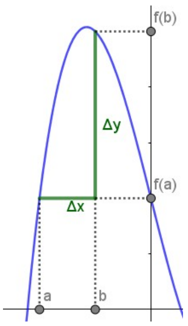
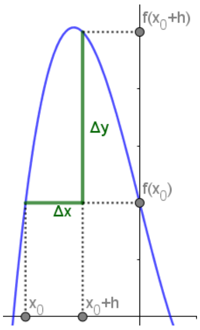
Índice

Tema 7 – Derivadas

Tasa de variación en un intervalo

La tasa de variación media de una función en el intervalo [a,b] se define como el aumento del valor de la función, dividido entre la longitud del intervalo.





Así pues, la tasa de variación media en el intervalo [a,b] se calculará:

$$\boxed{TVM[a,b]=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Si al intervalo le llamamos $[x_0 , x_0+h]$, la tasa de variación media queda:

$$TVM[x_0,x_0+h]=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ (nótese que h es la longitud del intervalo).

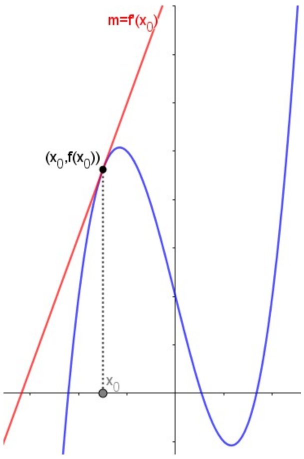
Derivada de una función en un punto

Se define la derivada de la función f en el punto x_0 como:

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

La derivada viene siendo el límite de la tasa de variación en un intervalo, cuando la longitud de dicho intervalo tiende a cero. Así pues, la derivada se considera una **tasa de variación instantánea**.

Geométricamente, la derivada también se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0 , f(x_0))$



Función derivada

La función derivada, f', asigna a cada punto el valor de su derivada.

f': a → f'(a)

<u>Ejemplo</u>:

La función derivada de de $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$ (más adelante veremos como calcular derivadas). Con lo cual si queremos calcular la derivada de la función f en x=3, tan solo tenemos que sustituir en la función derivada: $f'(3)=2\cdot3=6$.

Nótese que el conocer la función derivada nos evita tener que calcular el límite en cada caso (lo cual suele ser bastante laborioso).

A partir de aquí nos centraremos en cómo calcular funciones derivadas.

Tabla de derivadas

A continuación se muestran las derivadas para las funciones elementales:

$f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$f(x)=\sqrt[n]{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x)=e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=e^x$	$f(x)=\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=a^x\cdot\ln a\ ;\ a\in\Re$	$f(x)=\log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}\ ;\ a\in\Re$
$f(x)=sen\ x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\cos x$	$f(x)=arcsen\ x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-sen\ x$	$f(x)=\arccos x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\tan x \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$f(x)=\arctan x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Reglas de derivación

- Suma:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

Ejemplo: $f(x)=x^2+\sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Resta:

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$$

Ejemplo: $f(x)=x^2-x \;\Rightarrow\; f'(x)=2x-1$

- Multiplicación/división por una constante:

$$(k\cdot f)'(x)=k\cdot f'(x)$$

Ejemplos: $f(x)=3x^2 \;\Rightarrow\; f'(x)=3\cdot 2x=6x$; $g(x)=\frac{x^2}{3} \;\Rightarrow\; g'(x)=\frac{2x}{3}$

- Multiplicación de funciones:

$$\boxed{(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$$

Ejemplo: $f(x)=\sqrt{x}\cdot(3x^2+1) \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(3x^2+1)+\sqrt{x}\cdot 6x$

- División de funciones:

$$\boxed{(f/g)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Ejemplo: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{sen\,x} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot sen\,x-\sqrt{x}\cdot\cos x}{(sen\,x)^2}$

- Composición de funciones (regla de la cadena):

$$\boxed{(f\circ g)'(x)=[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

Ejemplos:

→ $f(x)=\sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x$

→ $f(x)=\ln(3x+2) \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{3x+2}\cdot 3$

→ $f(x)=2^{x^2-3x} \Rightarrow f'(x)=(\ln 2)\cdot 2^{x^2-3x}\cdot(2x-3)$

→ $f(x)=\log_2(x^2-1) \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{\ln 2\cdot(x^2-1)}\cdot 2x$

Derivación de funciones $h(x)=f(x)^{g(x)}$

- Tomamos logaritmos: $\ln h(x)=\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)$
- Aplicamos propiedad de logaritmos: $\ln h(x)=g(x)\cdot\ln(f(x))$
- Derivamos las dos partes de la igualdad:

$$\frac{1}{h(x)}\cdot h'(x)=g'(x)\cdot\ln(f(x))+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

- Despejamos h':

$$h'(x)=h(x)\cdot\left[g'(x)\cdot\ln(f(x))+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right]$$

- Sustituimos h

$$h'(x)=f(x)^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot\ln(f(x))+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right]$$

<u>Ejemplo</u>:

