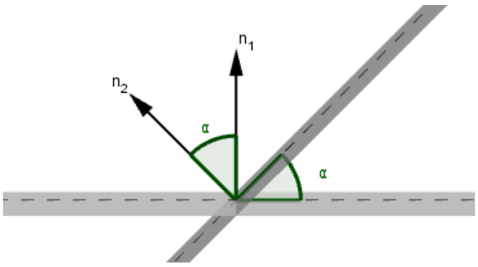
Ahora bien, la base del paralelepípedo es $|\vec{u}\, x\, \vec{w}|$. El volumen es $|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{w}]|$ y como volumen= area de la base x altura, entonces

$$altura = \frac{[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{w}]}{|\vec{v}\, x\, \vec{w}|}$$

Ángulos

Ángulo entre dos planos

El ángulo entre dos planos será el mismo que el que hay entre sus vectores normales



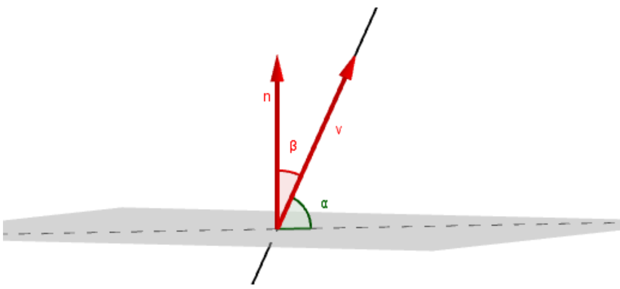
$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

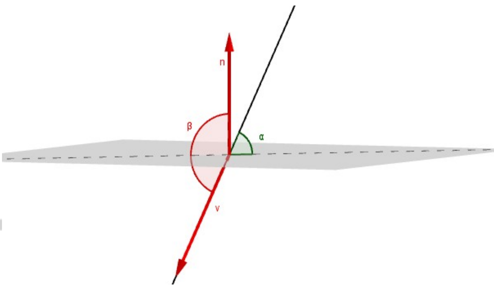
Ángulo entre dos rectas

El ángulo entre dos rectas será el que formen sus vectores directores.

Ángulo entre recta y plano

El ángulo que formen una recta y un plano será el complementario (o el complementario del suplementario, según la orientación) de aquel que formen un vector normal al plano y un vector director de la recta.





En cualquier caso $$sen\,\alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

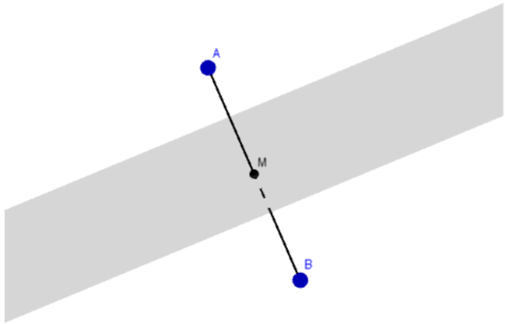
Simetrías

Simetría respecto a un plano

Dos puntos A y B se dice que son simétricos respecto a un plano, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) El vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al plano.

b) El punto medio del segmento $\overline{AB}$ pertenece al plano.



Para calcular el simétrico de un punto A respecto a un plano π hay que realizar los siguientes cálculos:

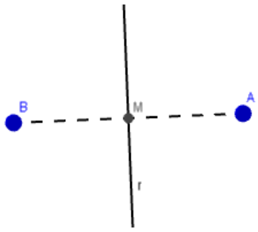
1. Obtener la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto A
2. Obtener el punto de corte, M, de dicha recta con el plano π
3. Obtener el punto B mediante la operación $B=M+\overrightarrow{AM}$ (u otra similar)

Simetría respecto a una recta

Dos puntos A y B se dice que son simétricos respecto a un plano, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) El vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a la recta.

b) El punto medio del segmento $\overline{AB}$ pertenece a la recta.



