Análisis - Parte I

Límite de una función en un punto:

La idea intuitiva de límite consiste en que cuánto más cercano sea el valor x al punto a, más próxima va a estar la imagen, f(x), al valor límite L. Para formalizar este concepto, en matemáticas se utiliza la siguiente definición:

Definición

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga al punto p, se dice que $L \in \Re$ es el límite de la función en p:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \{ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \}}$$

Dicho de otra manera, para cualquier entorno de L, $E_L = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ podemos encontrar un entorno de a, $E_a = (a-\delta, a+\delta)$ de tal modo que $f(E_a) \subset E_L$

También es posible formalizar el concepto de límite por la izquierda incorporando en la definición la restricción a valores menores que a:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \{ |x-a| < \delta \ \wedge x < a \} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \right\}$$

y lo mismo por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \{ |x-a| < \delta \ \wedge x > a \} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \right\}$$

Límite de una función el en infinito

Definición

Decimos que $L \in \Re$ es el límite de la función f cuando x tiende a infinito, si se cumple:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \Re / \quad x > k \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \right\}$$

es decir, para estar suficientemente cerca del límite solo hay que elegir un x suficientemente grande.

Análogamente se define el límite cuando x tiende a menos infinito:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \Re / \quad x < k \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \right\}$$

Función Continua en un punto

Definición

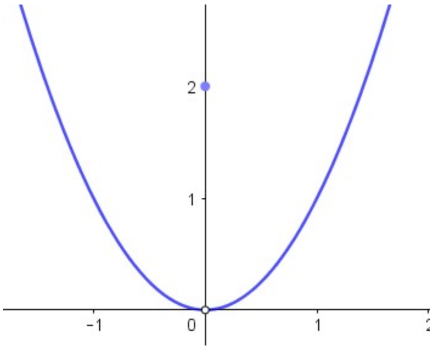
Se dice que la función f es continua en el punto x_0, si se cumplen estas tres condiciones:

$\exists f(x_0)$, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

En la práctica, hay que comprobar $\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)}$

Discontinuidades

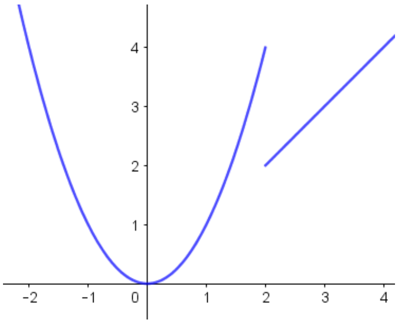
Si $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, pero $\nexists f(x_0)$ o bien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, se dice que la **discontinuidad** es **evitable**.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\, x \neq 0 \\ 2 & si\, x = 0 \end{cases}$$

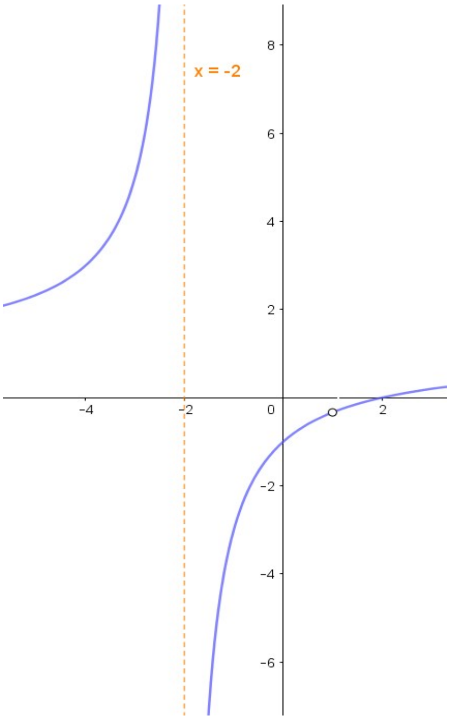
(discontinuidad evitable en x=0)

Mientras que si $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ o este es infinito, decimos que la **discontinuidad** es **inevitable**.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\, x \leq 2 \\ x & si\, x > 2 \end{cases}$$

(discontinuidad inevitable en x=2)



