1. Enuncia el teorema de Bolzano. Razona que las gráficas de las funciones $f(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3$ y $g(x)=e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0

Solución:

Teorema de Bolzano → ver teoría

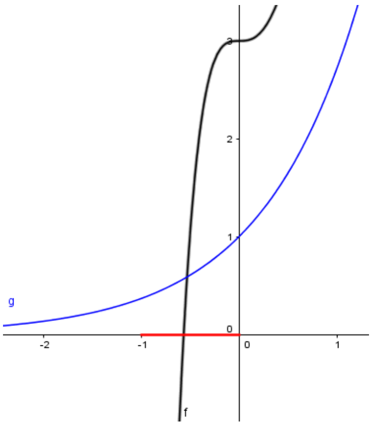
Que las gráficas se corten es equivalente a que la función $h=f-g$ sea igual a cero en algún punto de (-1,0)

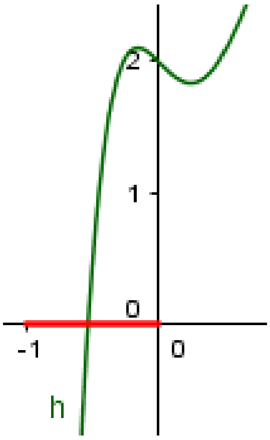
$h(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3-e^x$ es continua en [-1,0] (suma, resta, … de continuas)

$h(-1)\approx-20{,}379<0$

$h(0)=2>0$

Entonces según el teorema de Bolzano $\exists c\in(-1,0)/h(c)=0$ o lo que es lo mismo $f(c)=g(c)$





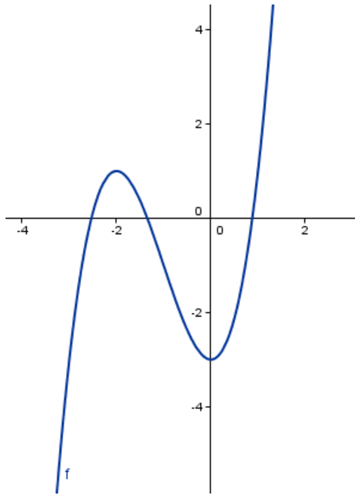
2. Probar que la ecuación $x^3+3x^2-3=0$ tiene exactamente tres soluciones reales.

Solución

Al ser una ecuación de tercer grado, no puede tener más de tres soluciones. Para demostrar que existen las tres utilizaremos el teorema de Bolzano, aunque necesitamos una estrategia para buscar las raíces. Por tanto estudiaremos primero el crecimiento de la función $f(x)=x^3+3x^2-3=0$

Como $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$ tendremos que

x	(-∞, -2)	(-2,0)	(0,+∞)
f'(x)	+	-	+



$$\left.\begin{array}{r} f(-5)=-53 \\ f(-2)=1 \\ f\ continua\ en[-5,-2] \end{array}\right\}\Rightarrow\exists a\in[-5,-2]/f(a)=0$$

$$\left.\begin{array}{r} f(-2)=1 \\ f(0)=-3 \\ f\ continua\ en[-2,0] \end{array}\right\}\Rightarrow\exists b\in[-2,0]/f(b)=0$$

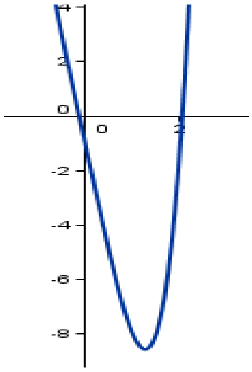
$$\left.\begin{array}{r} f(0)=-3 \\ f(1)=1 \\ f\ continua\ en[0,1] \end{array}\right\}\Rightarrow\exists c\in[0,1]/f(c)=0$$

3. Demuestra que alguna de las raíces del polinomio $P(x)=x^4-8x-1$ es negativa. Demuestra también que $P(x)$ tiene también alguna raíz positiva.

Solución

La función es continua al ser polinómica

P(0)=-1, $\underset{x\to-\infty}{\text{lím}}\ P(x)=+\infty$, $\underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\ P(x)=+\infty$



$$\left.\begin{array}{r} P(-1)=8 \\ P(0)=-1 \\ P\,es\,continua\,en[-1{,}0] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists a\in[-1{,}0]\,/\,P(a)=0$$

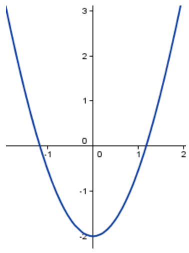
$$\left.\begin{array}{r} P(0)=-1 \\ P(3)=56 \\ P\,es\,continua\,en[0{,}3] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists b\in[0{,}3]\,/\,P(b)=0$$

4.

a) Aplica el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x=x^2-1$ tiene soluciones positivas.

b) ¿Tiene la ecuación $\cos x=x^2-1$ alguna solución negativa? Razona la respuesta.

Solución



$f(x)=x^2-1-\cos x$ es una función continua en todo R

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=-2 \\ f(\pi)=\pi^2 \\ f\,es\,continua\,en[0,\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists a\in[0,\pi]\,/\,f(a)=0$$

Como $f(-x)=(-x)^2-1-\cos(-x)=x^2-2-\cos x=f(x)$ tenemos que la función es par (simétrica respecto al eje OY) y por tanto debe tener una raíz en $[-\pi,0]$

5. Dada la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=x^2e^{-x^2}$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halla, si existen, los máximos y mínimos de la función.

c) Dibuja aproximadamente su gráfica.

Solución:

$f'(x)=2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}\cdot(-2x)=(2x-2x^3)\cdot e^{-x^2}$

Como $e^{-x^2}>0\quad\forall x\in\Re$ entonces el signo de f' dependerá de $(2x-2x^3)$, factorizando:

$(2x-2x^3)=-2x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

x	(-∞, -1)	(-1,0)	(0,1)	(1,+∞)
f'(x)	+	-	+	-

Crece $(-\infty,1)\cup(0,1)$

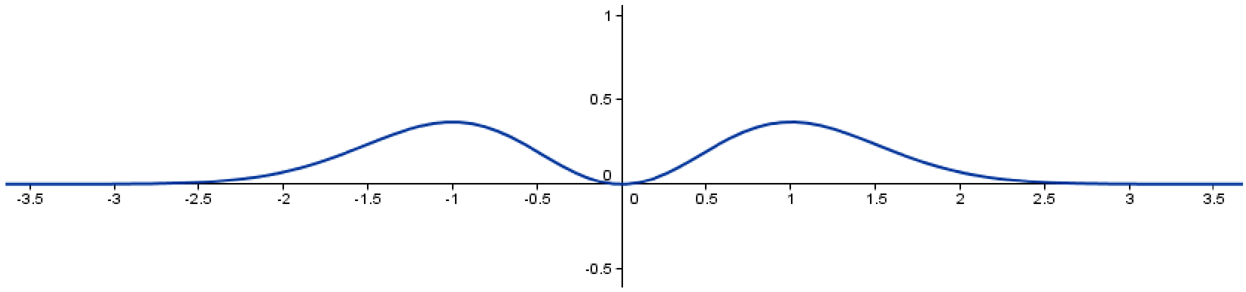
Decrece $(-1{,}0)\cup(1,+\infty)$

Máximos relativos $(-1,e^{-1})$ y $(1,e^{-1})$

Mínimo relativo (0,0)

Representación de la función:

- Dominio: R
- Simetría: La función es par
- Periodicidad: No es periódica
- Cortes con los ejes: (0,0)
- Continuidad: Continua en todo R
- Asíntotas: y=0 ($\underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\ f(x)=\underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\ f(x)=0$)
- Crecimiento: ya estudiado
- Concavidad: ----



6.

a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \Re$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & si\ x \le 0 \\ x^2 + be^x + 3 & si\ x > 0 \end{cases}$$ **sea continua y derivable en x=0**

b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x=0

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = a \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = b + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f\ continua\ en\ x = 0 \Leftrightarrow a = b + 3$$

Supongamos que a=b+3 y por tanto f es continua en x=0. Entonces:

$$f\ es\ derivable\ en\ x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} 2x - 2 = \lim_{x \to 0^+} 2x + be^x \Leftrightarrow b = -2$$

Por tanto f es continua y derivable en x=0 ⇔ b = -2 y a = 1

La recta tangente pasaría por el punto (0,1) y tendría pendiente -2. Así pues, su ecuación será $(y-1) = -2 \cdot x$

7. Sea $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

a) Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa x=1/2 y que la recta tangente en el punto de abscisa x=0 tenga por ecuación $y = 5 - 6x$

b) Para a=3, b= -9 y c=8, calcula los extremos relativos de f.

Solución:

a)

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1/2) = 3 + 2a$

f tiene un punto de inflexión en x=1/2 ⇔a=-3/2

f’(0)=b ⇒ para que la tangente tenga pendiente -6 entonces b=-6

f(0)=c ⇒para que la tangente pase por (0,5) entonces c=5

b)

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

x	(-∞, -3)	(-3,1)	(1,+∞)
f’(x)	+	-	+

Mínimo relativo (1,3) y máximo relativo (-3,35)

8. Se sabe que la función F es derivable en todos los puntos, y que está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$ por la fórmula $F(x)=1+2x+Ax^2$ y en el intervalo $(0,+\infty)$ por la fórmula $F(x)=B+Ax$

a) Encontrar los valores A y B que verifiquen las condiciones anteriores.

b) Representar F

<u>Solución</u>:

$$F\, derivable \Rightarrow F\, continua \Rightarrow \lim_{x\to 0^{-}} F(x) = \lim_{x\to 0^{+}} F(x) = F(0) \Leftrightarrow 1=B$$

Supongamos B=1

Si F es derivable entonces

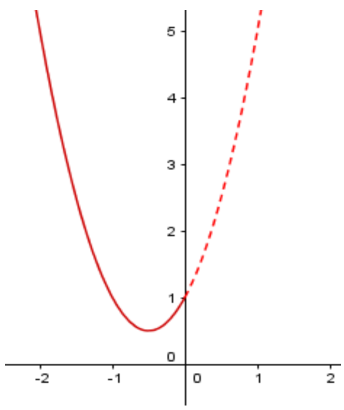
$$\lim_{x\to 0^{-}} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{F(x)-F(0)}{x} \Leftrightarrow (1+2x+Ax^2)'(0)=(B+Ax)'(0) \Leftrightarrow 2=A$$

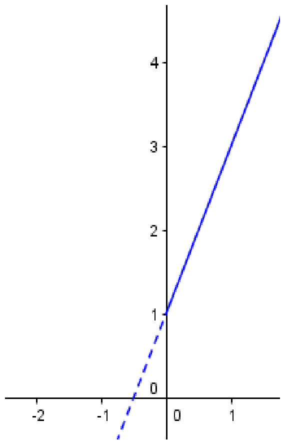
$$F(x)=\begin{cases} 1+2x+2x^2 & si \quad x\le 0 \\ 1+2x & si \quad x>0 \end{cases}$$

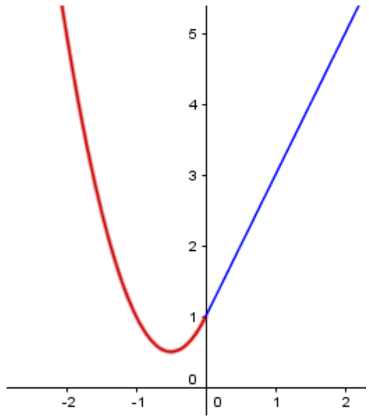
La función es una parábola cónvexa en una parte y una recta de pendiente 2 en la otra.