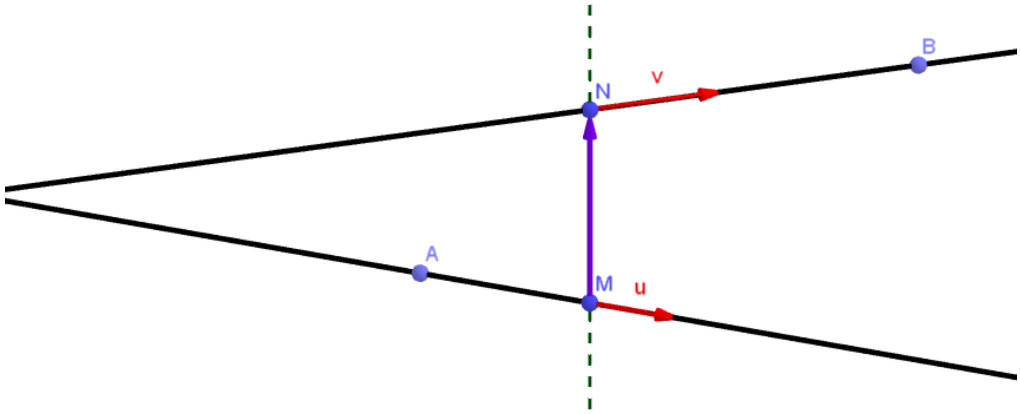
Para calcular el simétrico de un punto A respecto a una recta r hay que realizar los siguientes cálculos:

1. Obtener la ecuación del plano π que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta r.
2. Obtener el punto de corte, M, de dicho plano con la recta r.
3. Obtener el punto B mediante la operación $B=M+\overrightarrow{AM}$ (u otra similar)

Ejemplos

Perpendicular común a dos rectas que se cruzan

Método 1 – Obtener dos puntos de la recta



Supongamos que queremos calcular la perpendicular común a las rectas
$r:(0,0,-1)+\lambda\cdot(2,1,1);\ \lambda\in\Re$ y $s:(0,4,22)+\beta\cdot(-1,2,7);\ \beta\in\Re$

De las ecuaciones de las rectas, obtenemos los vectores directores $\vec{u}=(2,1,1)$ y $\vec{v}=(-1,2,7)$ y los puntos A=(0,0,-1) y B=(0,4,22). Hay que resaltar, que los puntos A y B, extraídos de las ecuaciones, no tienen por que estar en la recta perpendicular (de hecho, en general no lo están).

De las ecuaciones paramétricas de las rectas, obtenemos que los puntos han de ser:

$\boxed{M=(2\lambda,\lambda,-1+\lambda)}$ y $\boxed{N=(-\beta,4+2\beta,22+7\beta)}$ con $\lambda,\beta\in\Re$

con lo cual, nuestro objetivo será determinar los valores de λ y β

Si tenemos en cuenta que $\boxed{\overrightarrow{MN}\cdot\vec{v}=0}$ y $\boxed{\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=0}$ obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\overrightarrow{MN}=(-\beta-2\lambda,4+2\beta-\lambda,23+7\beta-\lambda)$$

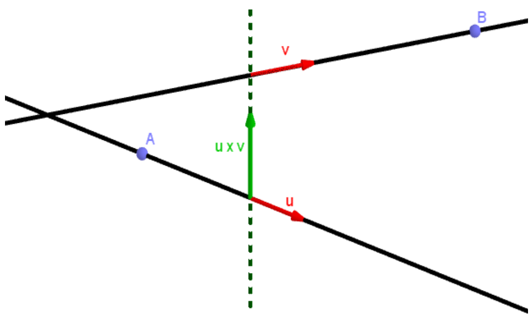
$$\begin{cases}-2\beta-4\lambda+4+2\beta-\lambda+23+7\beta-\lambda=0\\ \beta+2\lambda+8+4\beta-2\lambda+161+49\beta-7\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6\lambda+7\beta=-27\\ -7\lambda+54\beta=-169\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ \beta=-3\end{cases}$$

Con los valores $\lambda=1$ y $\beta=-3$ obtenemos los puntos M=(2,1,0) y N=(3,-2,1) y la perpendicular común será