Queremos derivar la función $f(x)=(sen\,x)^{2x}$

$$\log f(x)=2x\cdot\log(sen\,x)$$

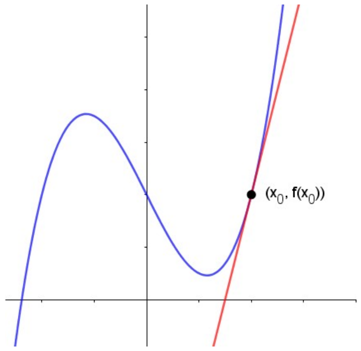
$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=2\log(sen\,x)+2x\cdot\frac{1}{sen\,x}\cdot\cos x$$

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[2\log(sen\,x)+2x\cdot\frac{1}{sen\,x}\cdot\cos x\right]$$

$$f'(x)=(sen\,x)^{2x}\cdot\left[2\log(sen\,x)+2x\cdot\frac{1}{sen\,x}\cdot\cos x\right]$$

Calculo de la recta tangente

Vamos a ver el procedimiento para calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto determinado



La recta tangente a la gráfica en el punto (x_0 , $f(x_0)$) tiene como ecuación

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Ejemplo:

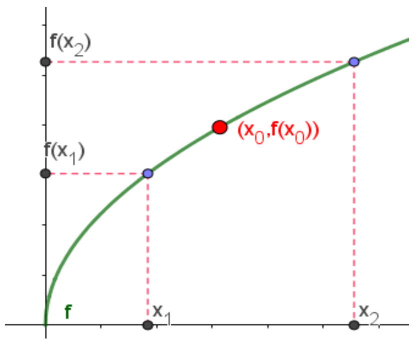
Si queremos calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) = $2x^3 - 2x + 1$ cuando x=1 el procedimiento es el siguiente:

- Calculamos $f(1)=2\cdot 1^3-2\cdot 1+1=\mathbf{2}$
- Obtenemos la función derivada $f'(x)=6x^2-2$
- Calculamos $f'(1)=6\cdot 1^2-2=\mathbf{4}$
- Construimos la ecuación de la recta $\boldsymbol{y-2=4\cdot(x-1)}$
- Simplificamos (opcional) $y-2=4x-4 \Leftrightarrow \boldsymbol{y=4x-2}$

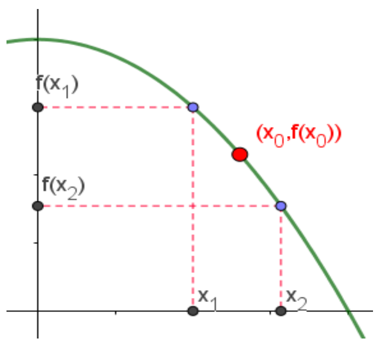
Crecimiento y decrecimiento

Decimos que una función es **creciente** en un punto x_0, si en un entorno de x_0 se cumplen las siguientes condiciones

$$x<x_0 \Rightarrow f(x)<f(x_0) \quad y \quad x_0<x \Rightarrow f(x_0)<f(x)$$



f creciente en x_0



f decreciente en x_0

Del mismo modo una función es decreciente en x_0 si

$$x<x_0 \Rightarrow f(x)>f(x_0) \quad y \quad x_0<x \Rightarrow f(x_0)>f(x)$$

Relación entre crecimiento y derivada

$$\begin{array}{lll} f \text{ creciente en } x_0 & \Rightarrow & f'(x_0)\geq 0 \\ f \text{ decreciente en } x_0 & \Rightarrow & f'(x_0)\leq 0 \end{array}$$

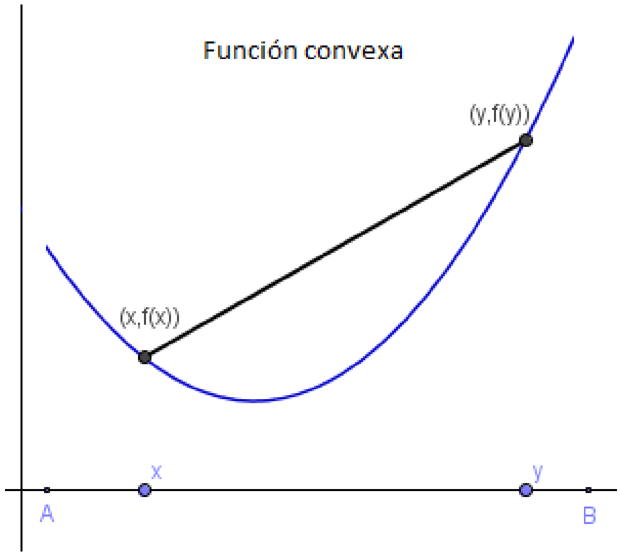
$$\begin{array}{lll} f'(x_0)>0 & \Rightarrow f & \text{creciente en } x_0 \\ f'(x_0)<0 & \Rightarrow f & \text{decreciente en } x_0 \end{array}$$