Buscamos el vértice de la parábola

$F'(x)=0 \Leftrightarrow 2+4x=0$ entonces el vértice estaría en $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$







9. Dada la función $f(x)=\frac{ax+b}{cx-1}$ calcula los valores a, b, c sabiendo que $x=\frac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que $y=5x-6$ es la recta tangente a su gráfica en el punto correspondiente a x=1

Para los valores de a, b, c calculados, ¿posee f(x) más asíntotas?

<u>Solución</u>:

Para que $x=\frac{1}{2}$ sea asíntota vertical es necesario que c=2, de lo contrario será continua y

$$\lim_{x\to ½} f(x)=f(1/2)\neq\infty$$

Si y=5x-6 es la recta tangente en x=1 entonces f(1)=-1 y f'(1)=5

$$f(1)=a+b=-1$$

$$f'(x)=\frac{a(2x-1)-2(ax+b)}{(2x-1)^2} \Rightarrow f'(1)=a-2a-2b=-a-2b=5$$

resumiendo

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ -a-2b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-4 \\ a=3 \end{cases}$$

$f(x)=\frac{3x-4}{2x-1}$ no tiene más asíntotas verticales pero sí una horizontal, y =3/2

10. Sea $f:(-\infty,1)\to\Re$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & si\ x\le 0 \\ a\sqrt{b-x} & si\ 0<x<1 \end{cases}$

a) Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x=0

Solución:

a)

Para que f sea derivable en todo su dominio, f tiene que ser continua y derivable en x=0

$f\ continua\ en\ 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow 2=a\sqrt{b}$

supongamos $2=a\sqrt{b}$ entonces f es derivable en x=0 si se cumple:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}\Leftrightarrow\left(x+2e^{-x}\right)'(0)=\left(a\sqrt{b-x}\right)'(0)\Leftrightarrow\left(1-2e^{-x}\right)(0)=\left(\frac{-a}{2\sqrt{b-x}}\right)(0)$$

lo cual ocurre si $-1=\frac{-a}{2\sqrt{b}}$

Resumiendo:

$$\begin{cases} a\sqrt{b}=2 \\ \frac{a}{2\sqrt{b}}=1 \end{cases}$$

Despejamos en la primera $a=\frac{2}{\sqrt{b}}$ y sustituimos en la segunda

$\frac{2}{2\sqrt{b}\sqrt{b}}=1\Leftrightarrow\frac{1}{b}=1\Leftrightarrow b=1$ y por tanto a=2

b)

Como f(0)=2 y f'(0)=-1 la recta pasará por el punto (0,2) y tendrá pendiente -1, es decir y=-x+2

La recta normal pasará por el punto (0,2) y será perpendicular a la tangente. Como las pendientes de dos rectas perpendiculares cumplen m·m'=-1 entonces la recta buscada tendrá pendiente 1. Por tanto la ecuación de la recta normal será y=x+2

11. Dada la función $f(x)=2e^{-x}(x+1)$, calcula intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de f

Solución:

$f'(x)=-2e^{-x}(x+1)+2e^{-x}=-2xe^{-x}$

$f'\ es\ continua\ en\ \Re$ y $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

x	(-∞, 0)	(0,+∞)
f'(x)	+	-

Crece en (-∞, 0) , decrece en (0,+∞) y tiene un máximo relativo en el punto (0,2)

12. Dada la función $f(x)=x\ln x-x$, se pide:

a) Determina el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Calcula la ecuación de dicha recta.

b) Determina el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela al eje OX. Calcula la ecuación de dicha recta.

Solución

a)

Como la bisectriz del primer cuadrante tiene pendiente 1, deberemos resolver la ecuación f'(x)=1

$f'(x)=lnx+1-1=\ln x=1 \Leftrightarrow x=e$

Entonces la recta buscada tendrá pendiente 1 y pasará por el punto $(e,f(e))$ es decir $(e,0)$ por tanto su ecuación será $y=x-e$

b)

En este caso $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ por tanto el punto será $(1,f(1))=(1,-1)$ y la recta tendrá de ecuación $y=-1$

13. Estudia si la recta r de ecuación $y=4x-2$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3+x^2-x+1$ en alguno de sus puntos.

Solución:

Como la recta tiene pendiente 4 tendremos que buscar los puntos cuya derivada vale 4

$$f'(x)=3x^2+2x-1=4 \Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow x=1\, ó\, x=\frac{-5}{3}$$

Como f(1)=2 y el punto (1,2) cumple la ecuación de la recta, entonces en este punto sí es tangente a la gráfica. Por otra parte, $f(-\frac{5}{3})=\frac{22}{27}$ y el punto $(-\frac{5}{3},\frac{22}{27})$ no cumple la ecuación de la recta.

Por tanto la recta será tangente a la gráfica de f sólo en el punto (1,2)

14. Sea la función $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

a) Calcula las asíntotas de f(x)

b) Calcula los extremos de f(x)

Solución:

a)

Asíntotas verticales no tiene, ya que $x^2+1\neq 0$, por tanto f es continua en R y

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\in\Re\, ;\, \forall\, a\in\Re$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2-y+1}{y^2+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}{1+\frac{1}{y^2}}=1$$

Por tanto la recta y=1 es una asíntota horizontal, tanto en +∞ como en -∞

b)

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1\, ó\, x=1$$

Si estudiamos el signo de f’ (teniendo en cuenta que $(x^2+1)^2>0$) tenemos que:

x	(-∞, -1)	(-1,1)	(1,+∞)
f’(x)	-	+	-

Por tanto vemos que hay un máximo en el punto $(1,\frac{3}{2})$ y un mínimo en $(-1,\frac{1}{2})$

15. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide

a) Hallar las asíntotas de su gráfica

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x=2

Solución:

a)

Como $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$ entonces la recta x=3 es una asíntota vertical de la gráfica.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ no hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-3)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-6x+9}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-9x}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{9}{x}}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=6$$

Por tanto la recta y=x+6 es una asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{(x-3)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-6x+9}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{y^2+6y+9}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{6}{y}+\frac{9}{y^2}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-6x+9}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-9x}{x^2-6x+9}=\lim_{y\to+\infty}\frac{6y^2+9y}{y^2+6y+9}=\lim_{y\to+\infty}\frac{6+\frac{9}{y}}{1+\frac{6}{y}+\frac{9}{y^2}}=6$$

La recta y=x+6 también es asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$

(las funciones racionales tienen las mismas asíntotas en +∞ y en -∞)

b)

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-3)^2-x^3\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}\Rightarrow f'(2)=28$$

y como f(2)=8 la recta tangente es $y-8=28\cdot(x-2)$

16. Determinar los valores de a y de b para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si\ x\le 0 \\ 2a+b\cdot sen\ x & si\ x>0\end{cases}$

sea derivable.

Solución:

La función es derivable en todo R salvo en el cero, por tanto estudiaremos la función en ese punto.

Para que f sea derivable, ha de ser continua en x=0

$$f\ continua\ en\ x=0\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Leftrightarrow 1=2a\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

si suponemos que $a=\frac{1}{2}$, entonces f es derivable en x=0 si se cumple

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow (e^{ax})'(0)=(2a+b\cdot sen\,x)'(0)\Leftrightarrow (a e^{ax})(0)=(b\cos x)(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

Como hemos supuesto $a=\frac{1}{2}$ entonces $b=\frac{1}{2}$, obteniendo así los valores buscados.

17. Enuncia el teorema de Rolle. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x)=x^3+ax-1$ en el intervalo [0,1]. Para este valor de a, calcula un punto $c\in(0,1)$ en el que la recta tangente a la gráfica de f(x) sea paralela al eje OX.

Solución:

$$\left.\begin{array}{c} f\ continua\ en\ [a\ ,b] \\ f\ derivable\ en\ (a\ ,b) \\ f(a)=f(b)\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\, c\in(a\ ,b)\ /\ f\ '(c)=0$$

$f(x)=x^3+ax-1$ es una función polinómica, y por tanto continua en [0,1] y derivable en (0,1)

Faltaría comprobar la hipótesis f(0)=f(1)

$$\left.\begin{array}{c} f(0)=-1 \\ f(1)=a\end{array}\right\}\Rightarrow\{f(0)=f(1)\Leftrightarrow a=-1\}$$

Tendremos que calcular ahora el punto c para el cual $f\,'(c)=0$

Si $a=-1$, entonces $f\,'(x)=3x^2-1$ por tanto

$$f\,'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

tendremos entonces que el valor buscado en el intervalo (0,1) será $c=\sqrt{\frac{1}{3}}$

18. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{sen\ x}{\frac{1}{2}+\cos x}$

a) Verifica que $f(0)=f(\pi)=0$

b) Comprueba que la ecuación $f\,'(x)=0$ no tiene ninguna solución en el intervalo $(0\ ,\pi)$

c) Explica por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle en este caso.

Solución

a)

$$f(0)=\frac{sen\ 0}{\frac{1}{2}+\cos 0}=\frac{0}{\frac{1}{2}+1}=0$$

$$f(\pi)=\frac{sen\ \pi}{\frac{1}{2}+\cos\pi}=\frac{0}{\frac{1}{2}-1}=0$$

b)

$$f\,'(x)=\frac{\cos x\cdot(\frac{1}{2}+\cos x)-(-sen\,x)\cdot sen\,x}{(\frac{1}{2}+\cos x)^2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\cos x+\cos^2 x+sen^2 x}{(\frac{1}{2}+\cos x)^2}=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\cos x}{(\frac{1}{2}+\cos x)^2}$$

entonces

$$f\,'(x)=0\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}\cos x=0\Leftrightarrow\cos x=-2$$

con lo cual $f\,'(x)=0$ no tiene solución en $(0,\pi)$

c)

No se puede aplicar el teorema de Rolle porque la función no es continua en $[0,\pi]$ ni derivable en $(0,\pi)$, concretamente el motivo es que no está definida cuando

$$\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}$$

19. Dada la función

$$f(x)=x\,e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,3)$ tal que $f'(\alpha)=2$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

$$f'(x)=e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\left(1-x\cdot\frac{\pi}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\cdot e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

f’ es una función continua en [1,3]

$$f'(1)=1-\frac{\pi}{2}\approx-0{,}57$$

$$f'(3)=1+\frac{3\pi}{2}\approx5{,}71$$

Entonces, por según el teorema de los valores intermedios de Darboux existe un valor $\alpha\in(1,3)$ tal que $f'(\alpha)=2$

20. Dada la función

$$f(x)=x\,e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,3)$ tal que $f''(\alpha)=\pi$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

$$f'(x)=e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\left(1-x\cdot\frac{\pi}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\cdot e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

Podemos calcular f’’ y razonar con el teorema de Darboux como en el ejercicio anterior (más largo aunque más sencillo), o bien utilizar el teorema del valor medio del cálculo diferencial con f’

$$\left.\begin{array}{l} f'\,es\,continua\,en\,[1,3] \\ f'\,es\,derivable\,en\,(1,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\,c\in(1,3)\,/\,f''(c)=\frac{f'(3)-f'(1)}{3-1}=\frac{1+3\frac{\pi}{2}-\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=2\frac{\pi}{2}=\pi$$

21. Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. ¿Se puede aplicar, en el intervalo [0,1], este teorema a la función $f(x)=\frac{1}{2-x}$? En caso afirmativo, calcula el punto al que hace referencia el teorema.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} f\ continua\ en\,[a,b] \\ f\ derivable\ en\,(a,b)\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\,c\in(a,b)\,/\,f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La función es continua y derivable en $\Re-\{2\}$, por tanto se podrá aplicar el teorema del valor medio en el intervalo [0,1]

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

como $f'(x)=\frac{1}{(2-x)^2}$ entonces $f'(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{(2-x)^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(2-x)^2=2\Leftrightarrow x^2-4x+2=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

la solución buscada será $c=2-\sqrt{2}\approx0{,}586$

22. Dada la función $f(x)=\dfrac{\cos(x^3+2x^2+3x)}{\sqrt{x^2+x+2}}$ demuestra que existe un valor $\alpha\in(-2,1)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

La función es continua y derivable en todo R $(x^2+x+2>0;\quad \forall x\in\Re)$ y en particular f es continua en [-2,1] y derivable en (-2,1)

$$f(-2)=\frac{\cos(-6)}{2}\approx 0.48 \quad f(1)=\frac{\cos(6)}{2}\approx 0.48$$

Tenemos entonces $f(-2)=f(1)$, ya que $\cos(-x)=\cos x$ y por tanto f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-2,1]

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua en } [-2,1] \\ f \text{ derivable en } (-2,1) \\ f(-2)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in(-2,1)\ /\ f'(c)=0$$

23. Dada la función $f(x)=tg\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}x\right)+\dfrac{2}{\sqrt{17-2x-3x^2}}$ demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución

$$\left.\begin{array}{c} f(1)=tg(\frac{\pi}{4})+\frac{2}{\sqrt{12}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}} \\ f(2)=tg(\frac{\pi}{6})+2=\frac{1}{\sqrt{3}}+2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)-f(1)=1$$

Como $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=1$ el teorema del valor medio nos garantizaría que existe el valor buscado, pero antes tenemos que comprobar que f es continua en [1,2] y derivable en (1,2) .

