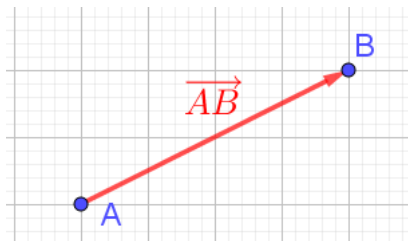


Vectores en el plano

Vectores fijos y vectores libres

Un vector fijo del plano se define como un segmento orientado y se define en función de los puntos que lo delimitan, es decir, el vector $\overrightarrow{AB}$ es aquel que comienza en el punto A y termina en el punto B.



Un vector tiene tres características:

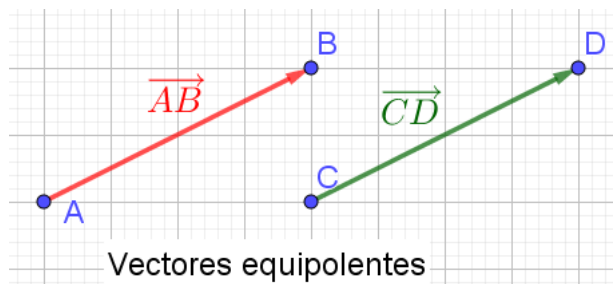
Módulo: es la longitud del segmento $\overline{AB}$.

Decimos que un vector es **unitario** si su módulo es 1.

Dirección: es la de la recta que pasa por los puntos A y B.

Sentido: es el del desplazamiento sobre la recta, de A a B.

Dos vectores fijos se dicen **equipolentes** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.



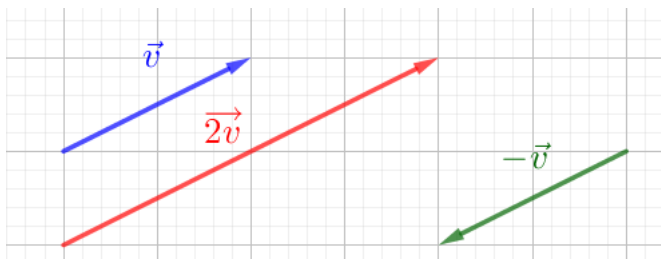
El conjunto de todos los vectores que son equipolentes entre sí forman lo que se conoce como **vector libre**.

Dados un vector libre $\vec{v}$ y un punto P, existe una única representación (vector fijo) de $\vec{v}$ con origen en P.

Operaciones con vectores

Producto por escalar:

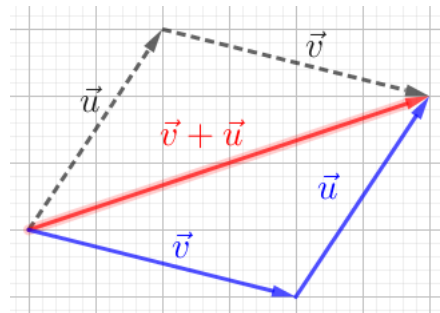
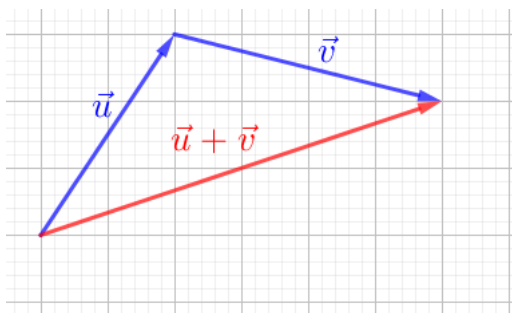
Al multiplicar un vector por un número (escalar) obtenemos otro vector con la misma dirección, mismo sentido si el escalar es positivo o distinto si es negativo, y cuyo módulo es el resultado de multiplicar el módulo original por el valor absoluto del escalar.



Hay que prestar atención al vector $-\vec{v}$, también llamado **vector opuesto** de $\vec{v}$, el cual tiene el mismo módulo que $\vec{v}$, la misma dirección, pero distinto sentido.

