Tema 7 – Probabilidad

Experimentos Aleatorios

Experimento aleatorio y experimento determinista

Un experimento se dice que es determinista si es posible predecir el resultado antes de realizar el experimento.

Un experimento se dice que es aleatorio si tiene varios resultados posibles y a priori no sabemos cual de ellos se va a producir.

Ejemplo:

Si tiramos un dado y medimos el tiempo que tarda en caer al suelo, estamos hablando de un experimento determinista, ya que las leyes de la física permiten predecir el resultado del experimento. Por el contrario, si tiramos el mismo dado y observamos cuál de las 6 caras queda hacia arriba, estamos ante un experimento aleatorio, ya que a priori, no disponemos de una ley física que nos permita preveer el resultado.

Espacio muestral

En un experimento aleatorio, al conjunto de los posibles resultados del experimento se le conoce como espacio muestral.

Ejemplo:

Al tirar un dado con sus caras numeradas, y observar cuál es la cara que queda hacia arriba, el espacio muestral sería el conjunto $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Sucesos

En un experimento aleatorio se le llama suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplos:

Si tiramos un dado y observamos qué cara queda hacia arriba podremos observar los siguientes sucesos:

- {sacar número par} = {2,4,6}
- {sacar un número menor que 5} = {1,2,3,4}
- {1,4,5}
- {sacar un número mayor que 2} = {3,4,5,6}

Tipos de sucesos:

- Suceso elemental es aquel que se corresponde con un solo elemento del espacio muestral, por ejemplo: "sacar un 6 al tirar un dado"
- Suceso compuesto, es el que se corresponde con varios elementos del espacio muestra, por ejemplo: "sacar un número impar al tirar un dado"

- Suceso seguro es aquel que siempre ocurre, por ejemplo: "sacar un número menor que 10 al tirar un dado". Al suceso seguro se le representa por Ω
- Suceso imposible es aquel que nunca ocurre, por ejemplo "sacar un número mayor que 6 al tirar un dado". El suceso imposible se representa por $\emptyset$
- Dos sucesos se dice que son **compatibles** si pueden ocurrir los dos a la vez (por ejemplo "sacar par" y "sacar nº mayor que 3". En caso contrario se dice que son incompatibles (por ejemplo "sacar par" y "sacar nº menor que 2".
- Dos sucesos son **complementarios** cuando siempre ocurre uno de los dos, pero nunca los dos al mismo tiempo. Se denotan por A y $\bar{A}$ (complementario de A)
- Al conjunto de todos los sucesos se le conoce como **espacio de sucesos** y lo representaremos por E

Operaciones con sucesos – Leyes de De Morgan

Unión:

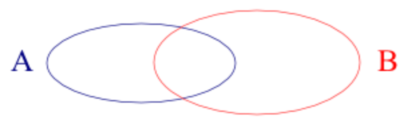
La unión de dos sucesos A y B es aquel suceso A∪B que ocurre cuando se cumple uno de los dos, A o B.

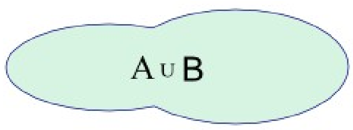
Por ejemplo, si al tirar un dado consideramos el suceso A="sacar número par" y el suceso B="sacar un número mayor que 3", entonces su unión: A∪B = "sacar 2, 4, 5 ó 6"

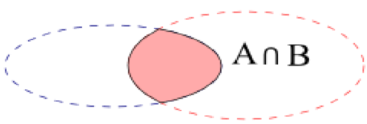
Intersección:

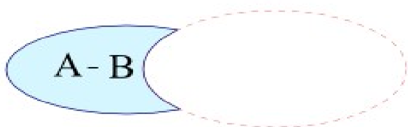
La intersección de dos sucesos A y B es aquel suceso A∩B, que ocurre cuando se cumplen los dos a la vez, A y B.