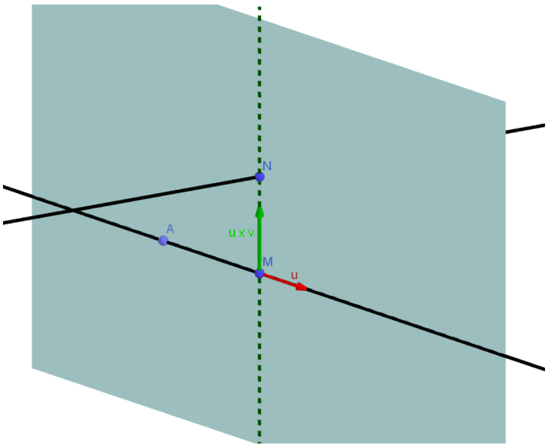
$$(x,y,z)=(2,1,0)+t\cdot(1,-3,1);t\in\Re$$

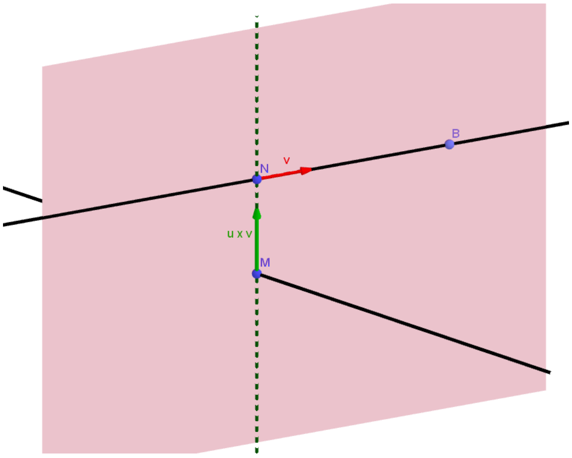
Método II – Expresar la perpendicular como intersección de dos planos

En primero lugar cabe observar que el vector $\vec{u}\times\vec{v}$ es perpendicular a ambas rectas y por tanto llevará la dirección de la recta que buscamos. Con las rectas que estamos estudiando $\vec{u}\times\vec{v}=(2,1,1)\times(-1,2,7)=(5,-15,5)$



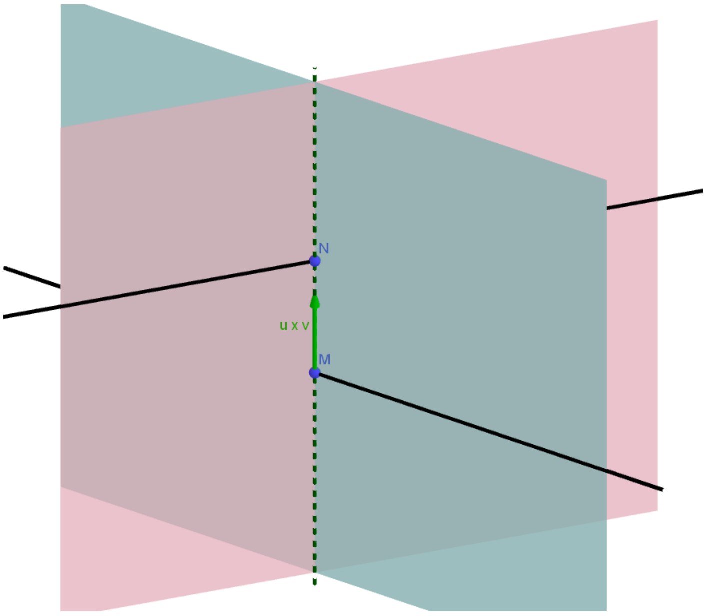
Si nos fijamos, el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$ determinan el plano π, que contienen a la recta r (imagen izquierda)





Del mismo modo, el punto B y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$ determinan el plano π' que también contiene a r (imagen derecha)

Por lo tanto, la recta r será intersección de π y π'



En nuestro caso calculamos

$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -15 & 5 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 20x-5y-35z-35=0$$

$$\pi'\equiv\begin{vmatrix} x & y-4 & z-22 \\ -1 & 2 & 7 \\ 5 & -15 & 5 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 115x+40y+5z-270=0$$

y por tanto, las ecuaciones implícitas de la perpendicular común serán

$$\begin{cases} 20x-5y-35z-35=0 \\ 115x+40y+5z-270=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y-7z-7=0 \\ 23x+8y+1z-54=0 \end{cases}$$