Suma de vectores:

Se elige un punto arbitrario para fijar el primer vector y a se coloca el segundo de tal forma que su origen coincide con el final del primero. El vector suma irá desde el origen del primero al final del segundo:



Como puede observarse, la suma de vectores es conmutativa ($\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$).

Resta de vectores:

Definimos la resta a partir de la suma del vector opuesto, es decir, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Combinación lineal de vectores

Una **combinación lineal** de vectores es una expresión que consiste en sumas y restas de los vectores, multiplicados escalar.

Por ejemplo, la expresión $2\vec{u} - \vec{v} - 4\vec{w}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, o dicho de otra manera, si $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v} - 4\vec{w}$, entonces podemos decir que $\vec{a}$ es combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Decimos que un conjunto de vectores genera el espacio vectorial, si cualquier vector se puede expresar como combinación lineal de ellos.

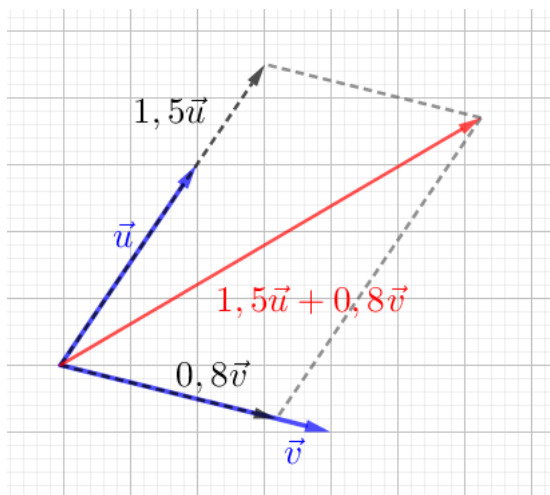
Un conjunto de vectores se dice que es **linealmente independiente** cuando ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal del resto. Si solo tenemos dos vectores, linealmente independientes equivaldrá a que no tengan la misma dirección.

Base de un espacio vectorial

Llamamos **base** de un espacio vectorial a un conjunto de vectores que sean linealmente independientes y generen dicho espacio vectorial.

En el caso del plano, tan solo necesitamos dos vectores que no tengan la misma dirección para obtener una base. Por eso decimos que el plano tiene dimensión 2.

Llamamos **dimensión** del espacio al número de vectores que componen la base. La dimensión es una propiedad del espacio, lo cual implica que todas las bases han de tener el mismo número de vectores. En el caso del plano, es imposible generar todo el plano a partir de un único vector y también es imposible encontrar tres vectores que sean linealmente independientes, así pues, todas las bases del plano han de tener dos vectores.



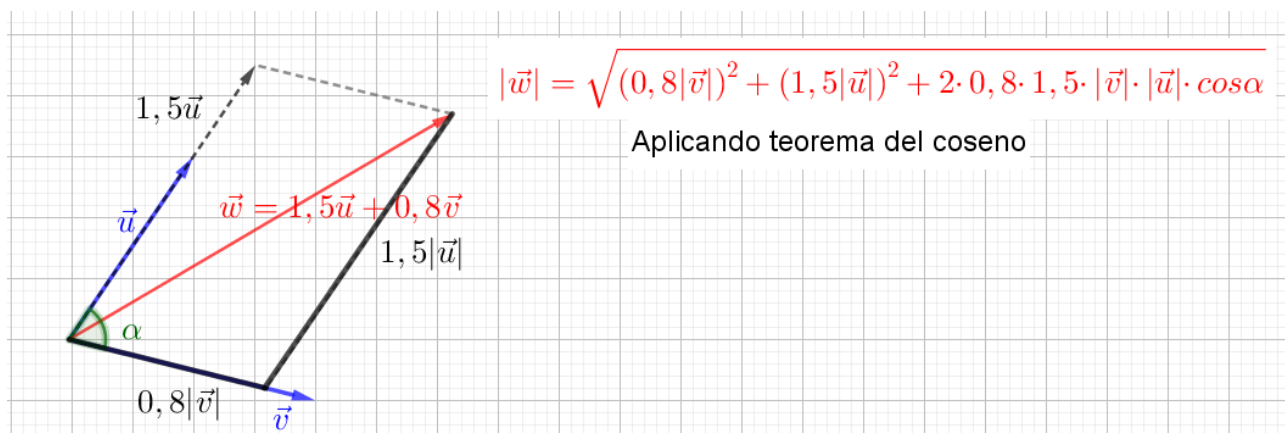
Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base y el vector $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, entonces decimos que (a, b) son las **coordenadas** del vector $\vec{w}$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Decimos que una base es **ortogonal**, si sus vectores forman entre ellos ángulos de 90° .

