

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula cuando sea posible:

- a) $C \cdot A + B$ c) $A \cdot B$ e) $C \cdot (A + B)$ g) $A^t \cdot B$
 b) $C \cdot (A + B)$ d) $C \cdot A^t$ f) $A \cdot B^t$

2. Calcula el rango de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 15 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \\ 5 & 10 & -15 & 25 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Calcula la inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ 2 & 1 & 2x & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 1 & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

5. Calcula el rango de las siguientes matrices estudiando sus menores:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -3 & -8 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. Calcula la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7.

a) Estudia como es el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-4z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$$

b) Resuelve el anterior sistema de ecuaciones.

8. Encuentra la solución del siguiente sistema aplicando el teorema de Rouché.

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x+2y-8z=0 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases}$$

9. Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-y+z=8 & a \in \mathbb{R} \\ x-5y+az=4 \end{cases}$$

es compatible indeterminado.

a) Calcula a y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro.

b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que $x=y$

10. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ ax-y+2z=2 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de a

b) Resolver el sistema cuando tenga más de una solución

11. En el sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x-3y+z=-1 \\ 3x-2y+kz=5 \end{cases}$$

a) Discute para qué valores de k el sistema es compatible

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible.

$$12. \begin{cases} y+z=1 \\ (m-1)x+3y+z=2 \\ x+(m-1)y-z=0 \end{cases}$$

a) Discute para qué valores de m el sistema es compatible.

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

13. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula α, β, γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $A \cdot X = B$

b) Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $A \cdot X = O$ sea compatible determinado.

c) Si $\alpha = -1, \beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $A \cdot X = B$

14. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa

b) Calcular la matriz inversa de A en el caso $a=2$

15. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$, calcula, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los

siguientes determinantes, indicando en cada caso qué propiedad se está utilizando.

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ encuentra todas las matrices B que cumplen $ABA=A$

17. Sea m un número real y A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina todos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) Determina, si existe, la inversa de A cuando $m=0$

c) Determina, si existe, la inversa de A^2 cuando $m=0$

18. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2$

19. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1}

b) Calcula A^{2013} y su inversa.

20.

a) Determina el rango de la matriz A , que aparece a continuación, según los diferentes valores de a :

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

b) Determina, si existe, una matriz $A \in M_{2 \times 2}$, que verifique la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el rango de la matriz A ?

21. Dado el número real a , se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla el rango de la matriz $A^2 - A^t$ según los distintos valores de A

22.

a) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determina la matriz B que verifica $A+B=A\cdot B$

b) Sea M una matriz cuadrada tal que $\det(M)=-1$ y $\det[-2M]=8$. Calcula el tamaño de la matriz M.

23. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resolver el sistema: $\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X+4Y=B \end{cases}$

b) Calcular el rango de $M=A\cdot B$

24. Dado el sistema $\begin{cases} ax-3y+az=1 \\ 3x+2y=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$

a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro α

b) Resolverlo cuando sea compatible

25.

a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A|=5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes:

$$| -A | \quad | A^{-1} | \quad | A^t | \quad | A^3 |$$

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ calcula, usando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3-a-b & 1-c \\ 1+a & 1+b \\ 3a & 3b \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

26. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calcula todos los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot \vec{v} = \vec{v}$

b) Calcula A^{-1}

27. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que se verifica $A \cdot B = 2C - D$, plantea un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son x, y, z, donde α es un parámetro.

b) Estudia el carácter del sistema para los distintos valores del parámetro α y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones)

28. (Aragón 2015)

a) Considera la matriz y los vectores siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & y & x \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde x, y, z son números reales.

Determina x, y, z para que el vector $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $M \cdot A = B$

b) Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a \neq 0$, $a+b=0$, $c=a$

Determina si el sistema $N \cdot X = B$ es compatible determinado.

29. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^5

b) Calcula A^{-1}

30. Dado el sistema $\begin{cases} x - y + z = k \\ 3x - 3y = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{cases}$

a) Clasifica el sistema en función del parámetro k.

b) Resuelve el sistema para aquellos valores de k en que sea compatible.

31. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifique: $B \cdot X - B^2 = A \cdot B$

32. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, calcula, usando las oportunas propiedades de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

33. Sea M una matriz cuadrada que cumple $M^2 - 2M = 3I$, donde I es la matriz identidad.

Razona si M tiene inversa, y de ser así expresa M^{-1} en función de M

34.

a) Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ m & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; m \in \mathbb{R}$, indica para qué valores del parámetro m la matriz es regular (invertible)

35. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2y + a^2z = a+4 \\ ax - y + (a+2)z = 1 \\ ax - 2y + az = 0 \end{cases}$$

36.

a) Comprueba que la matriz M es invertible y calcula su inversa

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Encuentra las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones:

$$8A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

37. Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule el determinante de A .

b) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4 y A^5 . Calcule A^{2016}