$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$$

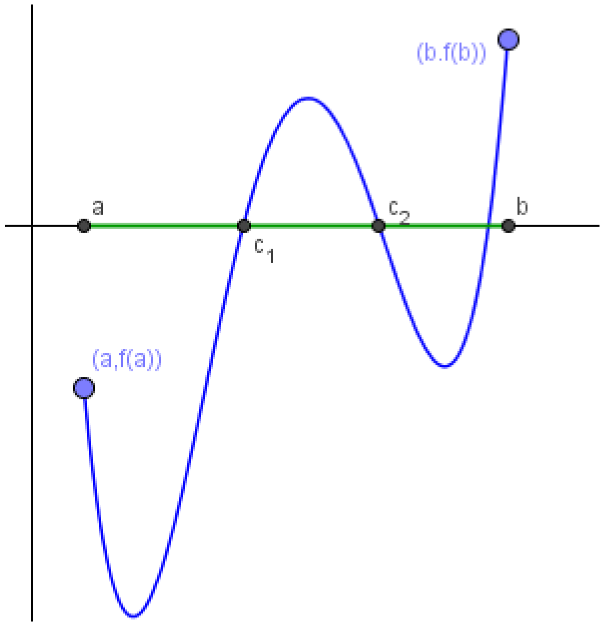
(discontinuidad inevitable en x=-2 y discontinuidad evitable en x=1)

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo $[a\,,\,b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, es decir $f(a)\cdot f(b)< 0$ entonces existe por lo menos un punto $c\in(a\,,\,b)$ tal que $f(c)=0$

$$\left.\begin{matrix} f\ \textit{continua en}\,[a\,,\,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\exists\, c\in(a\,,\,b)\ /\ f(c)=0\}$$

Interpretación Geométrica:



Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a\,,\,b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo, entonces la gráfica de la función corta al eje X al menos en un punto del intervalo $(a\,,\,b)$

Teorema de los valores intermedios (teorema de Darboux)

Si f es continua en $[a\,,\,b]$, entonces toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$

Teorema de Weierstrass

Si f es continua en $[a\,,\,b]$, entonces f tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo

$$f\ \textit{continua en}\,[a\,,\,b] \Rightarrow \exists\, c\,,\,d\in[a\,,\,b]\ /\ \forall\ x\in[a\,,\,b]\,,\ f(c)\leq f(x)\leq f(d)$$

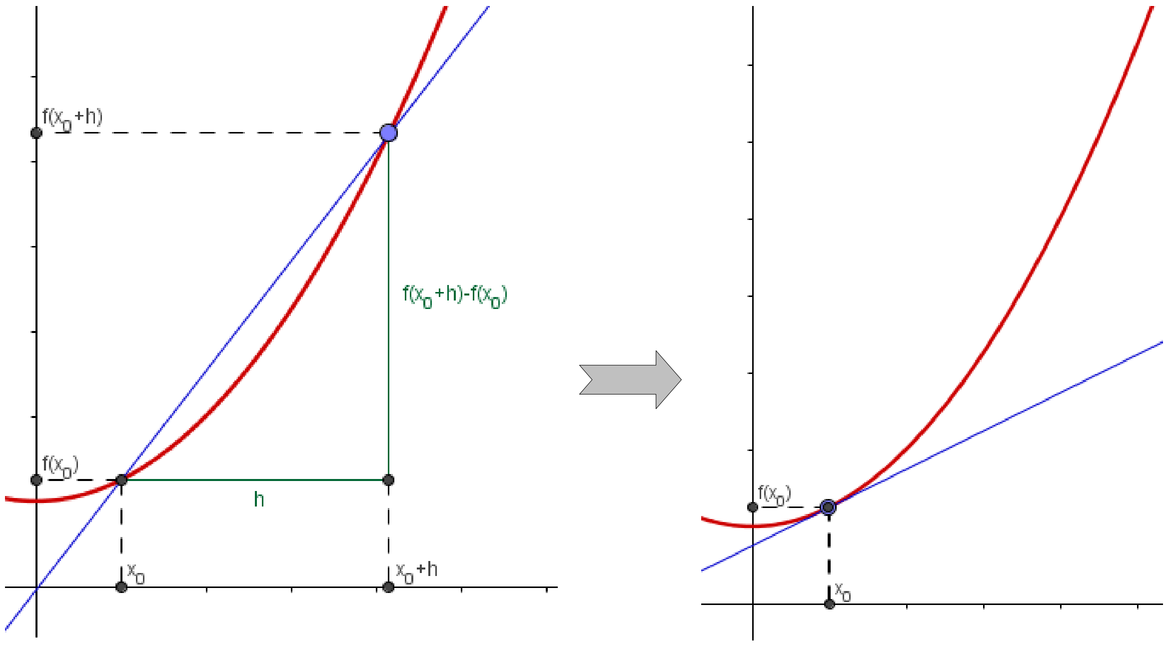
Derivada de una función en un punto

Se define la derivada de una función en un punto mediante el siguiente límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{o equivalentemente} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interpretación geométrica de la derivada