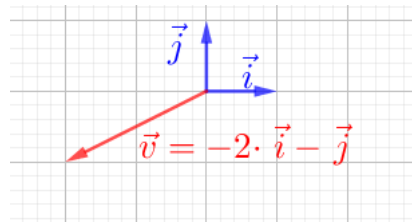
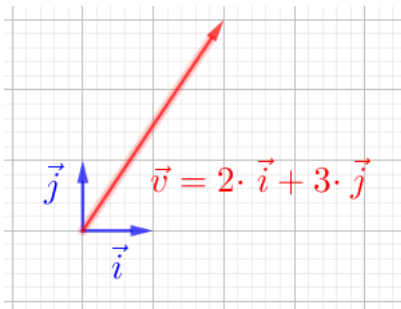
Decimos que una base es **ortonormal**, si sus vectores tienen módulo 1 (unitarios) y forman ángulos de 90° .

La importancia de trabajar con una base ortonormal reside en la sencillez a la hora de realizar las operaciones. Por ejemplo, si las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en una base ortonormal son (x, y) ,

entonces se cumple $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, mientras que en una base no ortonormal, el cálculo del módulo a partir de las coordenadas sería más complejo.



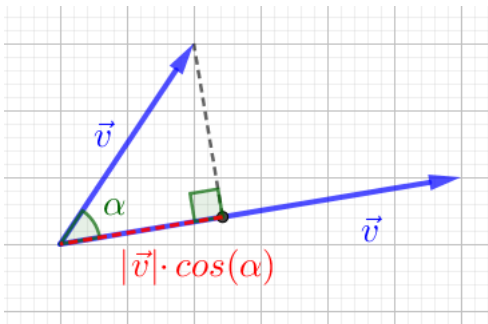
En el plano suele utilizarse una base canónica, compuesta por dos vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$, unitarios y ortogonales entre sí. En esta base $\vec{v}(2,3) = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$



Producto escalar de vectores

Se define el producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$, siendo α el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Geoméricamente, el producto escalar es el resultado de multiplicar el módulo de $\vec{v}$ por la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.



Si tenemos las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una **base ortonormal**, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Propiedades:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad ; k \in \mathbb{R}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Operaciones con coordenadas

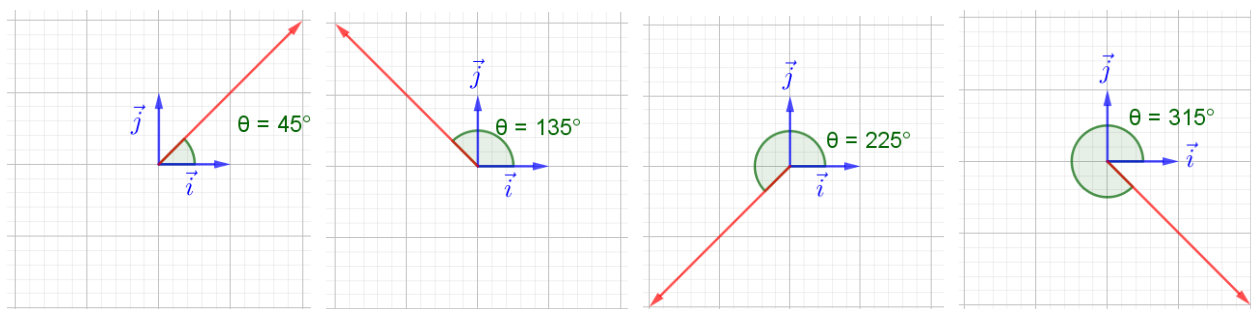
Una vez fijada la base del plano, supongamos dos vectores de coordenadas $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$