Con los sucesos del ejemplo anterior: A∩B = "sacar 4 ó 6"









Diferencia:

La diferencia de dos sucesos A y B es aquel suceso A-B, que ocurre si se cumple A pero no se cumple B $(A-B=A\cap\bar{B})$

Si calculamos la diferencia de los sucesos de los ejemplos anteriores obtenemos A-B="sacar 2"

Leyes de De Morgan:

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

Probabilidad

Definición

Si consideramos un experimento aleatorio con un espacio de sucesos E, definimos probabilidad como una función $P: \ E \rightarrow [0,1]$ que asigna a cada suceso un número entre 0 y 1.

La función de probabilidad ha de cumplir las siguientes condiciones (axiomas de Kolmogorov):

$$P(A) \geq 0, \forall A \in E$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propiedades

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $A \subset B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

Ejemplo

En una encuesta se observa que el 30% de los encuestados son usuarios de la plataforma de streaming A, mientras que el 20% es usuario de la plataforma B. Un 10% de los encuestados declara ser usuarios de las dos plataformas.
Si elegimos una persona al azar, calcula la probabilidad de: Que sea usuaria de alguna de las dos plataformas. Sea usuaria de A, pero no de B. No sea usuaria ni de A ni de B.

Solución:

Tenemos los sucesos:
- A= “ser usuario de la plataforma A” con P(A)=0,3
- B= “ser usuario de la plataforma B” con P(B)=0,2
- $A \cap B$= “ser usuario de A y de B” con $P(A \cap B)$=0,1

Nos piden las probabilidades de:
- $A \cup B$ = “ser usuario de alguna de las dos plataformas”
- $\bar{A} \cap \bar{B}$ = “no ser usuario ni de A ni de B”
- $A - B = A \cap \bar{B}$ = “ser usuario de A, pero no de B”

Según las fórmulas derivadas de los axiomas:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}4$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}6$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2$$

Frecuencia de un suceso. Ley de los grandes números.

Si realizamos un experimento aleatorio N veces, tendremos que un suceso A ocurre un número n_A de veces. Llamaremos entonces frecuencia relativa del suceso A al cociente $f_N(A) = \dfrac{n_A}{N}$

La ley de los grandes números dice que al aumentar el número de repeticiones, las frecuencias relativas se acercan cada vez más a las probabilidades reales de los sucesos:

$$\lim_{N \to +\infty} f_N(A) = P(A)$$

Regla de Laplace

Si tenemos un espacio muestral compuesto por un número finito de sucesos elementales y **todos ellos tienen la misma probabilidad**, entonces podemos calcular la probabilidad de un suceso A:

$$P(A) = \frac{n^o\, de\, casos\, favorables}{n^o\, de\, casos\, posibles}$$

Ejemplo:

Al tirar un dado el número de casos posibles es de 6. En principio ninguna cara es distinta de las otras (el dado no está cargado) y por tanto podemos considerar que las 6 caras tienen la misma probabilidad, a partir de ahí podemos calcular la probabilidad de los distintos sucesos utilizando la regla de Laplace:

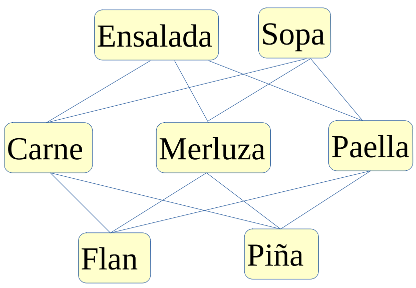
$$P(\text{Sacar Par}) = \frac{\#\{2{,}4{,}6\}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \; ; \qquad P(Sacar\, un\, número\, mayor\, que\; 4) = \frac{\#\{5{,}6\}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Técnicas de recuento

Estrategia Multiplicativa – Diagramas en árbol.