El cociente $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ coincide con el valor de la pendiente de la recta que corta a la gráfica en los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$. A medida que h se aproxima a 0, los dos puntos se juntan y la recta secante se aproxima cada vez más a la tangente. Así pues el límite de $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ será la **pendiente de la recta tangente a la gráfica** de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$



Continuidad de las funciones derivables

$$\text{Si } \exists f'(x_0) \text{ entonces } f \text{ es continua en } x_0$$

El razonamiento consiste en : $\{f \text{ continua en } x_0\} \Leftrightarrow \{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\}$

y como

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

Operaciones con derivadas

Si f y g son funciones derivables en x_0 , entonces se cumple:

1. $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
2. $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$
3. $(k\cdot f)'(x_0)=k\cdot f'(x_0) \qquad k\in\Re$
4. $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$
5. $(f/g)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ siempre que $g(x_0)\neq 0$

Regla de la cadena

Si la función f es derivable en x_0 y la función g lo es en $f(x_0)$ entonces la composición de funciones $g\circ f$ también es derivable en x_0 de tal forma que:

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

Función derivada

Definición

Se conoce como función derivada f' a la función que asocia a cada punto x el valor de la derivada de la función f en x

Tabla de derivadas

A continuación se muestran las derivadas para las funciones elementales:

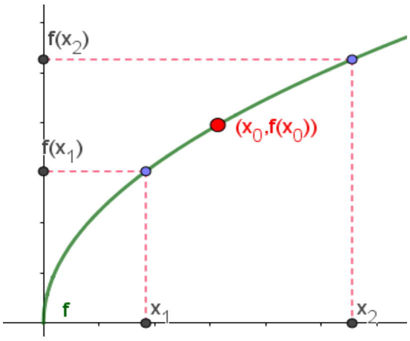
$f(x)=x^n \quad\Rightarrow\quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$f(x)=\sqrt[n]{x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x)=e^x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=e^x$	$f(x)=\ln x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=a^x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=a^x\cdot\ln a\ ;\ a\in\Re$	$f(x)=\log_a x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}\ ;\ a\in\Re$
$f(x)=sen\,x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\cos x$	$f(x)=arcsen\,x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-sen\,x$	$f(x)=\arccos x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$f(x)=\arctan x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Crecimiento

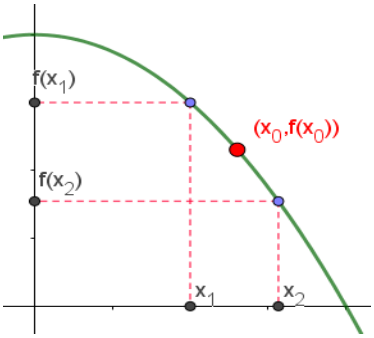
Definición

Decimos que una función es **creciente** en un punto x_0, si existe un entorno de x_0 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ en el que se cumplen las siguientes condiciones

$$\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon), \quad \{x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)\} \wedge \{x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x)\}$$



f creciente en x_0



f decreciente en x_0

Del mismo modo definimos una función decreciente en x_0

$$\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon), \quad \{x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)\} \wedge \{x_0 < x \Rightarrow f(x_0) > f(x)\}$$

Relación entre crecimiento y derivada

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ creciente en } x_0 \ \Rightarrow \ f'(x_0) \geq 0 \\ f \text{ decreciente en } x_0 \ \Rightarrow \ f'(x_0) \leq 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x_0) > 0 \ \Rightarrow f \ \text{ creciente en } x_0 \\ f'(x_0) < 0 \ \Rightarrow f \ \text{ decreciente en } x_0 \end{array}}$$

Observación:

Un ejemplo de función creciente en un punto cuya derivada vale cero es $f(x)=x^3$,cuando $x=0$