- Suma: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Multiplicación por escalar: $k \cdot \vec{u} = (k \cdot x_1, k \cdot y_1)$

- Módulo: $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ (solo si la base es ortonormal)
Si tenemos un vector $\vec{u} = (x, y)$ y necesitamos encontrar otro vector, $\vec{v}$, que tenga la misma dirección, pero con diferente módulo (llamémosle k), podemos hacer $\vec{v} = \frac{k}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$
- Producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ (solo si la base es ortonormal)
- Comparar dirección: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tendrán la misma dirección si uno es múltiplo de otro, es decir, si existe un número real, k, tal que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$
 $(x_1, y_1) = k \cdot (x_2, y_2) \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ (siempre que no haya división por cero)
- Ángulo entre vectores: a partir de la definición del producto escalar obtenemos
$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$
con lo cual, podemos calcular el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a partir de sus coordenadas, utilizando la función arco-coseno.
- Vectores ortogonales: Son aquellos que forman un ángulo de 90° . Como $\cos 90^\circ = 0$ que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales es equivalente a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Si tenemos un vector $\vec{u} = (x, y)$ y necesitamos obtener un vector ortogonal, podemos utilizar el vector $\vec{v} = (-y, x)$.

Argumento de un vector

El concepto de argumento va asociado con una base canónica, viene siendo el ángulo formado por el vector (llamémosle $\vec{v}$) y el vector $\vec{i}$ de la base. En este caso este ángulo toma un valor entre 0° y 360°



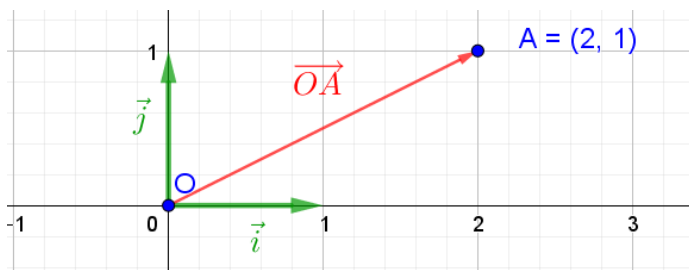
Para calcular el argumento, si $\vec{v} = (x, y)$, entonces ha de cumplirse $\tan \theta = \frac{y}{x}$, con lo que para

calcular θ hemos de usar la función arco-tangente de la calculadora y luego razonar el ángulo que se corresponde con el cuadrante en el que está el vector.

Sistema de referencia en el plano

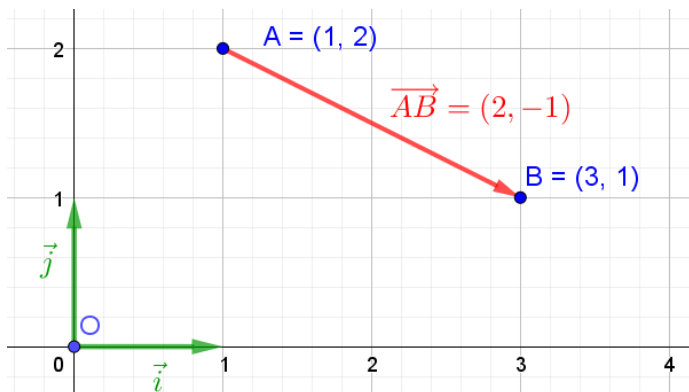
Un sistema de referencia consiste en un punto (origen) y una base del espacio de vectores. A partir de ahora utilizaremos el sistema de referencia $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ donde $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ es una base canónica.