Como $\dfrac{\pi}{4}\geq\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6x}\geq\dfrac{\pi}{6}\quad si\ x\in[1,2]$ entonces $tg\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6x}\right)$ está definida en [1,2], es continua y derivable en (1,2) (recordamos que $\nexists\, tg\,x\quad si\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \ k\in Z$)

Por otra parte, habrá que comprobar que $17-2x-3x^2\geq 0$ si $x\in[1,2]$

Como $17-2x-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{208}}{-6}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2-\sqrt{208}}{-6}\approx 2.0704 \\ x=\dfrac{2-\sqrt{208}}{-6}\approx -2{,}737 \end{cases}$ y estudiando el signo:

x	(-∞, -2.737)	(-2.737,2.0704)	(2.0704,+∞)
$17-2x-3x^2$	-	+	-

Con lo cual $\dfrac{2}{\sqrt{17-2x-3x^2}}$ también está definida en [1,2], es contínua y derivable en (1,2)

Por tanto f cumple las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial:

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua en } [1,2] \\ f \text{ derivable en } (1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in(1,2)\ /\ f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=1$$

24.

a) Calcula el valor de a para que la función $f(x)=\begin{cases} 1-\cos x & si\ x\leq 0 \\ x^2+a\,x & si\ x>0 \end{cases}$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$.

b) Considerando el valor de a obtenido en el apartado a), calcula el valor $c\in\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$ tal que $f'(c)=0$.

Solución:
a)
La función es continua en 0 ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$ y en el resto del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$ es continua por coincidir con funciones continuas.
Para que la función sea derivable en 0 es necesario que

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow(1-\cos x)'(0)=(x^2+ax)'(0)\Leftrightarrow sen(0)=(2x+a)(0)\Leftrightarrow 0=a$$

ahora debemos comprobar que cuando a=0 $f(\frac{-\pi}{2})=f(1)$

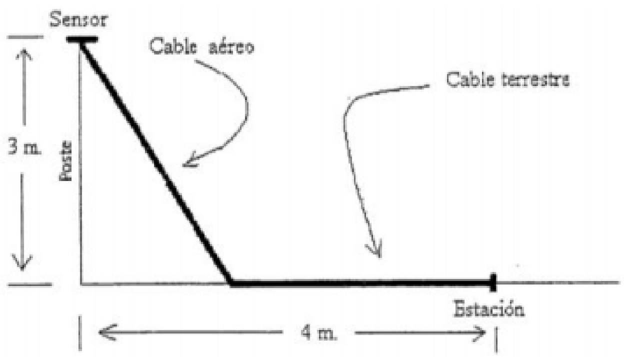
$$\left.\begin{array}{c} f(\frac{-\pi}{2})=1-\cos(-\frac{\pi}{2})=1-0=1 \\ f(1)=1^2=1 \end{array}\right\}\Rightarrow f(\frac{-\pi}{2})=f(1)$$

b)

$$f'(x)=\begin{cases} sen\ x & si\ x\leq 0 \\ 2\,x & si\ x>0 \end{cases}$$

como $2x=0\Leftrightarrow x=0$ y $sen\,x=0\Leftrightarrow x=0+k\pi;\quad k\in Z$ el valor buscado es c=0 y además es el único valor que cumple $f'(x)=0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$

25. Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge datos meteorológicos. Dichos datos deben transmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (ver figura). El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1000 €. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?



Siendo A la longitud del cable aéreo y T la del cable terrestre

$$\begin{cases} A^2=3^2+x^2\Rightarrow A=\sqrt{9+x^2} \\ T=4-x \\ P=3000\cdot A+1000\cdot T \end{cases}\Rightarrow P=3000\cdot\sqrt{9+x^2}+1000\cdot(4-x)=1000\cdot\left(3\sqrt{9+x^2}+4-x\right)\Rightarrow$$

$$P'=\frac{dP}{dx}=1000\cdot\left(3\cdot\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}-1\right)=1000\cdot\frac{3x-\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}\Rightarrow Si\ P'=0\Rightarrow 3x-\sqrt{9+x^2}=0\Rightarrow$$

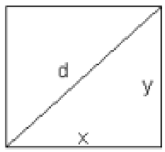
$$3x=\sqrt{9+x^2}\Rightarrow 9x^2=9+x^2\Rightarrow 8x^2=9\Rightarrow x^2=\frac{9}{8}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$P''\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{27000}{\left[9+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]\sqrt{9+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}}=\frac{27000}{\left(9+\frac{18}{16}\right)\sqrt{9+\frac{18}{16}}}=\frac{27000}{\left(9+\frac{9}{8}\right)\sqrt{9+\frac{9}{8}}}=\frac{27000}{\frac{81}{8}\sqrt{\frac{81}{8}}}=\frac{27000}{\frac{81}{8}\sqrt{\frac{81}{8}}}$$

$$P''\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{27000\cdot 8}{81\cdot\frac{9}{2\sqrt{2}}}=\frac{3000\cdot 8\cdot 2\sqrt{2}}{81}=\frac{1000\cdot 8\cdot 2\sqrt{2}}{27}>0\Rightarrow Mínimo\Rightarrow\begin{cases}T=4-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{16-3\sqrt{2}}{4}\ m\\ A=\sqrt{9+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{9}{2\sqrt{2}}\ m\end{cases}$$

26. **De entre todos los rectángulos de área 16 cm^2 , determina las dimensiones del rectángulo que tiene la diagonal menor. Calcula la longitud de dicha diagonal.**

Solución



El área de este rectángulo es: $A=x.y=16\Rightarrow y=\frac{16}{x}$

Su diagonal, según el teorema de Pitágoras está dada por la expresión:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{16}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{16^2}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^4+16^2}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^4+16^2}}{x}$$

Ya que *x* es un valor positivo.

Calculamos ahora la primera derivada de la función que hemos obtenido y la igualamos a cero:

$$d'(x)=\frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16^2}}.x-\sqrt{x^4+16^2}.1}{x^2}=\frac{\frac{2x^4}{\sqrt{x^4+16^2}}-\sqrt{x^4+16^2}}{x^2}=\frac{\frac{2x^4-x^4-16^2}{\sqrt{x^4+16^2}}}{x^2}=\frac{x^4-16^2}{x^2.\sqrt{x^4+16^2}}=0$$

Luego: $x^4-16^2=0\Rightarrow x^4=16^2\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{16^2}=\pm 4$, pero como $x>0\Rightarrow x=+4$

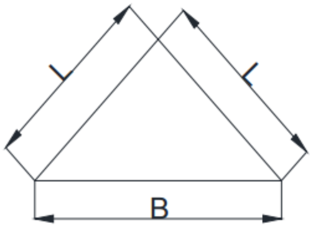
Para determinar si tenemos un valor máximo o mínimo para *d*, calculamos su derivada segunda:

$$d''(x)=\left(\frac{x^4-16^2}{x^2.\sqrt{x^4+16^2}}\right)'=\frac{4x^3.x^2.\sqrt{x^4+16^2}-(x^4-16^2).\left(x^2.\sqrt{x^4+16^2}\right)'}{\left(x^2\times\sqrt{x^4+16^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{4x^5.\sqrt{x^4+16^2}-(x^4-16^2).\left(x^2.\sqrt{x^4+16^2}\right)'}{\left(x^2.\sqrt{x^4+16^2}\right)^2}$$

Como $d''(4)=\frac{4.4^5.\sqrt{4^4+16^2}-0}{\left(4^2.\sqrt{4^4+16^2}\right)^2}>0$, para $x=+4$, la diagonal del rectángulo tiene un valor mínimo. Para este valor de *x*, $y=\frac{16}{4}=4$; luego el rectángulo de área 16 que tiene una diagonal de menor longitud es un cuadrado de lado 4.

27. **Determinar, de entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, el que tiene área máxima.**



$$\left\{\begin{cases} 6=2L+B\Rightarrow B=6-2L=2\left(3-L\right) \\ L^2=H^2+\left(\dfrac{B}{2}\right)^2\Rightarrow H^2=L^2-\dfrac{B^2}{4}=\dfrac{4L^2-B^2}{4}\Rightarrow H=\pm\dfrac{\sqrt{4L^2-B^2}}{2}\Rightarrow H=\dfrac{\sqrt{4L^2-\left[2\left(3-L\right)\right]^2}}{2} \end{cases}\right. \\ A=\dfrac{BH}{2}$$

$$H=\frac{\sqrt{4L^2-4\left(3-L\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4L^2-4\left(9-6L+L^2\right)}}{2}=\frac{\sqrt{4L^2-36+24L-4L^2}}{2}=\frac{\sqrt{24L-36}}{2}=\frac{2\sqrt{6L-9}}{2}\Rightarrow$$

$$H=\sqrt{6L-9}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2L-3}\Rightarrow$$

$$A=\frac{2\left(3-L\right)\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2L-3}}{2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2L-3}\cdot\left(3-L\right)\Rightarrow$$

$$A'=\frac{dA}{dL}=\sqrt{3}\cdot\left[\frac{2}{2\sqrt{2L-3}}\cdot\left(3-L\right)-\sqrt{2L-3}\right]=\sqrt{3}\cdot\left[\frac{3-L-\left(2L-3\right)}{\sqrt{2L-3}}\right]=\frac{\sqrt{3}\left(6-3L\right)}{\sqrt{2L-3}}=\frac{3\sqrt{3}\left(2-L\right)}{\sqrt{2L-3}}\Rightarrow$$

$$A'=0\Rightarrow\frac{3\sqrt{3}\left(2-L\right)}{\sqrt{L-3}}=0\Rightarrow 2-L=0\Rightarrow L=2\Rightarrow A''=\frac{d^2A}{dL^2}=3\sqrt{3}\cdot\frac{-\sqrt{2L-3}-\dfrac{2}{2\sqrt{2L-3}}\cdot\left(2-L\right)}{2L-3}$$

$$A''=\frac{d^2A}{dL^2}=3\sqrt{3}\cdot\frac{-\dfrac{\left(2L-3\right)+\left(2-L\right)}{\sqrt{2L-3}}}{2L-3}=3\sqrt{3}\cdot\frac{-\left(2L-3+2-L\right)}{\left(2L-3\right)\sqrt{2L-3}}=-3\sqrt{3}\cdot\frac{L-1}{\left(2L-3\right)\sqrt{2L-3}}$$

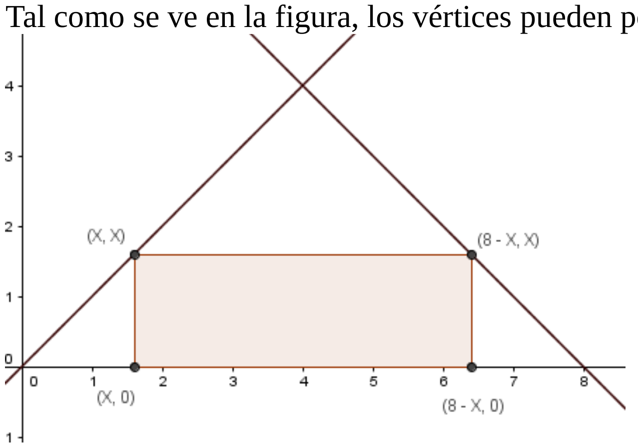
$$A''\left(2\right)=-3\sqrt{3}\cdot\frac{2-1}{\left(2\cdot 2-3\right)\sqrt{2\cdot 2-3}}=-3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{1\cdot\sqrt{1}}=-3\sqrt{3}<0\Rightarrow \textit{Máximo}$$

$$\begin{cases} L=2\ m \\ B=2\cdot\left(3-2\right)=2\ m \end{cases}\Rightarrow \textit{Triángulo equilátero}$$

28. Un rectángulo está inscrito en el triángulo que tiene los lados en las rectas de ecuaciones y=x, x+y=8, y=0, y tiene un lado sobre la recta y = 0. Encuentre sus vértices para que su superficie sea máxima.