Derivada segunda y concavidad

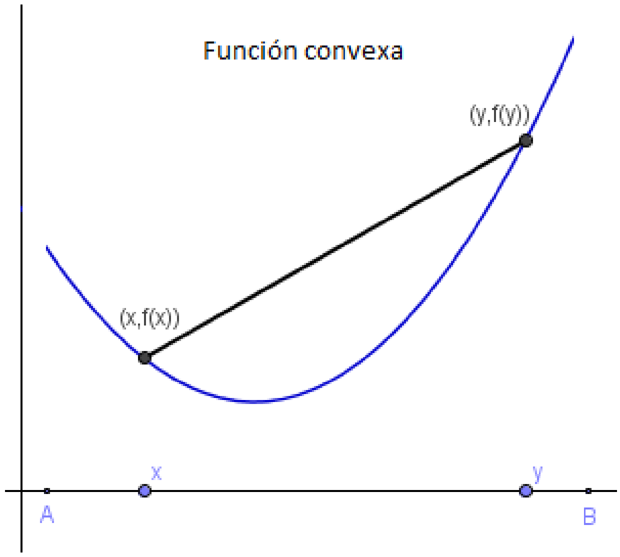
Derivada segunda

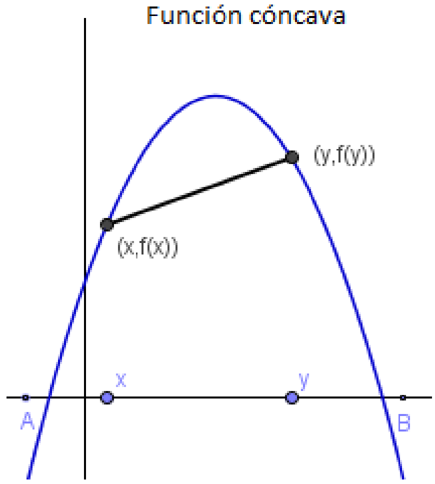
La derivada segunda de una función f en x_0 se define como la derivada de la función derivada f' en x_0, es decir $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$

Nótese que para que exista la derivada segunda en x_0, f debe ser derivable en un entorno de x_0

Concavidad y convexidad

Una función se dice que es **cóncava positiva o convexa** en un intervalo (a, b) si para todo par de números $x, y \in (a, b)$ el segmento que une los puntos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ está por encima de la gráfica de la función.





De la misma manera, una función se dice que es **cóncava negativa o cóncava** en un intervalo (a, b) si para todo par de números $x, y \in (a, b)$ el segmento que une los puntos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ está por debajo de la gráfica de la función.

Diremos que la función f es convexa en x_0 si lo es en un entorno de x_0

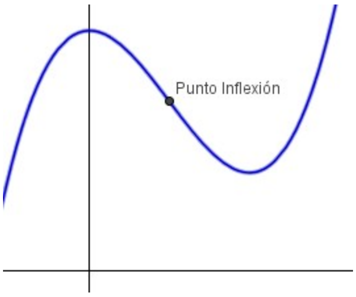
$$f \text{ convexa en } x_0 : \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, f \text{ es convexa en } (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Del mismo modo se define una función cóncava en x_0

$$f \text{ cóncava en } x_0 : \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, f \text{ es cóncava en } (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Puntos de inflexión

Se conocen como puntos de inflexión aquellos donde la función cambia de concavidad (de cóncava a convexa o viceversa)



Relación entre derivada segunda y concavidad

Si existe derivada segunda en x_0, entonces:

$f \text{ convexa en } x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$	$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ convexa en } x_0$
$f \text{ cóncava en } x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$	$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ cóncava en } x_0$

Máximos y mínimos relativos

Definición

f *tiene un máximo relativo en* x_0	$:\Leftrightarrow$	$\exists\, \delta > 0 \,/\, \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ f(x_0) > f(x)$
f *tiene un mínimo relativo en* x_0	$:\Leftrightarrow$	$\exists\, \delta > 0 \,/\, \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ f(x_0) < f(x)$

Relación entre extremos relativos y derivada

Si f es derivable en x_0 entonces

f *tiene un máximo relativo en* x_0	$\Rightarrow$	$f'(x_0) = 0$
f *tiene un mínimo relativo en* x_0	$\Rightarrow$	$f'(x_0) = 0$

Demostración

Utilizando el método de reducción al absurdo:

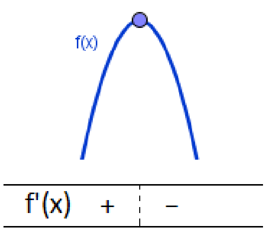
Suponemos que f tiene un máximo relativo en x_0 pero $f'(x_0) \neq 0$, entonces o bien $f'(x_0) > 0$ o bien $f'(x_0) < 0$, lo cual implicaría, en el primer caso, que f es creciente o que f es decreciente en el segundo y por tanto no puede haber máximo en x_0. Como esto es una contradicción, la única opción es que $f'(x_0) = 0$