En este sistema, las coordenadas de un punto A, se corresponderán con las del vector $\vec{OA}$ en la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

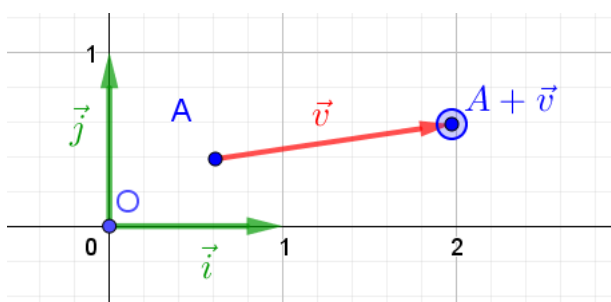


Puntos y vectores

Dados dos puntos del plano A y B, las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ se obtienen restando B-A

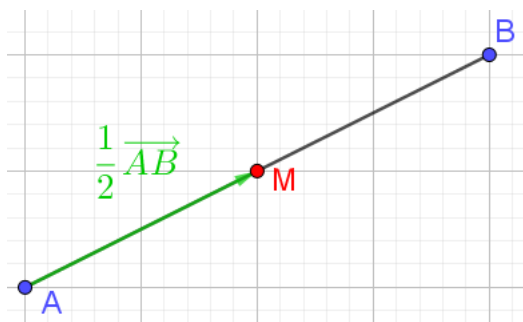


Recíprocamente, $B = A + \overrightarrow{AB}$, lo cual quiere decir, que sumar las coordenadas de un punto con las de un vector tiene el siguiente significado geométrico:



(suma de punto y vector)

Punto medio de un segmento



Operando con vectores podemos ver que $M = A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, operaciones que se pueden realizar a partir de las coordenadas de A y B. Suponiendo $A = (x_A, y_A)$ y $B = (x_B, y_B)$, tenemos:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Haciendo cuentas

$$M = \left(x_A + \frac{x_B - x_A}{2}, y_A + \frac{y_B - y_A}{2} \right) \Rightarrow M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Rectas en el plano

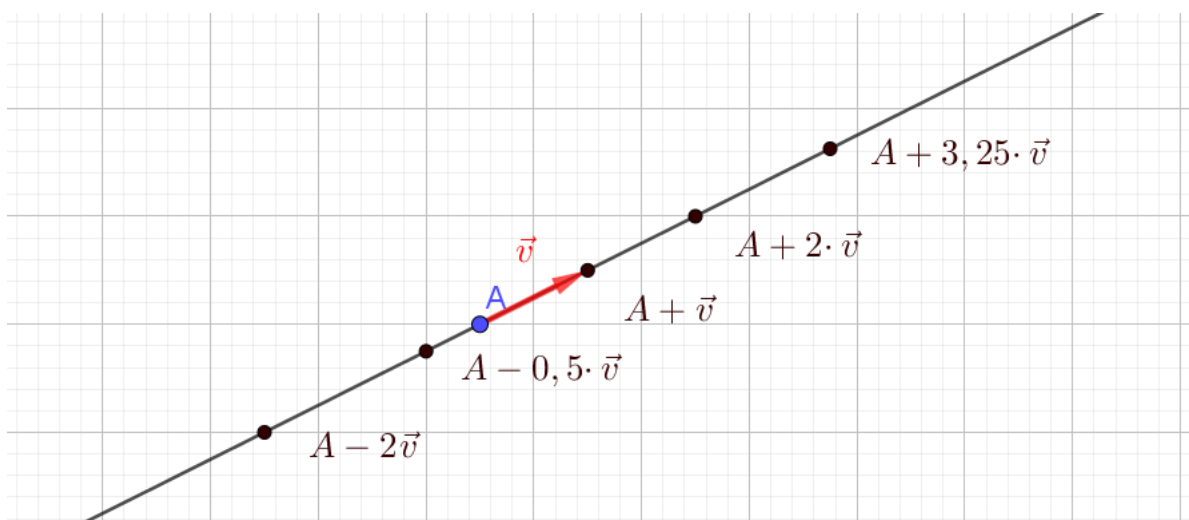
Una recta es una línea formada por un conjunto de puntos que mantiene la dirección.