Solución:

Tal como se ve en la figura, los vértices pueden ponerse en función de x



La base del rectángulo será $8-2x$ y la altura x

Por tanto $A\left(x\right)=x\cdot\left(8-2x\right)=8x-2x^2$

$A'(x) = 8 - 4x \Rightarrow A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$A''(x) = -4 \Rightarrow \textit{máximo cuando } x = 2$

Los vértices, por tanto, son (2,0), (2,2), (6,2) y (6,0) y el área máxima

$A(2) = 8 \textit{ unidades de superficie}$

29. Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2 = 2x + 9$, siendo $-4{,}5 \leq x \leq 8$ e $y \geq 0$, estando situado el Sol en el punto (0,0). Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia del meteorito al Sol desde un punto P de su trayectoria cuya abscisa es x.

b) El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol.

c) Distancia mínima del meteorito al Sol.

a)

Los puntos genéricos de la trayectoria son de la forma $P\left(x,\ \sqrt{2x+9}\right)$.

La distancia $\overline{OP}$ pedida es la siguiente:

$$d = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2x+9}\right)^2} = \underline{\underline{\sqrt{x^2+2x+9}\ \textit{unidades}}}.$$

b)

La distancia mínima al Sol se producirá cuando la derivada de la distancia sea 0.

$$d' = \overline{OP}' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+9}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}} = 0 \Rightarrow x+1=0 \;;;\; \underline{\underline{x=-1}}.$$

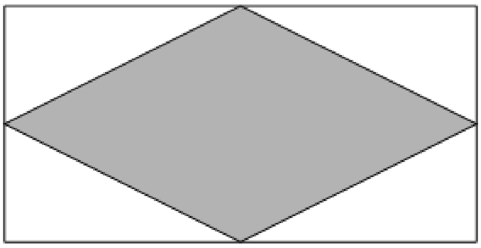
El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol es $\underline{\underline{P\left(-1,\ \pm\sqrt{7}\right)}}$.

c)

La distancia mínima del meteorito al Sol es la siguiente:

$$d(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 2 + 9} = \sqrt{1-2+9} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\ \textit{unidades}}}.$$

30. La figura siguiente muestra un rombo inscrito dentro de un rectángulo, de forma que los vértices del rombo se sitúan en los puntos medios de los lados del rectángulo. El perímetro del rectángulo es de 100 metros. Calcular las longitudes de sus lados para que el área del rombo inscrito sea máxima



$$\begin{cases} 100 = 2D + 2d \Rightarrow D + d = 50 \Rightarrow D = 50 - d \\ S = \dfrac{Dd}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\cdot(50-d)\,d = \frac{1}{2}\cdot\left(50d - d^2\right) \Rightarrow$$

$$S' = \frac{dS}{dd} = \frac{1}{2}\cdot(50-2d) = \frac{2}{2}\cdot(25-d) = 25 - d \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 25 - d = 0 \Rightarrow d = 25 \Rightarrow$$

$$S'' = \frac{d^2S}{dd^2} = -1 < 0 \Rightarrow \textit{Máximo} \Rightarrow \begin{cases} d = 25\ m \\ D = 50 - 25 = 25\ m \end{cases}$$

31. Se divide un segmento de longitud 200 cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Lado del cuadrado C
Altura del rectángulo .... H **Base del rectángulo 2H**

$$\begin{cases} 200 = 4C + 2H + 2\cdot 2H = 4C + 6H \Rightarrow 100 = 2C + 3H \Rightarrow 2C = 100 - 3H \Rightarrow C = \dfrac{100-3H}{2} \\ S = C^2 + 2H\cdot H = C^2 + 2H^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$S = \left(\frac{100-3H}{2}\right)^2 + 2H^2 = \frac{10000 - 600H + 9H^2}{4} + 2H^2 = \frac{10000 - 600H + 9H^2 + 8H^2}{4}$$

$$S = \frac{10000 - 600H + 17H^2}{4} \Rightarrow S' = \frac{dS}{dH} = \frac{34H - 600}{4} = \frac{17H - 300}{2} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow \frac{17H - 300}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$17H = 300 \Rightarrow S'' = \frac{d^2S}{dH^2} = \frac{17}{2} > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} H = \dfrac{300}{17}\ cm \\ C = \dfrac{100 - 3\cdot\dfrac{300}{17}}{2} = \dfrac{\dfrac{1700-900}{17}}{2} = \dfrac{800}{34} = \dfrac{400}{17}\ cm \end{cases}$$

$$Longitud\ de\ la\ parte\ del\ cuadrado = 4C = 4\cdot\frac{400}{17} = \frac{1600}{17}\ cm$$

$$Longitud\ de\ la\ parte\ del\ rectángulo = 6H = 6\cdot\frac{300}{17} = \frac{1800}{17}\ cm$$

32. Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

Función a minimizar: Superficie = S = área rectángulo + área base = $(2\pi r).h + \pi r^2$.

Relación entre las variables: Capacidad = Volumen = 125 = $(\pi r^2).h$, de donde h = $\dfrac{125}{\pi r^2}$.

Función a minimizar $S(r) = (2\pi r)\cdot\dfrac{125}{\pi r^2} + \pi r^2 = \dfrac{250}{r} + \pi r^2$.

Si S'(a) = 0 y S''(a) > 0, x = a es un mínimo de S(r)

$S'(r) = \dfrac{-250}{r^2} + 2\pi r$. De S'(r) = 0, tenemos $\dfrac{-250}{r^2} + 2\pi r = 0$, es decir $2\pi r = \dfrac{250}{r^2}$, de donde

tenemos $2\pi r^3 = 250$, y $r = \sqrt[3]{\dfrac{250}{2\pi}} = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ m. ≅ 3'414 m.

Las dimensiones del depósito son radio = r = $\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ m. y h = $\dfrac{125}{\pi\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi}$ m = $\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \cong$

≅ 3'414 m. Observamos que el radio y la altura son iguales.

Veamos que r = $\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ es un mínimo, viendo que $S''\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right) > 0$

De $S'(r) = \dfrac{-250}{r^2} + 2\pi r = -250\cdot r^{-2} + 2\pi r$, tenemos $S''(r) = -250\cdot(-2)\cdot r^{-3} + 2\pi = \dfrac{500}{r^3} + 2\pi$, por

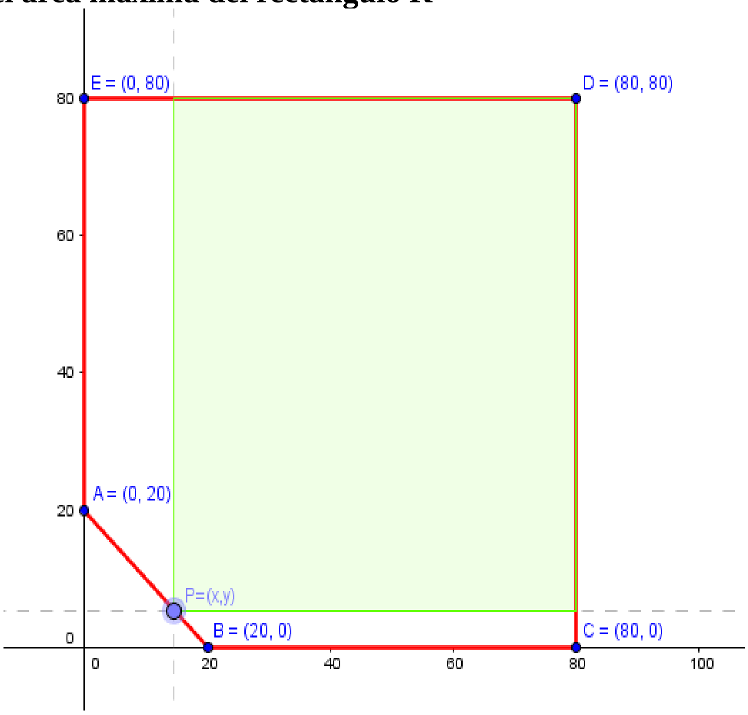
tanto sustituyendo $S''\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = \dfrac{500}{\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3} + 2\pi = 4\pi + 2\pi = 6\pi > 0$, luego es un mínimo.

33. Un agricultor hace un estudio para plantar árboles en una finca. Sabe que si planta 24 árboles la producción media de cada uno de ellos será de 600 frutos. Estima que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.

a) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?
b) ¿Cuál es esa producción?

Si planta x arboles en total
$P = x\left[600-15(x-24)\right] = x\,(600-15x+360) = x\,(960-15x) = 15x\,(64-x) \Rightarrow$
$P' = 15\left[(64-x)-x\right] = 15\,(64-2x) = 30\,(32-x) \Rightarrow Si\ P' = 0 \Rightarrow 30\,(32-x) = 0 \Rightarrow 32-x = 0 \Rightarrow x = 32 \Rightarrow$
$P' = -30 < 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow x = 32\ arboles\ plantará$
b)
$P = 32\cdot\left[600-15(32-24)\right] = 32\cdot(600-15\cdot 8) = 32\cdot(600-120) = 32\cdot 480 = 15360\ frutos$

34. Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices A=(0,20), B=(20,0), C=(80,0), D=(80,80) y E=(0,80). Para obtener una pieza rectángular se elige un punto P=(x,y) del segmento AB y se hacen dos cortes paralelos a los ejes X e Y. Así se obtiene un rectángulo R cuyos vértices son los puntos P=(x,y), F=(80,y), D=(80,80) y G=(x,80)
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) El área del rectángulo R en función de x cuando $0 \le x \le 20$
b) El valor de x para que el área del rectángulo R es máxima.
c) El valor del área máxima del rectángulo R



a)
La base del rectángulo tiene longitud (80-x) mientras que la altura mide (80-y)
Como el punto P=(x,y) está en la recta que pasa por A y B, tendrá que cumplir la ecuación de dicha recta, que en este caso es y=-x+20.
Ahora podemos escribir el valor del área en función de x:
$A(x)=(80-x)\cdot(80-y)=(80-x)\cdot(80-(-x+20))=(80-x)\cdot(x+60)=-x^2+20x+4800$
b)
La función de A(x) es una parábola cóncava, ya que A''=-2, así pues tendrá un máximo en el punto que cumpla
$A'(x)=-2x+20=0 \Leftrightarrow x=10\,cm$
Así pues, el punto para el cual el área es máxima es P=(10,10)
c)

El valor del área máxima se obtiene calculando la imagen:
$A(10)=-10^2+20\cdot 10+4800=4900\, cm^2$

35. La fabricación de x tabletas gráficas supone un coste total dado por la función $C(x)=1500x+1000000$. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función $P(x)=4000-x$. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo?

