

1. Sean  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Calcula cuando sea posible:

a)  $C \cdot A + B$

c)  $A \cdot B$

e)  $C \cdot (A+B)$

g)  $A^t \cdot B$

b)  $C \cdot (A+B)$

d)  $C \cdot A^t$

f)  $A \cdot B^t$

2. Calcula el rango de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 15 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \\ 5 & 10 & -15 & 25 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Calcula la inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss:

a)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Calcula los siguientes determinantes:

a)  $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

e)  $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

f)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

c)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

g)  $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ 2 & 1 & 2x & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 1 & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

d)  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

5. Calcula el rango de las siguientes matrices estudiando sus menores:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -3 & -8 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. Calcula la inversa de las siguientes matrices:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7.

a) Estudia como es el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-4z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$$

b) Resuelve el anterior sistema de ecuaciones.

8. Encuentra la solución del siguiente sistema aplicando el teorema de Rouché.

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x+2y-8z=0 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases}$$

9. Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x-5y+az=4 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

es compatible indeterminado.

a) Calcula  $a$  y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro.

b) Para el valor de  $a$  encontrado, da una solución particular del sistema tal que  $x=y$

10. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ ax-y+2z=2 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de  $a$

b) Resolver el sistema cuando tenga más de una solución

11. En el sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x-3y+z=-1 \\ 3x-2y+kz=5 \end{cases}$$

a) Discute para que valores de  $k$  el sistema es compatible

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible.

$$12. \begin{cases} y+z=1 \\ (m-1) \cdot x+3y+z=2 \\ x+(m-1) \cdot y-z=0 \end{cases}$$

a) Discute para qué valores de  $m$  el sistema es compatible.

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

13. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula  $\alpha, \beta, \gamma$  para que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  sea solución del sistema  $A \cdot X = B$

b) Si  $\beta = \gamma = 1$  ¿Qué condición o condiciones debe cumplir  $\alpha$  para que el sistema lineal homogéneo  $A \cdot X = O$  sea compatible determinado.

c) Si  $\alpha = -1, \beta = 1$  y  $\gamma = 0$ , resuelve el sistema  $A \cdot X = B$

14. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el valor o valores de  $a$  para que la matriz  $A$  tenga inversa

b) Calcular la matriz inversa de  $A$  en el caso  $a=2$

15. Sabiendo que  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ , calcula, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los

siguientes determinantes, indicando en cada caso qué propiedad se está utilizando.

a)  $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$

16. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  encuentra todas las matrices  $B$  que cumplen  $ABA=A$

17. Sea  $m$  un número real y  $A$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina todos los valores de  $m$  para los que la matriz  $A$  tiene inversa.

b) Determina, si existe, la inversa de  $A$  cuando  $m=0$

c) Determina, si existe, la inversa de  $A^2$  cuando  $m=0$

18. Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz  $X$  que verifica  $A \cdot X + B = A^2$

19. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que  $A^2 = 2I$  y calcula  $A^{-1}$

b) Calcula  $A^{2013}$  y su inversa.

20.

a) Determina el rango de la matriz  $A$ , que aparece a continuación, según los diferentes valores de  $a$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

b) Determina, si existe, una matriz  $A \in M_{2 \times 2}$ , que verifique la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el rango de la matriz  $A$ ?

21. Dado el número real  $a$ , se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla el rango de la matriz  $A^2 - A^t$  según los distintos valores de  $A$

22.

- a) Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Determina la matriz B que verifica  $A+B=A \cdot B$
- b) Sea M una matriz cuadrada tal que  $\det(M)=-1$  y  $\det [-2M]=8$ . Calcula el tamaño de la matriz M.

23. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ , se pide:

- a) Resolver el sistema: 
$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{cases}$$

b) Calcular el rango de  $M=A \cdot B$

24. Dado el sistema 
$$\begin{cases} ax - 3y + az = 1 \\ 3x + 2y = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

- a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro  $\alpha$
- b) Resolverlo cuando sea compatible

25.

- a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que  $|A|=5$ , calcula razonadamente el valor de los determinantes:

$$|-A| \quad |A^{-1}| \quad |A^t| \quad |A^3|$$

- b) Sabiendo que  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$  calcula, usando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3-a-b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

26. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

- a) Calcula todos los vectores  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tales que  $A \cdot \vec{v} = \vec{v}$

b) Calcula  $A^{-1}$

27. Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$

- a) Sabiendo que se verifica  $A \cdot B = 2C - D$ , plantea un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son x, y, z, donde  $\alpha$  es un parámetro.
- b) Estudia el carácter del sistema para los distintos valores del parámetro  $\alpha$  y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones)

28. (Aragón 2015)

- a) Considera la matriz y los vectores siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & y & x \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde x, y, z son números reales.

Determina  $x, y, z$  para que el vector  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  sea solución del sistema  $M \cdot A = B$

b) Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde  $a, b$  y  $c$  son números reales que verifican que  $a \neq 0$ ,  $a+b=0$ ,  $c=a$   
Determina si el sistema  $N \cdot X = B$  es compatible determinado.

29. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula  $A^5$

b) Calcula  $A^{-1}$

30. Dado el sistema 
$$\begin{cases} x - y + z = k \\ 3x - 3y = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema en función del parámetro  $k$ .

b) Resuelve el sistema para aquellos valores de  $k$  en que sea compatible.

31. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , calcula la matriz  $X$  que

verifique:  $B \cdot X - B^2 = A \cdot B$

32. Sabiendo que  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ , calcula, usando las oportunas propiedades de los

determinantes:

a)  $\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

33. Sea  $M$  una matriz cuadrada que cumple  $M^2 - 2M = 3I$ , donde  $I$  es la matriz identidad.

Razona si  $M$  tiene inversa, y de ser así expresa  $M^{-1}$  en función de  $M$

34.

a) Calcula el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

b) Dada la matriz  $B = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ m & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $m \in \mathbb{R}$ , indica para qué valores del parámetro m la matriz es regular (invertible)

35. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2y + a^2z = a + 4 \\ ax - y + (a+2)z = 1 \\ ax - 2y + az = 0 \end{cases}$$

36.

a) Comprueba que la matriz M es invertible y calcula su inversa

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Encuentra las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones:

$$8A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

37. Considere la siguiente matriz  $A = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule el determinante de A.

b) Calcule las potencias sucesivas  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^4$  y  $A^5$ . Calcule  $A^{2016}$