Para describir los puntos que forman una recta utilizaremos ecuaciones, de tal manera que **los puntos que formen parte de la recta cumplan la ecuación de la misma**, mientras que los que no están en la recta no la cumplan.

Ecuación vectorial

Consideremos un punto A perteneciente a la recta y un vector, $\vec{v}$, que tenga su misma dirección, entonces todos los puntos de la recta se pueden expresar en la forma

$$P = A + \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{siendo } \lambda \text{ un número real.}$$



Ecuaciones paramétricas

A partir de la ecuación vectorial de la recta, asignando las coordenadas $P(x, y)$, $A(a, b)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$, tenemos

$$(x, y) = (a, b) + \lambda \cdot (v_x, v_y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + v_x \cdot \lambda \\ y = b + v_y \cdot \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua

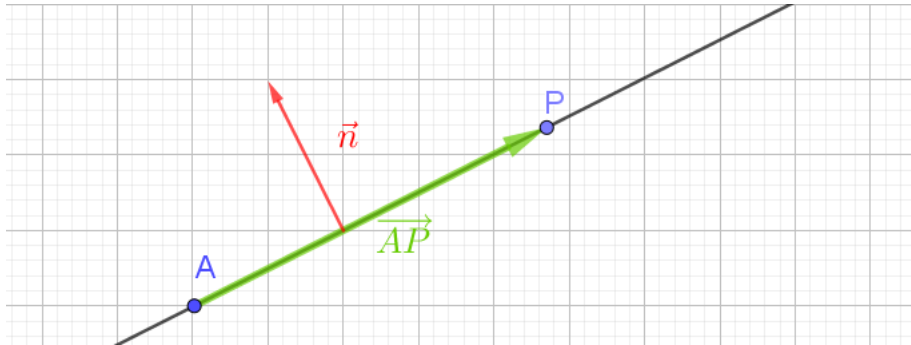
Despejando λ en las ecuaciones paramétricas obtenemos $\frac{x-a}{v_x} = \lambda$ y $\frac{y-b}{v_y} = \lambda$ con lo que

$$\frac{x-a}{v_x} = \frac{y-b}{v_y}$$

Hay que tener en cuenta el caso donde alguna de las coordenadas del vector vale cero, en el cual no hay ecuación continua. Este caso se corresponde con rectas verticales y horizontales (su dirección coincide con algún vector de la base).

Ecuación normal

Esta ecuación se obtiene a partir de un punto A y de un vector normal $\vec{n}$ (un vector normal es un vector perpendicular a la recta).



$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

Ejemplo: queremos calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,-3) y tiene un vector normal $\vec{n}=(1,2)$. Entonces si consideramos un punto genérico de la recta, P(x,y), la ecuación anterior queda

$$(x-2, y+3) \cdot (1,2)=0$$

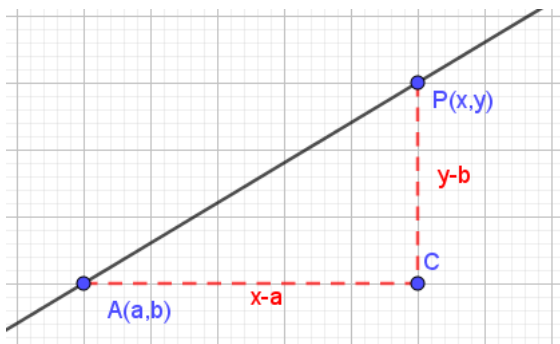
Si realizamos las operaciones la ecuación queda

$$x-3+2y+6=0 \Leftrightarrow x+2y+3=0 \quad (\text{ecuación general o implícita})$$

Ecuación punto-pendiente

Esta ecuación es útil si conocemos un punto de la recta y la pendiente de la misma.

Llamándole m al valor de la pendiente, y (a,b) a las coordenadas del punto conocido, tenemos que cualquier punto genérico de la recta, P(x,y) ha de cumplir:



$$m = \frac{y-b}{x-a} \Rightarrow y-b = m \cdot (x-a)$$

Ecuación explícita

Es una ecuación de la forma $y = m \cdot x + n$. Esta ecuación puede obtenerse a partir de cualquier otra, sin más que despejar y.