Solución:

Siendo x el número de tabletas vendidas

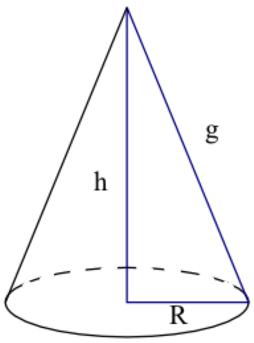
$$Ganacias \Rightarrow G(x)=x\cdot P(x)-C(x)=x\,(4000-x)-(1500x+1000000)=4000x-x^2-1500x-1000000$$

$$G(x)=-x^2+2500x-1000000 \Rightarrow G'(x)=\frac{dG(x)}{dx}=-2x+2500 \Rightarrow Si\ G'(x)=0 \Rightarrow -2\cdot(x-1250)=0 \Rightarrow$$

$$x-1250=0 \Rightarrow x=1250$$

$$G''(x)=\frac{d^2G(x)}{dx^2}=-2<0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow x=1250\ tablets$$

36. Se quiere construír un recipiente cónico de generatriz 15 cm con la mayor capacidad posible. ¿Cuál debe ser el radio de la base?



El volumen de un cono viene dado por la fórmula: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$

Por otra parte g, h y R verifican el teorema de Pitágoras.

$$\left.\begin{array}{r} g^2=h^2+R^2 \\ g=15\ cm \end{array}\right\} \Rightarrow R^2=225-h^2$$

Sustituyendo:

$$V(h)=\frac{1}{3}\pi(225-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(225\text{h}-h^3)$$

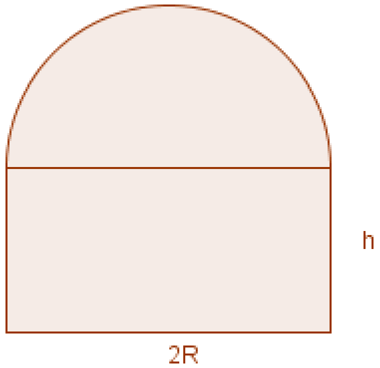
$$V'(h)=\frac{1}{3}\pi(225-3\text{h}^2)$$

$$V'(h)=0 \Leftrightarrow h^2=75 \Rightarrow h=\sqrt{75}$$

$$V''(h)=\frac{1}{3}\pi\cdot(-6\text{h}) \Rightarrow V''(\sqrt{75})=-2\pi\sqrt{75}\leq 0 \Rightarrow máximo\ cuando\ h=\sqrt{75}$$

$$h=\sqrt{75} \Rightarrow R^2=225-75=150 \Rightarrow R=\sqrt{150}\ cm$$

37. Una ventana tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. De entre todas las ventanas de esta forma que tengan perímetro 10m. ¿Cuál es la que tiene área máxima?



La superficie vendrá dada por la fórmula

$$A = 2\mathrm{Rh} + \frac{\pi R^2}{2}$$

Como el perímetro son 10 m

$$10 = 2\mathrm{h} + 2\mathrm{R} + \pi R \Rightarrow h = \frac{10 - 2\mathrm{R} - \pi R}{2}$$

y por tanto la función a maximizar será

$$A(R) = A = 2\mathrm{R} \cdot \frac{10 - 2\mathrm{R} - \pi R}{2} + \frac{\pi R^2}{2} = 10\mathrm{R} - 2\mathrm{R}^2 - \frac{\pi R^2}{2}$$

$$A'(R) = 10 - 4\mathrm{R} - \pi R$$

$$A'(R) = 0 \Leftrightarrow 10 = (4 + \pi) \cdot R \Leftrightarrow R = \frac{10}{4 + \pi} \approx 1{,}4\ m$$

$$A''(R) = -4 - \pi \Rightarrow A''(1{,}4) < 0 \Rightarrow máximo$$

Si calculamos h veremos que $h = R = \dfrac{10}{4 + \pi} \approx 1{,}4\ m$

Con lo cual en la forma óptima la base del rectángulo mide el doble que la altura

38. Se desea construir una caja de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 € / cm2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo

Capacidad = Volumen = $x^2.y$ = 80 cm^3
Superficie lateral + tapa = $x^2 + 4xy$
Superficie base = x^2
Coste superficie lateral + tapa a 1 € /cm^2
Coste superficie base a 1 € /cm^2 mas el 50% = 1 + 50/100 = 1 + 1/2 = 3/2 € /cm^2
Coste total = $(x^2 + 4xy).1 + x^2.(3/2) = (5/2)x^2 + 4xy$
Relación $x^2.y = 80$ de donde $y = 80/x^2$. Entrando en coste total
Coste total = $(5/2)x^2 + 4xy = (5/2)x^2 + 4x(80/x^2) = (5/2)x^2 + 320/x = C(x)$
Le aplicamos la técnica de máximos y mínimos
$C'(x) = 5x - 320/x^2$
$C'(x) = 0$; $5x - 320/x^2 = 0$; $5x^3 = 320$; $x^3 = 64$, de donde $x = \sqrt[3]{64} = 4$
Veamos que es un mínimo con la 2ª derivada
$C''(x) = 5 + 640/x^3$, de donde $C(4) = 5 + 640/64 = 15 > 0$, luego es un mínimo.
Las dimensiones de la caja para un coste mínimo son x = 4 cm e $y = 80/(4^2) = 5$m

39. Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm2 . Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo

Volumen = V = área base por altura = $\pi r^2 h$
Relación = 200 = $2\pi rh + 2\pi r^2$, de donde h = $(100/\pi r) - r$
$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2[(100/\pi r) - r] = 100r - \pi r^3$.

Le aplicamos la técnica de máximos y mínimos
Si f '(a)= y f ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo
Si f '(a)= y f ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo

$V(r) = 100r - \pi r^3$.
$V'(r) = 100 - 3\pi r^2$.

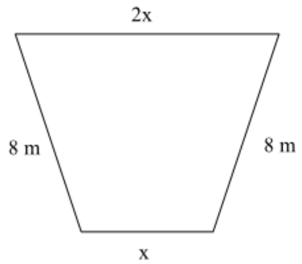
V '(r) = 0, nos resulta $100 - 3\pi r^2 = 0$, de donde $r = \pm\sqrt{\dfrac{100}{3\pi}} = \pm\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$. Solo vale la solución positiva porque son longitudes.

V ''(r) = $-6\pi r$, de donde $V''\left(\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}\right) = -6\pi.\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}} < 0$, por tanto es un máximo.

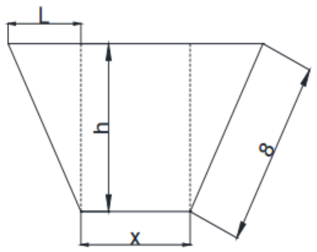
Veamos las dimensiones de la lata $r = \dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$ y $h = \dfrac{100}{\pi.\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}} - \dfrac{10}{\sqrt{3\pi}} = \dfrac{20}{\sqrt{3\pi}}$

Vemos que la altura es el doble del radio, es decir la altura coincide con el diámetro.

40. Se quiere construir un canal que tenga como sección un trapecio isósceles de manera que la anchura superior del canal sea el doble que la anchura inferior y que los lados no paralelos sean de 8 metros. Calcula el valor de x para que el área de la sección sea máxima.



Solución:



$$2L + x = 2x \Rightarrow x = 2L \Rightarrow L = \frac{x}{2}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} L = \dfrac{x}{2} \\ L^2 + h^2 = 8^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + h^2 = 64 \Rightarrow h^2 = 64 - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{256 - x^2}{4} \Rightarrow h = \pm\sqrt{\dfrac{256 - x^2}{4}} \\ A = \dfrac{2x + x}{2} \cdot h \end{cases} \Rightarrow A = \frac{3x}{2} \cdot \frac{\sqrt{256 - x^2}}{2}$$

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

$$A'(x) = \frac{dA}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \left(\sqrt{256 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{256 - x^2}} \cdot x\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\sqrt{256 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{256 - x^2}}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{256 - x^2 - x^2}{\sqrt{256 - x^2}}\right)$$

$$A'(x) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{256 - 2x^2}{\sqrt{256 - x^2}}\right) = \frac{6}{4} \cdot \left(\frac{128 - x^2}{\sqrt{256 - x^2}}\right) \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{128 - x^2}{\sqrt{256 - x^2}}\right) = 0 \Rightarrow 128 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = 128 \Rightarrow x = \pm\sqrt{128} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}\ m. \\ x = -\sqrt{128} \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases}$$

41. - Considere todos los prismas rectos de base cuadrada con un volumen V fijado. Sea x el lado de la base del prisma e y su altura.

a) Encuentre la expresión del volumen y del área total del prisma en función de las variables x e y.

b) Compruebe que el que tiene área total mínima es en realidad un cubo

$a)$

$$\begin{cases} V = x^2 y \\ A = 2x^2 + 4xy = 2\left(x^2 + 2xy\right) \end{cases}$$

$b)$

$$y = \frac{V}{x^2} \Rightarrow A = 2\left(x^2 + 2x\frac{V}{x^2}\right) = 2\left(x^2 + \frac{2V}{x}\right) = 2\frac{x^3 + 2V}{x} \Rightarrow A' = \frac{dA}{dx} = 2\frac{3x^2x - \left(x^3 + 2V\right)}{x^2} = 2\frac{2x^3 - 2V}{x^2}$$

$$A' = 4\frac{x^3 - V}{x^2} \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow 4\frac{x^3 - V}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 - V = 0 \Rightarrow x^3 = V \Rightarrow x = \sqrt[3]{V} \Rightarrow$$

$$A'' = \frac{d^2A}{dx^2} = 4\frac{3x^2x^2 - 2x\left(x^3 - V\right)}{x^4} = 4\frac{3x^3 - 2x^3 + 2V}{x^3} = 4\frac{x^3 + 2V}{x^3} \Rightarrow$$

$$A''\left(\sqrt[3]{V}\right) = 4\frac{\left(\sqrt[3]{V}\right)^3 + 2V}{\left(\sqrt[3]{V}\right)^3} = 4\frac{V + 2V}{V} = 4 \cdot \frac{3V}{V} = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{V} \\ y = \dfrac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \dfrac{V\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{V^3}} = \dfrac{V\sqrt[3]{V}}{V} = \sqrt[3]{V} \end{cases}$$

$x = y$

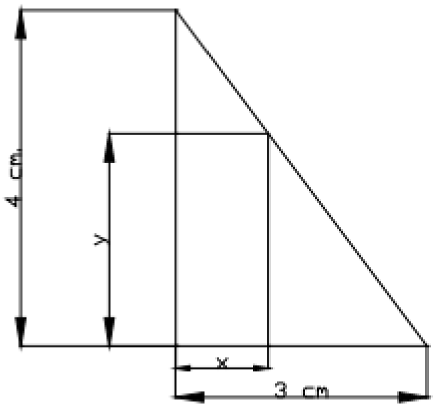
Al ser la base igual a la altura nos encontramos ante un cubo como adelantaba el enunciado del problema

42. Dentro de un triángulo rectángulo, de catetos 3 y 4 cm, se encuentra un rectángulo. Dos lados del rectángulo están situados en los catetos del triángulo y uno de los vértices del rectángulo está en la hipotenusa del triángulo.