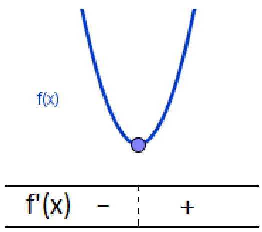
Búsqueda de extremos relativos

En una función derivable, la búsqueda de extremos relativos se basa en el estudio de aquellos puntos donde la derivada vale cero, conocidos como **puntos críticos**
$\left(\boldsymbol{x_0}\ \textbf{\textit{punto crítico}} \Leftrightarrow \boldsymbol{f'(x_0) = 0}\right)$

Método 1: Estudiar el signo de la derivada

Si f es una función continua, entonces en los puntos donde la derivada cambie de signo habrá un máximo o un mínimo relativo. Esto se justifica debido a la relación entre derivada y crecimiento.





Hay que observar que en este método no es necesario que f sea derivable en el extremo, aunque sí es necesario que sea continua, por ejemplo $f(x) = |x|$ no es derivable en el 0

Método 2: Ceros de la derivada y signo de la derivada segunda

Este método se basa que en los extremos relativos la derivada (si la hay) vale cero y además la función es cóncava en los máximos y convexa en los mínimos, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un máximo en } x_0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo en } x_0$$

Observación: si resulta que $f''(x_0)=0$ entonces podemos calcular las derivadas sucesivas en x_0, siendo n el grado de la primera derivada distinta de cero
$f'(x_0)=0, f''(x_0)=0, \quad . \; . \; . \quad f^{n-1)}(x_0)=0\ , f^{n)}(x_0)\neq 0$

Entonces:

- Si n es impar f tiene un punto de inflexión en x_0
- Si n es par y $f^{n)}(x_0)>0$ entonces f tiene un mínimo en x_0
- Si n es par y $f^{n)}(x_0)<0$ entonces f tiene un máximo en x_0

Por ejemplo, x^3 tiene un punto de inflexión en 0, mientras que x^4 tiene un mínimo en 0

Teorema de Rolle

Si f es una función continua en el intervalo $[a\ ,b]$, derivable en $(a\ ,b)$ y además $f(a)=f(b)$, entonces existe, al menos, un valor $c\in(a\ ,b)$ en el que la derivada vale cero, $f'(c)=0$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua en } [a\ ,b] \\ f \text{ derivable en } (a\ ,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in(a\ ,b)\ /\ f'(c)=0$$

Demostración

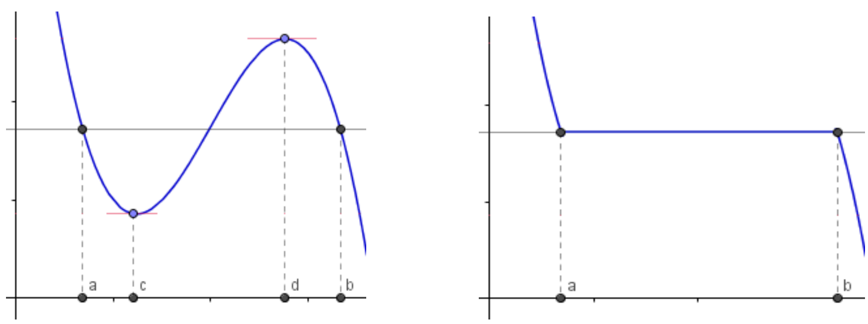
Como f es continua en $[a\ ,b]$, f tiene que alcanzar máximo y un mínimo y mínimo absoluto para algún valor del intervalo $[a\ ,b]$, llamémosles “c” al valor donde alcanza el mínimo y “d” al máximo.

Existen dos opciones:

- c ó d están en el interior del intervalo. En este caso el extremo además de ser absoluto también será relativo y por tanto su derivada valdrá cero.
- c y d están en los extremos del intervalo, es decir c=a y d=b o viceversa. En este caso, como $f(a)=f(b)$, tendríamos que $f(c)=f(d)$, es decir el máximo absoluto toma el mismo valor que el mínimo absoluto. Esto sólo puede ocurrir si la función es constante, y por tanto la derivada valdría cero en todo punto del intervalo $(a\ ,b)$

Interpretación Geométrica

Si f es una función continua en el intervalo $[a\ ,b]$, derivable en $(a\ ,b)$ y además $f(a)=f(b)$, entonces existe, al menos, un valor $c\in(a\ ,b)$ tal que la tangente a la gráfica en el punto $(c\ ,f(c))$ sea paralela al eje X