Como ya sabemos, el coeficiente m indica el valor de la pendiente de la recta, mientras que n es lo que llamamos “ordenada en el origen” (punto (0,n))

Ecuación general o implícita

Es una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$

Esta ecuación puede obtenerse fácilmente a partir de la ecuación continua, de la normal o de la punto-pendiente. Tan solo es preciso realizar las operaciones y simplificar.

Es importante observar, que los coeficientes de la ecuación determinan las coordenadas de un vector normal a la recta $\vec{n} = (A, B)$.

Ecuación canónica

Es un tipo especial de ecuación implícita que cumple $A^2 + B^2 = 1$, lo cual significa que el vector normal asociado a la ecuación, $\vec{n} = (A, B)$, es unitario.

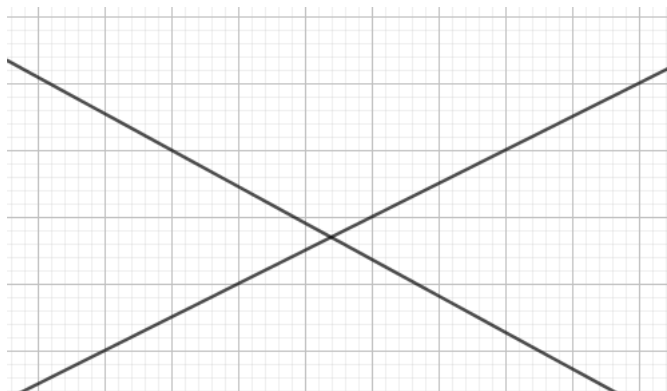
La manera de transformar una ecuación implícita en canónica es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Problemas geométricos

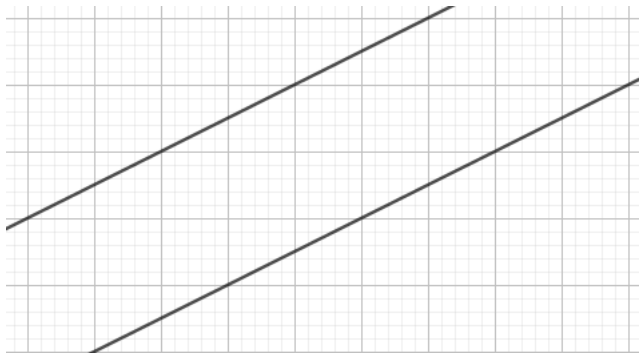
Posiciones relativas de dos rectas

Rectas secantes



- Tienen distinta pendiente.
- Si nos fijamos en los vectores directores de las rectas estos tienen distinta dirección.
- Tienen un único punto de intersección, cuyas coordenadas podemos calcular resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

Rectas paralelas



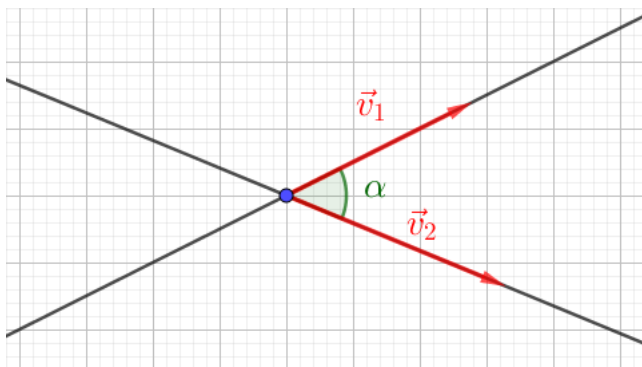
- Tienen la misma pendiente.
- Si nos fijamos en los vectores directores de las rectas estos tienen la misma dirección.
- No tienen ningún punto de intersección, lo cual implica que si intentamos resolver el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, nos encontramos con que este sistema no tiene solución (sistema incompatible).

Rectas coincidentes

- En este caso, las dos rectas son en realidad la misma, es decir, tienen los mismos puntos y por tanto, sus ecuaciones son equivalentes.