a) Haga un esbozo de la situación descrita

b) Si x es la longitud del lado del rectángulo que está situado en el cateto pequeño e y es el otro lado del rectángulo, compruebe que se cumple que 4x + 3y = 12.

c) Determine las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima



a)

b) $$\frac{4 - y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow 12 - 3y = 4x \Rightarrow 4x + 3y = 12$$

$$\begin{cases} 4x+3y=12 \Rightarrow 3y=12-4x \Rightarrow y=\dfrac{12-4x}{3} \\ S=xy \end{cases} \Rightarrow S=x\,\dfrac{12-4x}{3}=\dfrac{12x-4x^2}{3}=\dfrac{4}{3}\left(3x-x^2\right)\Rightarrow$$

$$S'=\frac{dS}{dx}=\frac{4}{3}(3-2x)\Rightarrow S'=0\Rightarrow \frac{4}{3}(3-2x)=0\Rightarrow 3-2x=0\Rightarrow 2x=3\Rightarrow x=\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$S''=\frac{d^2S}{dx^2}=-\frac{8}{3}<0\Rightarrow Máximo\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}\,cm \\ y=\dfrac{12-4\cdot\frac{3}{2}}{3}=\dfrac{12-6}{3}=2\,cm \end{cases}$$

c)

43. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}\right)\cdot\left(\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}\right)}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x+2-\left(3x^2+x\right)}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{1}{x}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5x^2+2)\cdot(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x^2+2)\cdot(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-30x^2+2x-12}{2x^3-x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{30}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{12}{x^3}}{2-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{5}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\frac{x}{2}}}{sen\ x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\frac{x}{2}}}{sen\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{\cos x}=\frac{1-1/2}{1}=\frac{1}{2}$$

L'Hopital

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$$

L'Hopital

e) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{x\,e^{x}}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{x\,e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x\,e^{x}} + \frac{1}{x\,e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} + \frac{1}{x\,e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\,e^{x}} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{1} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\,e^{x}} =$$

$$=+\infty+0=+\infty$$

f) $\displaystyle \lim_{x\to 4} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-4}}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle \lim_{x\to 4^-} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-4}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\infty} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\infty} = 0 \\ \displaystyle \lim_{x\to 4^+} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-4}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{+\infty} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 4} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-4}}$$

g) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{e^{x^2}}$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{e^{x^2}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-2y+1}{e^{y^2}} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{-2}{2y\cdot e^{y^2}} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

h) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{2x} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

i) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,e^{x}}{\cos^2 x-1}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\,e^{x}}{\cos^2 x-1} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\,e^{x}+x^2\,e^{x}}{-2\cos x\; sen\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x+x^2)\,e^{x}}{-2\cos x\; sen\, x} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2+2x)\,e^{x}+(2x+x^2)\,e^{x}}{2\,sen^2 x-2\cos^2 x} = \frac{2}{-2} = -1$$

j) $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{sen\, x}\right)^2}$

Solución

$$K = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{sen\, x}\right)^2} \Rightarrow \ln K = \lim_{x\to 0} \ln (\cos x)^{\left(\frac{1}{sen\, x}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{sen\, x}\right)^2 \cdot \ln(\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{sen^2 x} \underset{\text{L'Hopital}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-sen\, x}{\cos x}}{2\,sen\, x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow K = e^{\frac{-1}{2}}$$

k) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x \, sen \, x - x}{2x^2 + x^4}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \, sen \, x - x}{2x^2 + x^4} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x \, sen \, x + e^x \cos x - 1}{4x + 4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x (sen \, x + \cos x) - 1}{4x + 4x^3} \underset{\text{L'Hopital}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x (sen \, x + \cos x) + e^x (\cos x - sen \, x)}{4 + 12x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot e^x \cos x}{4 + 12x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

l) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

m) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x) \cdot (1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x) \cdot (1 + \sqrt{x})}{1 - x} = \lim_{x \to 1} (1 + \sqrt{x}) = 2$$

n) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \ln x}{x}$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \ln x}{x} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-1/x}{1} = 0$$

o) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - 2x - e^x + sen \, 3x}{x^2}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - 2x - e^x + sen \, 3x}{x^2} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-2 - e^x + 3\cos 3x}{2x} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-e^x - 9 \, sen \, 3x}{2} = -\frac{1}{2}$$

p) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

q) $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

Solución:

$$K=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}\Rightarrow \ln K=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(2-x)^2}\cdot\ln\left(\frac{1}{3-x}\right)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{3-x}\right)}{(2-x)^2}=$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(3-x)\cdot\frac{-1}{(3-x)^2}\cdot(-1)}{-2(2-x)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{-2(2-x)(3-x)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2(x-2)(3-x)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2(3-x)}\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot+\infty=+\infty\Rightarrow K=e^{+\infty}=+\infty$$

r) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n-7}-\sqrt{n}\right)\cdot\sqrt{3n+5}$

Solución:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n-7}-\sqrt{n}\right)\cdot\sqrt{3n+5}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{3n^2-16n-35}-\sqrt{3n^2+5n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3n^2-16n-35}-\sqrt{3n^2+5n}\right)\cdot\left(\sqrt{3n^2-16n-35}+\sqrt{3n^2+5n}\right)}{\sqrt{3n^2-16n-35}+\sqrt{3n^2+5n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-16n-35-(3n^2+5n)}{\sqrt{3n^2-16n-35}+\sqrt{3n^2+5n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-21n-35}{\sqrt{3n^2-16n-35}+\sqrt{3n^2+5n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{-21-\frac{35}{n}}{\sqrt{3-\frac{16}{n}-\frac{35}{n^2}}+\sqrt{3+\frac{5}{n}}}=\frac{-21}{2\sqrt{3}}=\frac{-7\sqrt{3}}{2}$$

44. Calcula el valor de m para que $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-mx)\cdot(2x+3)}{x^2+4}=6$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-mx)\cdot(2x+3)}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2mx^2+(2-3m)x+3}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2m+\frac{(2-3m)}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=-2m$$

Por tanto deberá cumplirse $-2m=6\Leftrightarrow m=-3$

45. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+b\ sen\ x}{x^3}$ **es finito, calcula b y el valor del límite.**

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+b\ sen\ x}{x^3}\overset{\text{L'Hopital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\ sen\ x+b\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)\cos x-x\ sen\ x}{3x^2}$$

si $b\neq-1$ entonces tendremos un límite del tipo $\frac{k}{0}$ del cual no resulta un número finito.

Supondremos por tanto b=-1 con lo cual

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)\cos x - x\,sen\,x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot sen\,x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3}=-\frac{1}{3}$$

L'Hopital

46. Calcula la relación que debe haber entre a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{2}x & si\ x\neq 0\\ b & si\ x=0\end{cases}$$ **sea continua en toda la recta real**

Solución:

Debe cumplirse $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ como $f(0)=b$ entonces

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot e^{ax}}{2}=\frac{a}{2}$$

por tanto la relación debe ser a=2b

47. Calcula los valores de b y c para que la función $f(x)=\begin{cases}\ln(e+x^2) & si\ x<0\\ x^2+bx+c & si\ x\geq 0\end{cases}$ **sea derivable en x=0**

Solución:

Para que f sea derivable ha de ser continua, entonces es necesario que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow c=\lim_{x\to 0^-}\ln(e+x^2)=1$$

suponemos entonces que c=1, entonces para que f sea derivable en 0 es necesario que:

$$(\ln(e+x^2))'(0)=(x^2+bx+1)'(0)\Leftrightarrow\left(\frac{2x}{e+x^2}\right)(0)=(2x+b)(0)\Leftrightarrow b=0$$

48.

a) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & si\ x\leq 1\\ \dfrac{2\ln x+2}{x^2} & si\ x>1\end{cases}$ **sea derivable en x=1**

b) Para los valores a=-4 y b=6 determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución

a)

Para que f sea derivable ha de ser continua, entonces es necesario que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a+b=2$$

suponemos entonces que a+b=2, entonces para que f sea derivable en 1 es necesario que:

$$(ax^2+bx)'(1)=\left(\frac{2\ln x+2}{x^2}\right)'(1)\Leftrightarrow(2ax+b)(1)=\left(\frac{2x-2x\cdot(2\ln x+2)}{x^4}\right)(1)\Leftrightarrow 2a+b=-2$$

tenemos, por tanto

$$f\ derivable\ en\ x=1\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ 2a+b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=6\end{cases}$$

b)

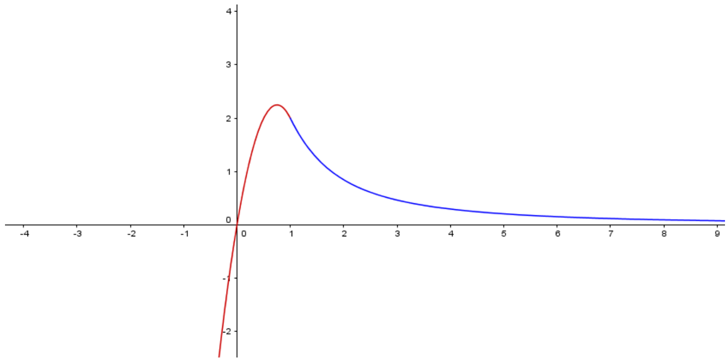
Si a=-4 y b=6 entonces f es continua y derivable en R siendo

$$f'(x)=\begin{cases}-8x+6 & si\ x\geq 1\\ \dfrac{-2-4\ln x}{x^3} & si\ x>1\end{cases}$$

Si estudiamos el signo de la derivada:

x	$(-\infty,\frac{3}{4})$	$\left(\frac{3}{4},1\right]$	$(1,+\infty)$
f’(x)	+	-	-

Por tanto crece en $(-\infty,\frac{3}{4})$ y decrece en $(\frac{3}{4},+\infty)$



49. Dada la función $f(x)=\frac{e^x}{x}$, se pide:

- **a) Dominio de definición y cortes con los ejes.**
- **b) Estudio de las asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas)**
- **c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos)**
- **d) Representación gráfica aproximada.**

Solución:

a)

Dom f =R-{0}

No hay corte con el eje OY ($\nexists f(0)$)

Tampoco hay corte con el eje OX ($f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x}=0 \Leftrightarrow e^x=0$, pero $e^x>0$)

b)

La única posibilidad de asíntota vertical es en x=0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to 0^-}e^x\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=1\cdot(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}e^x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=1\cdot(+\infty)=+\infty$$

Así pues x=0 es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{y\to +\infty}\frac{e^{-y}}{-y}=\lim_{y\to +\infty}\frac{-e^{-y}}{-1}=0$$

Vemos que y=0 es una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas:

La única posibilidad es cuando $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

por tanto no hay asíntotas oblicuas.

c)

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)\cdot e^x}{x^2}$$

Como $e^x>0$ y $x^2>0$ entonces el signo de f' dependerá de (x-1), así pues:

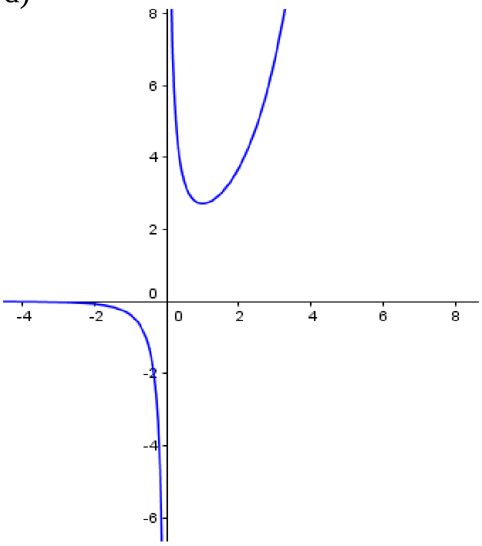
x	$(-\infty,0)$	(0,1)	$(1,+\infty)$
f'(x)	-	-	+