Recta que pasa por un punto y es secante a otras dos

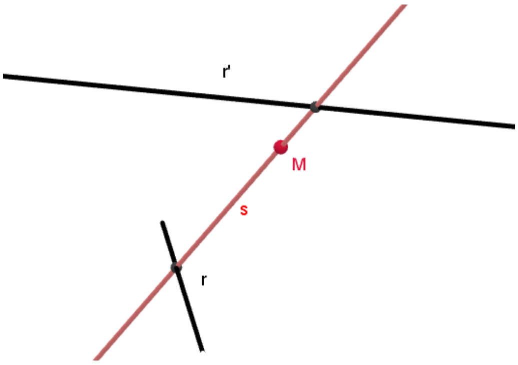
Sean las rectas $r:(1,-1,2)+\lambda\cdot(2,1,-3)$ y $r':(0,2,1)+\beta\cdot(-1,0,1)$. Consideremos el punto $M=(2,1,5)$. Tenemos que buscar la recta, s que pase por M y sea secante a r y r'.

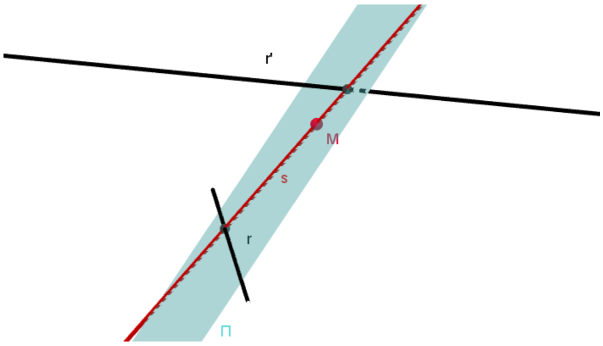
En primer lugar, hay que observar que r y r' no son coplanarias para garantizar que existe dicha recta. Si fuesen coplanarias, podrían existir infinitas soluciones o incluso no haber ninguna.

En nuestro caso:

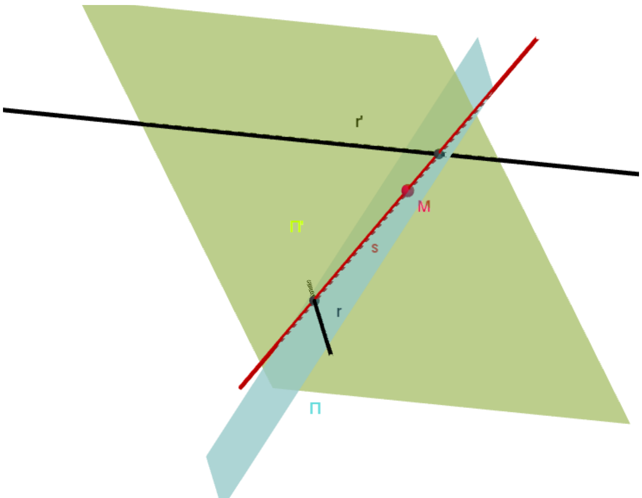
$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

con lo que efectivamente r y r' no son coplanarias





La recta r y el punto M determinan el plano π, el cual contiene a la recta s



Del mismo modo, la recta r' y el punto M determinarán el plano π', que también contiene a la recta s. Así pues, la recta s podrá expresarse como intersección de π y π'

Para obtener la ecuación de π, utilizamos el punto $A=(1,-1,2)\in r$, el punto M y el vector $\vec{u}=(2,1,-3)$, director de r.

$$\overrightarrow{AM}=(1,2,3)$$

$$\pi:\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 9x-9y+3z-24=0 \Leftrightarrow \mathbf{3x-3y+z-8=0}$$

Con $B=(0,2,1)\in r'$, el punto M y el vector $\vec{v}=(-1,0,1)$, director de r', obtenemos π'

$\overrightarrow{BM}=(2,-1,4)$

$$\pi':\begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \mathbf{x+6y+z-13=0}$$

Con lo que

$$s:\begin{cases} \mathbf{3x-3y+z-8=0} \\ \mathbf{x+6y+z-13=0} \end{cases}$$

<u>Observación:</u>
Una solución alternativa sería cortar el plano π con la recta r’ para obtener un segundo punto de s.