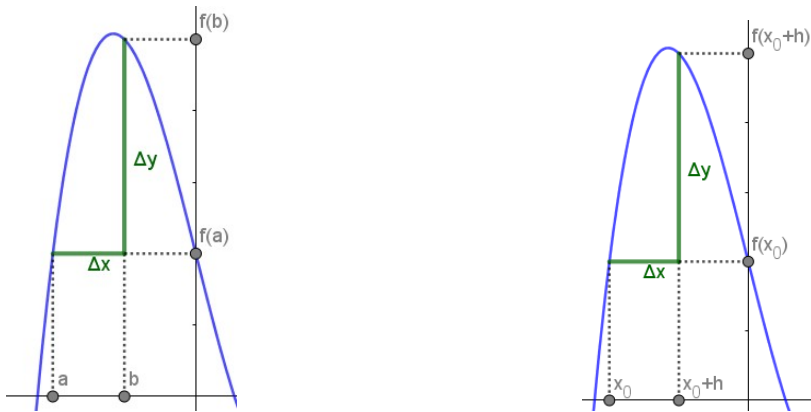


Tema 6 – Derivadas

Tasa de variación en un intervalo

La tasa de variación media de una función en el intervalo $[a,b]$ se define como el aumento del valor de la función, dividido entre la longitud del intervalo.



Así pues, la tasa de variación media en el intervalo $[a,b]$ se calculará:

$$TVM[a,b] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si al intervalo le llamamos $[x_0, x_0+h]$, la tasa de variación media queda:

$$TVM[x_0, x_0+h] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{nótese que } h \text{ es la longitud del intervalo}).$$

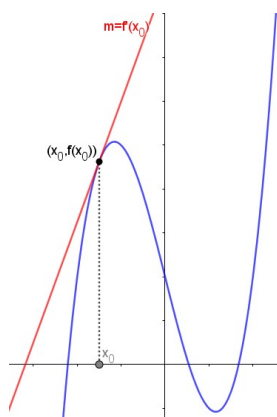
Derivada de una función en un punto

Se define la derivada de la función f en el punto x_0 como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

La derivada viene siendo el límite de la tasa de variación en un intervalo, cuando la longitud de dicho intervalo tiende a cero. Así pues, la derivada se considera una **tasa de variación instantánea**.

Geométricamente, la derivada también se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$



Función derivada

La función derivada, f' , asigna a cada punto el valor de su derivada.

$$f': a \rightarrow f'(a)$$

Ejemplo:

La función derivada de $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$ (más adelante veremos como calcular derivadas).

Con lo cual si queremos calcular la derivada de la función f en $x=3$, tan solo tenemos que sustituir en la función derivada: $f'(3)=2 \cdot 3=6$.

Nótese que el conocer la función derivada nos evita tener que calcular el límite en cada caso (lo cual suele ser bastante laborioso).

A partir de aquí nos centraremos en cómo calcular funciones derivadas.

Tabla de derivadas

A continuación se muestran las derivadas para las funciones elementales:

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$	$f(x) = K ; K \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x$	$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$	$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a ; a \in \mathbb{R}$	$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} ; a \in \mathbb{R}$

Reglas de derivación

- Suma:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Ejemplo: $f(x)=x^2+\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Resta:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Ejemplo: $f(x)=x^2-x \Rightarrow f'(x)=2x-1$

- Multiplicación/división por una constante:

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$$

Ejemplos: $f(x)=3x^2 \Rightarrow f'(x)=3 \cdot 2x=6x$; $g(x)=\frac{x^2}{3} \Rightarrow g'(x)=\frac{2x}{3}$

- Multiplicación de funciones:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Ejemplo: $f(x)=\sqrt{x} \cdot (3x^2+1) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (3x^2+1) + \sqrt{x} \cdot 6x$

- División de funciones:

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ejemplo: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sin x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x - \sqrt{x} \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$

- Composición de funciones (regla de la cadena):

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplos:

$$\rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$

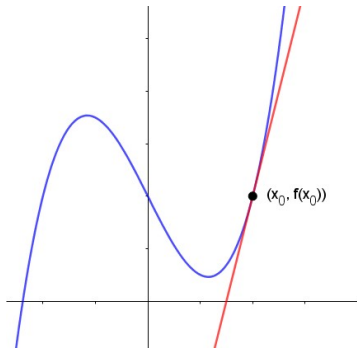
$$\rightarrow f(x)=\ln(3x+2) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3x+2} \cdot 3$$

$$\rightarrow f(x)=2^{x^2-3x} \Rightarrow f'(x)=(\ln 2) \cdot 2^{x^2-3x} \cdot (2x-3)$$

$$\rightarrow f(x)=\log_2(x^2-1) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\ln 2 \cdot (x^2-1)} \cdot 2x$$

Calculo de la recta tangente

Vamos a ver el procedimiento para calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto determinado



La recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene como ecuación

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

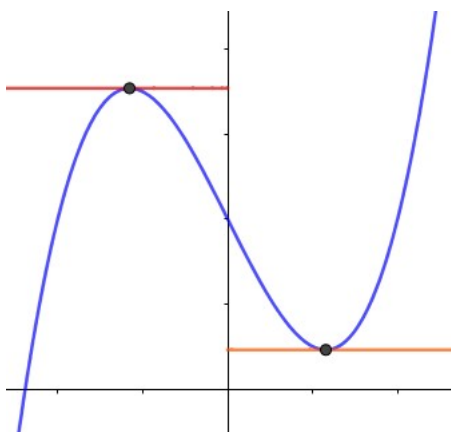
Ejemplo:

Si queremos calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$ cuando $x=1$ el procedimiento es el siguiente:

- Calculamos $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$
- Obtenemos la función derivada $f'(x) = 6x^2 - 2$
- Calculamos $f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 2 = 4$
- Construimos la ecuación de la recta $y - 2 = 4 \cdot (x - 1)$
- Simplificamos (opcional) $y - 2 = 4x - 4 \Leftrightarrow y = 4x - 2$

Máximos y mínimos

En los puntos donde una función presenta un máximo relativo o un mínimo relativo, la tangente a la gráfica es horizontal. Con lo cual, tanto en máximos como en mínimos relativos la derivada ha de valer cero.



Por lo tanto, la derivada nos proporciona un método para encontrar máximos y mínimos relativos, ya que estos han de cumplir la ecuación $f'(x) = 0$

Ejemplo:

Si queremos obtener el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 + 12x - 2$ (parábola convexa) hacemos

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x+12=0 \Leftrightarrow x=-2$$

Con lo que el mínimo será el punto $(-2, f(-2)) = (-2, -14)$