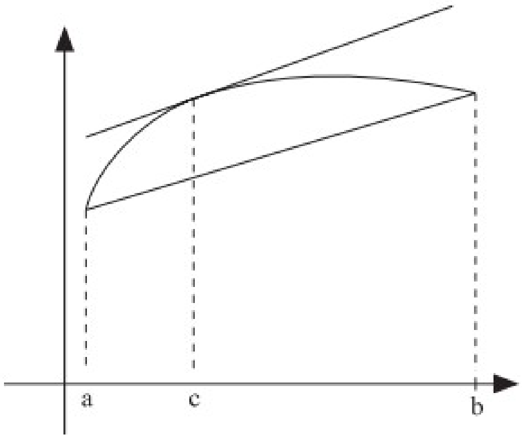


Teorema del valor medio del cálculo diferencial

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a, b) \,/\, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica

La expresión $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$. Por tanto la interpretación geométrica del valor medio consiste en que si tenemos una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existirá un punto $c \in (a, b)$, de tal forma que la tangente a la gráfica en el punto $(c, f(c))$ será paralela al segmento que une los puntos $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$



Demostración

La recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tendrá como ecuación

$r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$ (ecuación punto pendiente)

Definimos entonces la función $g(x) = f(x) - r(x)$ (diferencia entre función y recta).

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$$

Esta función será continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además $g(a) = g(b) = 0$

Estamos pues en condiciones de aplicar el teorema de Rolle a la función g en el intervalo $[a, b]$.

Por tanto existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Ahora bien

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

y por tanto

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema del valor medio de Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} f\ ,\ g\ continuas\ en\left[a\ ,\ b\right] \\ f\ ,\ g\ derivables\ en\left(a\ ,\ b\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\ c\in(a\ ,b)\ /\ f\ '(c)\cdot[g(b)-g(a)]=g\ '(c)\cdot[f(b)-f(a)]$$

Demostración:

Este teorema se demuestra aplicando el teorema de Rolle a la función:

$h(x)=f(x)\cdot[g(b)-g(a)]-g(x)\cdot[f(b)-f(a)]$ ya que:

- h es continua
- h es derivable
- $h(a)=f(a)\cdot g(b)-g(a)\cdot f(b)=h(b)$

Entonces $\exists\ c\in(a\ ,b)\ /\ h'(c)=f\ '(c)\cdot[g(b)-g(a)]-g\ '(c)\cdot[f(b)-f(a)]$ y por tanto

$f\ '(c)\cdot[g(b)-g(a)]=g\ '(c)\cdot[f(b)-f(a)]$

Regla de L' Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de a , E_a , tal que:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $g(x)\neq 0\ \forall\ x\in E_a$ y existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\ '(x)}{g\ '(x)}$, entonces se cumple

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\ '(x)}{g\ '(x)}$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f\ y\ g\ derivables\ en\ E_a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0 \\ g(x)\neq 0\ \forall\ x\in E_a \\ \exists\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\ '(x)}{g\ '(x)}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f\ '(x)}{g\ '(x)}}$$

Demostración:

La regla de L' Hôpital se demuestra por límites laterales, utilizando el teorema del valor medio de Cauchy en [x, a] y en [a, x] entonces existe un punto c en ese intervalo tal que

$f\ '(c)\cdot[g(x)-g(a)]=g\ '(c)\cdot[f(x)-f(a)]$

y como $g(x)\neq g(a)$ y $f(x)=g(x)=0$ tenemos que

$\dfrac{f\ '(c)}{g\ '(c)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

por tanto, si tenemos en cuenta que $x\to a\Rightarrow c\to a$ hemos demostrado que

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\ '(x)}{g\ '(x)}$

Observaciones

- La regla de L' Hôpital es una potente herramienta para resolver indeterminaciones del tipo 0/0. No obstante también sirve para resolver otro tipo de indeterminaciones, como ∞/∞ :

$$\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{0}{0}\quad\text{entonces}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f^2(x)}{g^2(x)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\frac{(f')^2(x)}{(g')^2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  Así pues, la regla de L' Hôpital también puede aplicarse a indeterminaciones ∞/∞

- Aunque la regla de L' Hôpital que hemos visto es valida en límites del tipo $x\to a\ ;\ a\in\Re$, la demostración puede adaptarse para límites del tipo $x\to\pm\infty$ así como a límites laterales.