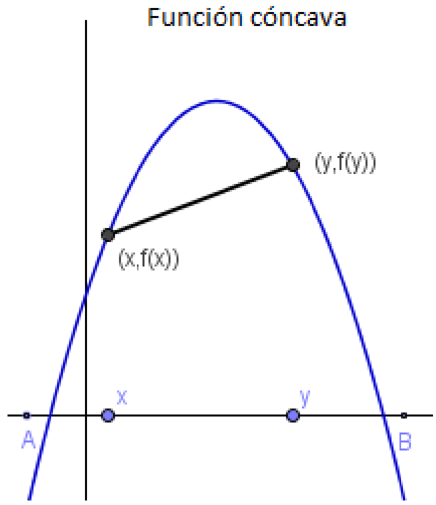
Observación:

Un ejemplo de función creciente en un punto cuya derivada vale cero es $f(x)=x^3$,cuando $x=0$

Concavidad y convexidad

- Una función se dice que es **cóncava positiva o convexa** en un intervalo (a, b) si para todo par de números $x, y \in (a, b)$ el segmento que une los puntos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ está por encima de la gráfica de la función.

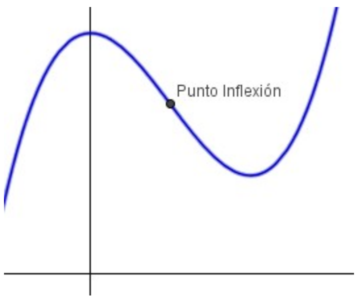




- De la misma manera, una función se dice que es **cóncava negativa o cóncava** en un intervalo (a, b) si para todo par de números $x, y \in (a, b)$ el segmento que une los puntos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ está por debajo de la gráfica de la función.
- Diremos que la función f es convexa en x_0 si lo es en un entorno de x_0. Lo mismo para la concavidad.

Puntos de inflexión

Se conocen como puntos de inflexión aquellos donde la función cambia de concavidad (de cóncava a convexa o viceversa)



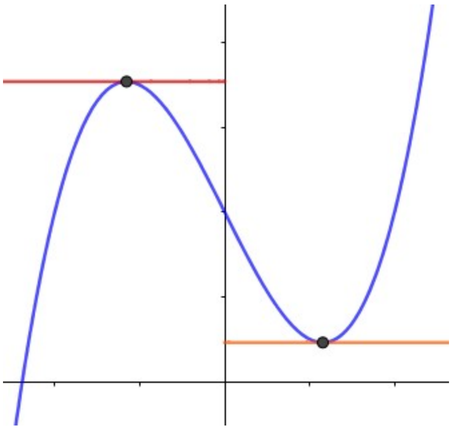
Relación entre derivada segunda y concavidad

Si existe derivada segunda en x_0, entonces:

f convexa en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$	$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ convexa en x_0
f cóncava en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$	$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ cóncava en x_0

Máximos y mínimos relativos

En los puntos donde una función presenta un máximo relativo o un mínimo relativo, la tangente a la gráfica es horizontal. Con lo cual, tanto en máximos como en mínimos relativos la derivada ha de valer cero.



Por lo tanto, la derivada nos proporciona un método para encontrar máximos y mínimos relativos, ya que estos han de cumplir la ecuación f'(x)=0.

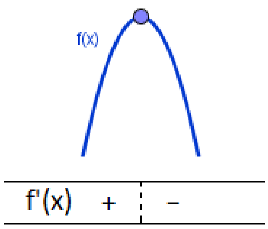
Búsqueda de extremos relativos

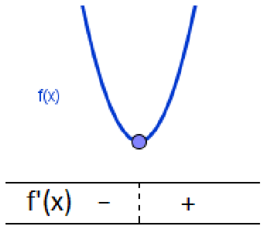
En una función derivable, la búsqueda de extremos relativos se basa en el estudio de aquellos puntos donde la derivada vale cero, conocidos como **puntos críticos**

$\left(x_0 \text{ punto crítico} \Leftrightarrow f'(x_0)=0\right)$

<u>Método 1</u>: Estudiar el signo de la derivada

Si f es una función continua, entonces en los puntos donde la derivada cambie de signo habrá un máximo o un mínimo relativo. Esto se justifica debido a la relación entre derivada y crecimiento.





Hay que observar que en este método no es necesario que f sea derivable en el extremo, aunque sí es necesario que sea continua, por ejemplo $f(x)=|x|$ no es derivable en el 0

<u>Método 2</u>: Ceros de la derivada y signo de la derivada segunda

Este método se basa que en los extremos relativos la derivada (si la hay) vale cero y además la función es cóncava en los máximos y convexa en los mínimos, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un máximo en } x_0 \qquad \left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo en } x_0$$

<u>Observación</u>: si resulta que $f''(x_0)=0$ entonces podemos calcular las derivadas sucesivas en x_0, siendo n el grado de la primera derivada distinta de cero

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0, \quad \ldots \quad f^{n-1)}(x_0)=0,\ f^{n)}(x_0)\neq 0$$

Entonces:

- Si n es impar f tiene un punto de inflexión en x_0
- Si n es par y $f^{n)}(x_0)>0$ entonces f tiene un mínimo en x_0
- Si n es par y $f^{n)}(x_0)<0$ entonces f tiene un máximo en x_0

Por ejemplo, x^3 tiene un punto de inflexión en 0, mientras que x^4 tiene un mínimo en 0