Supongamos que en un restaurante vemos el siguiente menú del día

Primer plato	Ensalada
	Sopa
Segundo plato	Carne Asada
	Merluza a la romana
	Paella
Postre	Flan
	Piña



Si queremos saber cuántas opciones diferentes hay en el menú debemos multiplicar 2·3·2=12 opciones:

Ensalada-Carne-Flan	Sopa-Carne-Flan
Ensalada-Carne-Piña	Sopa-Carne-Piña
Ensalada-Merluza-Flan	Sopa-Merluza-Flan
Ensalada-Merluza-Piña	Sopa-Merluza-Piña
Ensalada-Paella-Flan	Sopa-Paella-Flan
Ensalada-Paella-Piña	Sopa-Paella-Piña

En resumen, si el número de opciones disponible en cada elección no depende de las otras, el número total de casos se obtiene multiplicando el número de opciones posibles en cada elección.

Permutaciones

Una permutación de n elementos es cada una de las maneras en las que se pueden ordenar esos n elementos.

Para calcular el número de permutaciones que se pueden hacer con n elementos (P_n) iremos colocando esos n elementos en una lista ordenada:

Supongamos que tenemos 4 elementos, numerados del 1 al 4. Las listas ordenadas que podemos formar con esos 4 elementos son las siguientes:

1-2-3-4	2-1-3-4	3-1-2-4	4-1-2-3
1-2-4-3	2-1-4-3	3-1-4-2	4-1-3-2
1-3-2-4	2-3-1-4	3-2-1-4	4-2-1-3
1-3-4-2	2-3-4-1	3-2-4-1	4-2-3-1
1-4-2-3	2-4-1-3	3-4-1-2	4-3-1-2
1-4-3-2	2-4-3-1	3-4-2-1	4-3-2-1

Permutaciones de 4 elementos:
$P_4=4!=24$

Si queremos formar listas ordenadas con n elementos, para la primera posición de la lista tendremos n posibilidades. Para la segunda posición el número de posibilidades es n-1, ya que no tendremos disponible el elemento que hemos colocado en primera posición. En la tercera posición no podremos poner los dos que ya hemos colocado, así pues quedarán n-2 elementos disponibles.

n opciones	n-1 opciones	n-2 opciones	.... ………	2 opciones	1 opción

De esta forma iremos colocando todos los elementos hasta que en la última posición haya sólo un elemento disponible.

Para saber cuántas listas diferentes nos pueden salir, debemos multiplicar las opciones que tenemos en cada posición de la lista, obteniendo:

$$P_n=n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

Variaciones sin repetición

Las variaciones sin repetición (o simplemente variaciones) de m elementos, tomados de n en n, son listas ordenadas de longitud n, que podemos formar con m elementos distintos.

1	2	3		n-1	n
m opciones	m-1 opciones	m-2 opciones	.... ………	m-n+2 opciones	m-n+1 opciones

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n viene dado por

$$V_{m,n}=\frac{m!}{(m-n)!}$$

ya que:

$$\frac{m!}{(m-n)!}=\frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot(m-n)\cdot(m-n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(m-n)\cdot(m-n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$$

Si tenemos cinco elementos disponibles y queremos formar listas de tres elementos donde tengamos en cuenta el orden, las listas posibles serán:

1-2-3	2-1-3	3-1-2	4-1-2	5-1-2
1-2-4	2-1-4	3-1-4	4-1-3	5-1-3
1-2-5	2-1-5	3-1-5	4-1-5	5-1-4
1-3-2	2-3-1	3-2-1	4-2-1	5-2-1
1-3-4	2-3-4	3-2-4	4-2-3	5-2-3
1-3-5	2-3-5	3-2-5	4-2-5	5-2-4
1-4-2	2-4-1	3-4-1	4-3-1	5-3-1
1-4-3	2-4-3	3-4-2	4-3-2	5-3-2
1-4-5	2-4-5	3-4-5	4-3-5	5-3-4
1-5-2	2-5-1	3-5-1	4-5-1	5-4-1
1-5-3	2-5-3	3-5-2	4-5-2	5-4-2
1-5-4	2-5-4	3-5-4	4-5-3	5-4-3

Variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3:
$V_{5,3}=5\cdot4\cdot3=60$

Combinaciones

Las combinaciones de m elementos tomados de n en n, $C_{m,n}$ son listas de longitud n que podemos formar con esos m elementos disponibles. La diferencia respecto a las variaciones es que en este caso el orden de los elementos no importa.