Por lo tanto f crece en $(1,+\infty)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(0,1)$

La función tiene un único mínimo relativo en el punto (1,1)

No hay máximos ni mínimos absolutos (ver límites en x=0)

d)



50. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-x/4}{x^2}$

<u>Solución</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-x/4}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{4+x}-8-x}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(4\sqrt{4+x}-(8+x)\right)\cdot\left(4\sqrt{4+x}+(8+x)\right)}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+(8+x)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{16(4+x)-(8+x)^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+(8+x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{64+16x-64-16x-x^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+(8+x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+(8+x)\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4\cdot\left(4\sqrt{4+x}+(8+x)\right)}=\frac{-1}{64}$$

51. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=x^3-kx+10$ cumpla las hipóteses del teorema de Rolle en el intervalo [-2,0] y para ese valor determina un punto del intervalo en el que se anule a derivada de f(x)

<u>Solución</u>:

$f(x) = x^3 - kx + 10$ é unha función polinómica e polo tanto continua en $[-2,0]$ e derivable en $(-2,0)$. Para poder aplicarlle o teorema de Rolle só resta impoñerlle a condición de que tome o mesmo valor nos extremos do intervalo

$f(-2) = f(0) \Rightarrow -8 + 2k + 10 = 10 \Rightarrow \boxed{k = 4}$

$f(x) = x^3 - 4x + 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Pero $\frac{2\sqrt{3}}{3} \notin (-2,0)$, polo que o punto do intervalo $(-2,0)$ no que se anula a derivada de $f(x)$ é o punto $\boxed{c = -\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

52. Calcula el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$g(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

Solución:

Para que $\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ esté definida, es necesario que $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$, por tanto si estudiamos el signo de $x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$ tenemos

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
x^2-1	+	-	+

Con lo cual el dominio de g es $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Para ver el crecimiento debemos estudiar g'

$$g'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2-1)\cdot(x^2+1)}$$

Como $x^2+1>0$ sólo deberemos tener en cuenta el signo de $4x$ y de x^2-1

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
4x	-	-	+	+
x^2-1	+	-	-	+
g'(x)	-	$\nexists$	$\nexists$	+

Así pues g crece en $(1,+\infty)$ y decrece en $(-\infty,-1)$

53. Calcula, si existen, los valores $a, b \in \Re$, para que sea derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & si\ x<0 \\ x^2+ax+b & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

En $x < 0$, a función $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & se\ x < 0 \\ x^2+ax+b & se\ x \geq 0 \end{cases}$ é continua e derivable por ser cociente de funcións continuas e derivables e non anularse o denominador.

En $x > 0$, a función é continua e derivable por ser polinómica.

Para que $f(x)$ sexa continua en $x=0$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-x}{e^x} = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = b = f(0)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Para que $f(x)$ sexa derivable en $x=0$

$$\left.\begin{array}{r} f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1-x}{e^x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-x-e^x}{xe^x} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-1-e^x}{e^x+xe^x} = -2 \\ f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+ax+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x+a) = a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

(*) É unha indeterminación da forma $\frac{0}{0}$ e aplicamos a regra de L'Hopital

54. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen(x^2)}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}+2senx}{2x\cos(x^2)} \underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}+2\cos x}{2\cos(x^2)-4x^2 sen(x^2)} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

55. ¿Podemos asegurar que la gráfica de la función $f(x)=3\,sen(x/2)-\cos(x^2)$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $[0,\pi]$? Razona la respuesta.

Solución:
La función f es continua en todo R (resta, composición, …. de continuas) . Entonces podemos aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $[0,\pi]$:

$$\left.\begin{array}{r} f\ continua\ en [0,\pi] \\ f(0)=-1<0 \\ f(\pi)=3-\cos(\pi^2)\approx 2.015>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in[0,\pi] / f(c)=0$$

56. Descompón el número 40 en dos sumandos tales que el producto del cubo de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. ¿Cuánto vale ese producto?

Solución:

$$\begin{cases} 40=x+y \\ f(x)=x^3\cdot y^2=x^3\cdot(40-x)^2=x^5-80x^4+1600x^3 \end{cases}$$

$$f'(x)=5x^4-320x^3+4800x^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=24 \\ x=40 \end{cases}$$

Los valores 0 y 40 quedan descartados, ya que el producto valdría 0, así pues la solución buscada debería ser x=24. Efectivamente:

$f''(24)=-46080 \Rightarrow máximo$

y el producto buscado es $24^3\cdot 16^2=3538944$

57. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que $y=ax^2+bx+1$ y $y=x^3+c$, tienen la misma recta tangente en el punto (1,2)

Solución:

Para que (1,2) esté en las dos gráficas se tiene que cumplir a+b+1=2 y c+1=2.

Si tienen la misma tangente entonces 2a+b =3.

Por tanto a, b y c deben cumplir:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ c=1 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

58.

a) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)=x^4-8x^2+1$. Calcula también el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo [-3,3].

b) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x)=ax^2+b\,x\ln x$ tenga un punto de inflexión en el punto (1,2). Para estos valores de a y b, calcula el dominio y los intervalos de concavidad y convexidad de f

Solución:

a)

$$f'(x)=4x^3-16x=4x\cdot(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$f''(x)=12x^2-16 \Rightarrow \begin{cases} f''(-2)=32>0 \\ f''(0)=-16<0 \\ f''(2)=32>0 \end{cases}$$

Por tanto f tiene mínimos relativos en (-2,-15) y (2,-15) y máximo relativo en (0,1)

$$\begin{cases} f(-3)=f(3)=10 \\ f(-2)=f(2)=-15 \\ f(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{máximos absolutos}(-3,10)\ y\ (3,10) \\ \text{mínimos absolutos}(-2,-15)\ y\ (2,-15) \end{cases}$$

b)

Si f tiene un punto de inflexión entonces $f''(x)=2a+\frac{b}{x}=0$ cuando x=1, por lo tanto $2a+b=0$

Por otra parte como el punto (1,2) está en la gráfica de la función 2=a.

Por lo tanto los valores buscados son **a=2** y **b=-4**

El dominio de f es $(0,+\infty)$ independientemente de los valorea a y b.

Como $f''(x)=4-\frac{4}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{4}{x}<4 \Leftrightarrow x>1$

(hay que observar que el dominio de f es $(0,+\infty)$, así que descartamos los puntos en que x<0)

La función es cóncava positiva o convexa en el intervalo $(1,+\infty)$ y cóncava negativa o cóncava en el intervalo $(0,1)$

59. Determina los valores de a para que la función $f:\Re\to\Re$ $f(x)=\begin{cases} a-x^2 & si\ x\leq 1 \\ \frac{2}{ax} & si\ x>1 \end{cases}$ sea continua. ¿Es derivable en x=1 para algún valor de a?

Solución:

- $f(x)$ é continua en $x < 1$, por ser polinómica.
- Se $a \neq 0$, $f(x)$ é continua en $x > 1$ por ser racional e non anularse o denominador.
- Estudo da continuidade en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = a - 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2/a \\ f(1) = a - 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sexa continua en } x = 1, \text{ debe ser} \\ a - 1 = 2/a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ ou } a = 2 \end{array}$$

Polo tanto, $\boxed{f(x)\ \text{é continua se}\ a = -1\ \text{ou}\ a = 2}$

Se unha función é derivable nun punto, necesariamente é continua nel. Polo tanto, para estudar a derivabilidade en $x = 1$, só teremos que facelo cando $a = -1$ ou $a = 2$

Caso: $a = -1$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & se\ x < 1 \\ 2/x^2 & se\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = \ \ 2 \end{array} \Rightarrow \text{Non é derivable en } x = 1.$$

Caso: $a = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & se\ x < 1 \\ -1/x^2 & se\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = -1 \end{array} \Rightarrow \text{Non é derivable en } x = 1$$

Polo tanto, $\boxed{f(x)\ \text{non é derivable en}\ x = 1\ \text{para ningún valor de}\ a}$.

60. Si c>2, calcula los valores de a, b, c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si\ x < 2 \\ x + 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ **cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo** $[0, c]$

Solución:

$f(x)$ é continua en $[0,2)$ e $(2, c]$ por ser polinómica nos dous intervalos.

Continuidade en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 + 2a + b \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 \\ f(2) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + 2a + b = 3 \Rightarrow 2a + b = -1$$

$f(x)$ é derivable en $(0,2)$ e $(2, c)$ por ser polinómica nos dous intervalos.

Derivabilidade en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + a = 1$$

Por outra parte $f(0) = f(c) \Rightarrow b = c + 1$

Temos así tres ecuacións con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = -1 \\ 4 + a = 1 \\ b - c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = -3}; \boxed{b = 5}; \boxed{c = 4}$$

61. Calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

Solución:

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$$

$$x^2+1>0 \Rightarrow \boxed{f(x)\ non\ ten\ asíntotas\ verticais}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}=1 \Rightarrow \boxed{y=1\ é\ asíntota\ horizontal},\ \boxed{f(x) non\ ten\ asíntotas\ oblicuas}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x^2+1)-2x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

Como $(x^2+1)^2>0$, o signo de $f'(x)$ coincide co signo do numerador da fracción anterior. Así:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	>0	<0	>0
$f(x)$	crecente	decrecente	Crecente

⇒

A función é crecente nos intervalos $(-\infty,-1)$ e $(1,\infty)$. A función é decrecente no intervalo $(-1,1)$.

62.

a) ¿Tiene la ecuación $x^3+2x-2=0$ alguna solución en el intervalo (0,1)? ¿Tiene esta ecuación más de una solución real?

b) Calcula los valores de a y b para que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)}=1$

Solución:

a)

Consideremos a función real de variable real $f(x)=x^3+2x-2$

$f(x)$ é continua en $[0,1]$ xa que é continua en $\mathbb{R}$ por ser unha función polinómica.
$f(0)=-2<0$
$f(1)=1>0$

$\Rightarrow$ $\exists\, c\in(0,1)$ tal que $f(c)=0$

teorema de Bolzano

Polo tanto, $\boxed{a\ ecuación\ x^3+2x-2=0, ten\ unha\ solución\ real\ no\ intervalo\ \in(0,1).}$

Se $f(x)$ tivese dúas raíces reais c_1 e c_2 entón

$f(x)$ continua en $[c_1,c_2]$ e derivable en (c_1,c_2) por ser continua e derivable en $\mathbb{R}$
$f(c_1)=0=f(c_2)$

teorema de Rolle

$\Rightarrow$ $\exists\, d\in(c_1,c_2)$ tal que $f'(d)=0$
(a función derivada tería unha raíz real)

pero a función derivada, $f'(x)=3x^2+2$, non ten raíces reais. Polo tanto:

$$\boxed{x^3+2x-2=0, ten\ unha\ única\ solución\ real\ e\ esa\ solución\ está\ no\ intervalo\ (0,1).}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b-2e^{2x}}{2x\cos(x^2)}=\frac{b-2}{0}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

Para que este límite sexa finito, ten que ser $\boxed{b=2}$.