Si observamos en el ejemplo anterior las variaciones de 5 elementos tomadas de 3 en 3, veremos que hay varias variaciones que representan la misma combinación:

1-2-3 ≡ 1-3-2 ≡ 2-1-3 ≡ 2-3-1≡ 3-1-2 ≡ 3-2-1

1-2-3	1-2-4	1-2-5	1-3-4	1-3-5	1-4-5	2-3-4	2-3-5	2-4-5	3-4-5
1-3-2	1-4-2	1-5-2	1-4-3	1-5-3	1-5-4	2-4-3	2-5-3	2-5-4	3-5-4
2-1-3	2-1-4	2-1-5	3-1-4	3-1-5	4-1-5	3-2-4	3-2-5	4-2-5	4-3-5
2-3-1	2-4-1	2-5-1	3-4-1	3-5-1	4-5-1	3-4-3	3-5-2	4-5-2	4-5-3
3-2-1	4-1-2	5-1-2	4-1-3	5-1-3	5-1-4	4-2-3	5-2-3	5-2-4	5-3-4
3-1-2	4-2-1	5-2-1	4-3-1	5-3-1	5-4-1	4-3-2	5-3-2	5-4-2	5-4-3
{1,2,3}	**{1,2,4}**	**{1,2,5}**	**{1,3,4}**	**{1,3,5}**	**{1,4,5}**	**{2,3,4}**	**{2,3,5}**	**{2,4,5}**	**{3,4,5}**

Aquí podemos ver que con la combinación elementos 1, 2 y 3 podemos formar 6 variaciones (permutando el orden de los elementos). Lo mismo ocurre con las otras combinaciones posibles, por tanto podemos calcular el número de combinaciones: $C_{5,3}=\frac{60}{6}=10$

En general, una combinación (lista no ordenada) de n elementos da lugar a n! variaciones (listas ordenadas) que se obtienen permutando los elementos que forman la combinación. Es decir:

$$V_{m,n}=C_{m,n}\cdot P_n \quad \Leftrightarrow \quad C_{m,n}=\frac{V_{m,n}}{P_n}=\frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Para expresar el número de combinaciones es habitual utilizar números combinatorios:

$$C_{m,n}=\binom{m}{n}=\frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Probabilidad Condicionada

Definición

Se le llama probabilidad condicionada de un suceso A respecto a otro suceso B, P(A/B), a la probabilidad de que ocurra el suceso A suponiendo que ocurre el suceso B.

La probabilidad condicionada también se puede calcular de la siguiente manera:

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad si\ P(B)\neq 0}$$

Ejemplo 1:

Consideramos el experimento aleatorio consistente en extraer consecutivamente dos bolas de una bolsa donde hay 5 bolas negras y 5 bolas blancas. Entonces si consideramos el suceso B="sacar la primera bola blanca" y A="sacar la segunda bola blanca" entonces $P(A/B)=\frac{4}{9}$ ya que, aplicando la regla de Laplace, después de la primera extraccion quedan 9 bolas de las cuales 4 son blancas.

Ejemplo 2:

Al tirar un dado podemos considerar el suceso A="sacar un número par" y B="sacar un número mayor o igual a 4". Si calculamos P(A/B) tendremos, según la regla de Laplace:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2/6}{3/6}=\frac{2}{3}$$

Lo cual es coherente, ya que hay 3 números mayores o iguales a cuatro, de los cuales 2 son pares.

Independencia de sucesos

Dos sucesos A y B se dicen independientes si

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$$

- Lo anterior es equivalente a:

  $P(A/B)=P(A)$ o también $P(B/A)=P(B)$

- Si dos sucesos son independientes, también lo son sus complementarios, es decir, si A y B son independientes, entonces también lo serán $A\ y\ \bar{B}$, $\bar{A}\ y\ B$ y $\bar{A}\ y\ \bar{B}$.

Ejemplo 1:

Si tenemos una bolsa con 5 bolas blancas y 5 bolas negras, podemos considerar el experimento aleatorio consistente en extraer una bola al azar, devolver la bola a la bolsa y realizar una segunda extracción aleatoria. En este experimento podemos considerar los sucesos:

B_1="La primera bola es blanca" y B_2="La segunda bola es blanca"

Como la segunda extracción es independiente de la primera, entonces la probabilidad del suceso $B_1\cap B_2=$Sacar dos bolas blancas , tendrá una probabilidad:

$$P(B_1\cap B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2)=\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{4}$$

Ejemplo 2:

Si repetimos el experimento anterior, pero sin volver a introducir la primera bola en la bolsa entonces los sucesos B_1 y B_2 ya no son independientes, ya que $P(B_2/B_1)=\frac{4}{9}$ y $P(B_2)=\frac{1}{2}$

En este caso

$$P(B_1 \cap B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

Ejemplo 3 (ejercicio resuelto):

En el aula de 1º Bac C hay un total de 25 alumn@s: 15 chicas y 10 chicos. En ese grupo aprueban matemáticas 10 chicas y 5 chicos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Al elegir un alumno al azar, apruebe matemáticas.

b) Al elegir un alumno al azar, sea chico y apruebe matemáticas.

c) Al elegir un alumno al azar, sea chica y suspenda matemáticas.

d) Probabilidad de que un alumno elegido al azar sea chico o apruebe matemáticas.

e) Probabilidad de que eligiendo una chica al azar, esta suspenda matemáticas.

Justifica, según los datos del ejemplo, si la probabilidad de aprobar matemáticas es independiente del sexo del alumo.

Solución:

Podemos recoger los datos del ejercicio en la siguiente tabla de contingencia:

	♂	♀	
Aprueban	5	10	15
Suspenden	5	5	10
	10	15	25

a) $P(Aprobar)=\frac{15}{25}=0{,}6$

b) $P(Aprobar \cap ♂)=\frac{5}{25}=0{,}2$

c) $P(Suspender \cap ♀)=\frac{5}{25}=0{,}2$

d) $P(Aprobar \cup ♂)=\frac{10+5+5}{25}=0{,}8$

e) $P(Suspender/♀)=\frac{5}{15}=0{,}\hat{3}$

Teniendo en cuenta que $P(Suspender/♂)=\frac{5}{10}=0{,}5$ no coincide con $P(Suspender/♀)=\frac{5}{15}=0{,}\hat{3}$ concluímos que la probabilidad de aprobar depende de ser hombre o mujer. Esto hay que interpretarlo en el sentido de que es más probable de encontrar una persona que suspende si elegimos entre los hombres que si elegimos entre las mujeres.

Una manera alternativa de comprobar la dependencia es comprobar que

$$P(Aprobar \cap ♂) \neq P(Aprobar) \cdot P(♂)$$

$$\frac{5}{25} \neq \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{25}$$

Teorema de las probabilidades totales

Decimos que los sucesos $A_1, \ldots, A_n$ forman un **sistema completo de sucesos** si cumplen:

- $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ (su unión es el espacio muestral)
- $A_i \cap A_j = \varnothing \quad i \neq j$ (son sucesos mutuamente incompatibles)

Teorema de las probabilidades totales:

Si los sucesos $A_1, \ldots, A_n$ forman un sistema completo de sucesos, entonces la probabilidad de un suceso B podrá expresarse de la forma:

$$\boxed{P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

Ejemplo:

Consideremos el experimento, visto anteriormente, consistente en extraer dos bolas sin reemplazamiento de una bolsa donde hay 5 bolas blancas y 5 bolas negras. Si consideramos el suceso B_1="sacar bola blanca en la primera extracción", entonces los sucesos B_1 y su complementario N_1 forman un sistema completo de sucesos. Así pues, podremos utilizar el teorema de las probabilidades totales para calcular la probabilidad del suceso B_2="sacar bola blanca en la segunda extracción"

$$P(B_2) = P(B_2/B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2/N_1) \cdot P(N_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$