Tomando $b = 2$, resulta

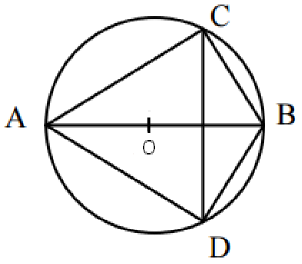
$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax+2-2e^{2x}}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{2a-4e^{2x}}{2x\cos(x^2)-4x^2 sen(x^2)} = \frac{2a-4}{2}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

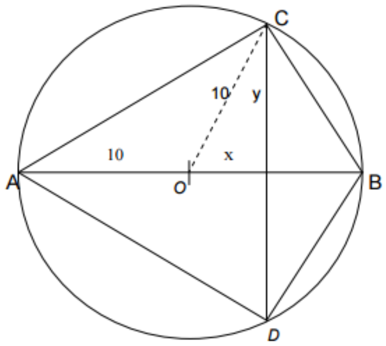
Entón

$\frac{2a-4}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

63. En una circunferencia de centro O y radio 10 cm se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC e BCD sea máxima?



<u>Solución</u>:



Triángulo ADC:
Base: $2y$
Altura: $10 + x$

$Área = y(10 + x)$

Triángulo BCD:
Base: $2y$
Altura: $10 - x$

$Área = y(10 - x)$

Diferencia de áreas:

$A_1 - A_2 = y(10+x) - y(10-x) = 2xy$

O teorema de Pitágoras proporciónanos unha relación entre x e y :

$y = \sqrt{10^2 - x^2}$

Polo tanto, a función a maximizar que nos proporciona a diferencia de áreas é:

$f(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}$

Calculamos os valores que anulan a primeira derivada

$$f'(x) = 2\sqrt{100-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}};\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(100-x^2) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow\ x = \pm 5\sqrt{2}$$

Comprobamos que $x = 5\sqrt{2}$ corresponde a un máximo:

$$f''(x) = -\frac{2x}{\sqrt{100-x^2}} - \frac{4x\sqrt{100-x^2}+\frac{2x^3}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2};\quad f''(5\sqrt{2}\,) = -\frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} - \frac{200+100}{50} = -8 < 0$$

$$\boxed{Solución{:}\ 5\sqrt{2}\ cm.}$$

64. Dada la función $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & si\ x<0 \\ x^2 e^{-x} & si\ x\geq 0 \end{cases}$ **se pide;**

a) Calcula $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **y** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) Calcula el valor de a para que f **sea continua en todo** $\Re$

c) Estudiar la derivabilidad de f **y calcular** f' **donde sea posible**

Solución:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} a+\ln(1-x) = a+\ln(1+\infty) = a+\infty = +\infty$$

b)

f continua en $(-\infty,0)$ (suma, resta, composición … de continuas)

f continua en $(0,+\infty)$ (producto de continuas)

$$f\ continua\ en\ 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a=0$$

Entonces f es continua en R si y sólo si a=0

c)

f es derivable en R-{0}, siendo la función derivada:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{(1-x)} & si\ x<0 \\ 2x\,e^{-x}-x^2 e^{-x} & si\ x>0 \end{cases}$$

para que f sea derivable en x=0 es necesario que a=0 y además

$$\left(\frac{-1}{1-x}\right)(0)=(2x\,e^{-x}-x^2 e^{-x})(0) \Leftrightarrow -1=0$$

Por tanto f no es derivable en 0 independientemente del valor de a

65. Sea la función $f(x)=2\sqrt{x}$

a) Hallar su dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el punto de la gráfica de f(x) más cercano al punto (4,0)

Solución:

a)

El dominio de la función es $[0,+\infty)$

Para estudiar el crecimiento estudiamos el signo de la derivada $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

como $f'(x)>0;\ \forall x\in(0,+\infty)$ entonces f crece en $[0,+\infty)$

b)

Los puntos de la gráfica de f son de la forma $P=(x,2\sqrt{x})$. Si calculamos la distancia de P al punto (4,0) obtenemos

$$d=\sqrt{(x-4)^2+4x}=\sqrt{x^2-4x+16}$$

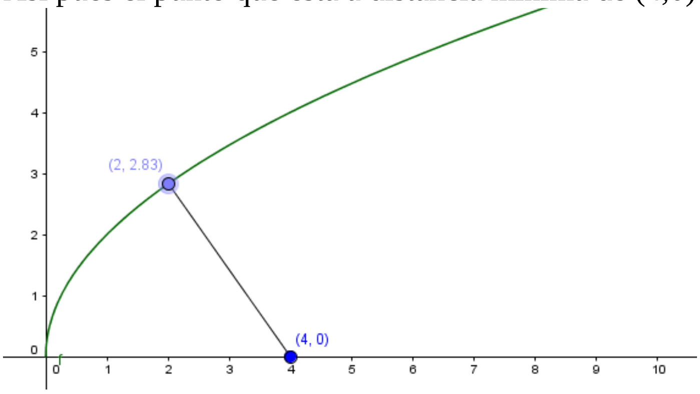
Así pues, tenemos expresada la distancia en función de x. Ahora tan solo tenemos que encontrar el mínimo de la función.

$$d'(x)=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}}$$

Como el denominador es siempre positivo, entonces $d'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ además es fácil estudiar el signo de d'

x	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
d'(x)	-	+

Así pues el punto que está a distancia mínima de (4,0) es el $(2,2\sqrt{2})$



66. Calcula

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{senx}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+1}$

<u>Solución</u>:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{senx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\cdot senx}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\cdot senx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\cdot senx}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen\,x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen\,x}=\underset{\text{L'Hopital}}{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}=1$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+1}{x+3}-1\right)^{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-2}}\right)^{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{x+3}{-2}\cdot\frac{-2}{x+3}(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-2}{x+3}}=e^{-2}$$

67. Dada la función $f(x)=x^x-2^x+x-1$ demuestra que existen $\alpha,\beta\in(1,2)$ tales que $f(\alpha)=0$ y $f'(\beta)=3$. Di que teoremas utilizas.

<u>Solución</u>

La función f es continua en $(0,+\infty)$ (suma, resta de exponenciales y polinómicas) entonces podremos aplicar el teorema de Bolzano en (1,2)

$$\left.\begin{array}{c} f\ continua\ en\,[1,2] \\ f(1)=-1 \\ f(2)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists\,\alpha\in(1,2)\,/\,f(\alpha)=0$$

Si derivamos f:
para obtener la derivada de $h(x)=x^x$ hemos de derivar la función $\ln(h(x))$:

$$[\ln(h)]'=\frac{h'}{h}=(x\cdot ln\,x)'=(\ln x+1)\Rightarrow h'(x)=h(x)\cdot(\ln x+1)=x^x\cdot(lnx+1)$$

entonces

$f'(x)=x^x\cdot(\ln x+1)-\ln 2\cdot 2^x+1$

es una función continua en $(0,+\infty)$ y en particular en (1,2) entonces podemos aplicar el teorema de los valores intermedios de Darboux:

$$\left.\begin{array}{c} f'\ continua\ en\,[1,2] \\ f'(1)\approx 0{,}6137 \\ f'(2)=5 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists\beta\in(1,2)\,/\,f(\beta)=3$$

68. Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demuestra que las curvas $y=\cos x$ e $y=\sqrt{x}$ se cortan en un único punto.

Solución:

Como $\sqrt{x}$ es una función creciente en $[0,+\infty)$ y $\sqrt{1}=1$ entonces $\sqrt{x}>1\ \forall\, x\in(1,+\infty)$ si a esto le añadimos que $\cos x\leq 1\ \forall\, x\in\Re$ entonces los posibles puntos de corte han de estar en el intervalo (0,1).

Que las curvas se corten es equivalente a que la función $h(x)=\cos x-\sqrt{x}$ sea igual a 0

$$\left.\begin{array}{l} h\ es\ continua\ en\,[0,1]\quad (resta\ de\ continuas) \\ h(0)=1 \\ h(1)\approx -0{,}4597 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists\, c\in(0,1)\,/\,h(c)=0$$

Th Bolzano

Veamos ahora que la solución es única. Para ello supondremos que existe otro punto $d\in(0,1)\,/\,f(d)=0$

Entonces podríamos aplicar el teorema de Rolle en el intervalo (c,d) (o (d,c) según cual sea mayor)

$$\left.\begin{array}{l} h\ es\ continua\ en\,[c,d] \\ h\ es\ derivable\ en\,(c,d) \\ h(c)=0=h(d) \end{array}\right\}\Rightarrow \exists k\in(c,d)\,/\,h'(k)=0$$

ahora bien, $h'(x)=-sen\,x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ con lo que $h'(k)=0\Rightarrow sen\,k=\dfrac{-1}{2\sqrt{k}}$ y esto no es posible, ya que $k\in(0,1)\Rightarrow sen\,k>0$ y $k\in(0,1)\Rightarrow -\dfrac{1}{2\sqrt{k}}<0$

Como hemos llegado a una contradicción hemos probado que sólo hay un valor que verifica h(c)=0

69. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x-x^2 & si\ \ 0\leq x\leq 1 \\ (x-1)\ln^2(x) & si\ \ 1<x\leq 2 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f(x) en x=1

b) Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa $x=\dfrac{3}{4}$

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x-x^2=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\ln^2(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f\ continua\ en\ x=1$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \overset{\text{f continua en x=1}}{=} (x-x^2)'(1)=(1-2x)'(1)=-1 \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \underset{\text{f continua en x=1}}{=} \left((x-1)\ln^2(x)\right)'(1)=\left(\ln^2(x)+\dfrac{(x-1)\cdot 2\ln x}{x}\right)(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f\ no\ es\ derivable\ en\ x=1$$

b)

$$\left.\begin{array}{c} f'(3/4)=(x-x^2)'(3/4)=(1-2x)(3/4)=1-3/2=-1/2 \\ f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{3}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} La\ tangente\ es: \\ y-\dfrac{3}{16}=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(x-\dfrac{3}{4}\right) \end{array}$$

70. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{sen\, x\cdot(1-sen\, x)}{\cos^2 x}$

<u>Solución</u>:

a) $$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\right)\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=$$

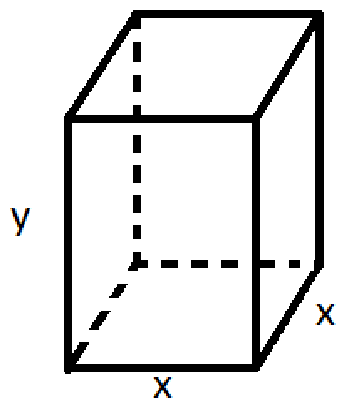
$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{1}{8}$$

b)

$$\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{sen\, x\cdot(1-sen\, x)}{\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{sen\, x-sen^2 x}{\cos^2 x}\overset{\text{L' Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x-2\, sen\, x\cdot\cos x}{-2\cos x\cdot sen\, x}=\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1-2\, sen\, x}{-2\cdot sen\, x}=\frac{1-2}{-2}=\frac{1}{2}$$

72. Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 m^3 de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que:

- El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado
- El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado



¿Qué dimensiones debe tener el depósito? ¿Cuál es el precio de dicho depósito?

<u>Solución</u>:

$$Volumen = y \cdot x^2 = 1000\, m^3 \Rightarrow y = \frac{1000}{x^2}$$

$$Coste = 4 \cdot 100 \cdot xy + 200\, x^2 \Rightarrow Coste(x) = \frac{4 \cdot 10^5}{x} + 200\, x^2$$

$$Coste'(x) = \frac{-4 \cdot 10^5}{x^2} + 400\, x$$

$$Coste'(x) = 0 \Leftrightarrow 400\, x^3 = 4 \cdot 10^5 \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 10\, m} \\ \boldsymbol{y = 10\, m} \end{cases}$$

$$Coste''(x) = \frac{8 \cdot 10^5}{x^3} + 400 \Rightarrow Coste''(10) = 1200 > 0 \Rightarrow mínimo$$

$$Coste(10) = \frac{4 \cdot 10^5}{10} + 200 \cdot 10^2 = \mathbf{60000\ €}$$

73.