Ángulo formado por dos rectas

El ángulo formado por dos rectas secantes puede calcularse a partir del formado por sus vectores directores:



$$\cos \alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$

También podemos calcular el mismo ángulo a partir de las pendientes de las rectas, esto podemos hacerlo de dos maneras:

- Teniendo en cuenta que si m es la pendiente de la recta, entonces $\vec{v} = (1, m)$ es un vector director de la misma, con lo que $\cos \alpha = \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{1 + m_1^2} \cdot \sqrt{1 + m_2^2}}$
(nótese que las rectas son perpendiculares $\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$)
- Observando que $m = \tan \theta$, donde θ es el argumento de un vector director de la recta. Podemos calcular el ángulo entre rectas como la diferencia entre argumentos $\alpha = |\theta_1 - \theta_2|$,

en cuyo caso

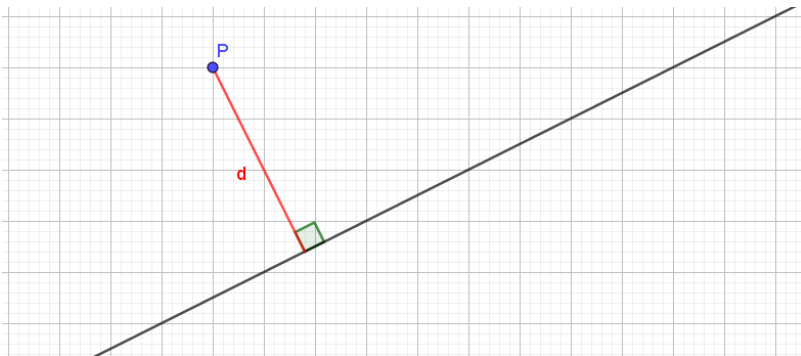
$$\tan \alpha = |\tan(\theta_1 - \theta_2)| = \left| \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2} \right| \Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

Distancia entre dos puntos

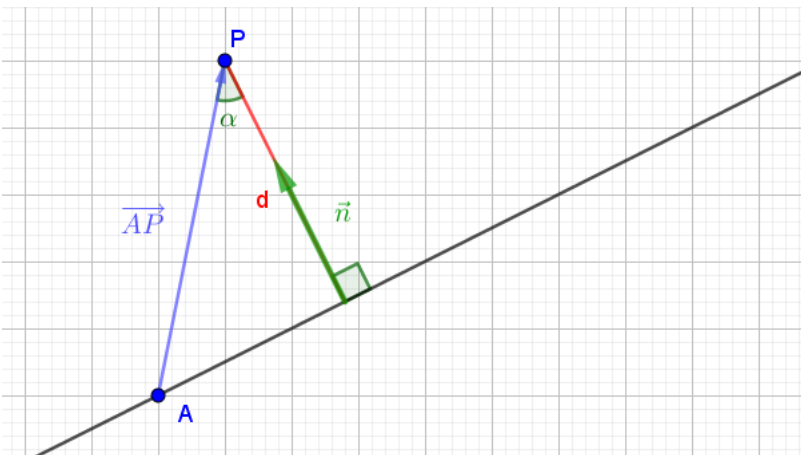
La distancia entre dos puntos A y B es la longitud del segmento $\overline{AB}$ que coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

Por lo tanto si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Distancia entre un punto y una recta



A partir de la ecuación de la recta, podemos obtener las coordenadas de un punto A y de un vector normal $\vec{n}$.



Cabe observar que la distancia del punto P a la recta, coincide con la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{AP}$ sobre el vector $\vec{n}$, la cual estaba relacionada con el ángulo α que forman los vectores.

$$d = |\overrightarrow{AP}| \cdot |\cos \alpha| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

(el valor absoluto se debe a que el signo del coseno depende del sentido de los vectores)

Si la recta tiene ecuación $Ax + By + C = 0$ y los puntos tienen coordenadas $A(x_0, y_0)$ y $P(x_1, y_1)$, entonces:

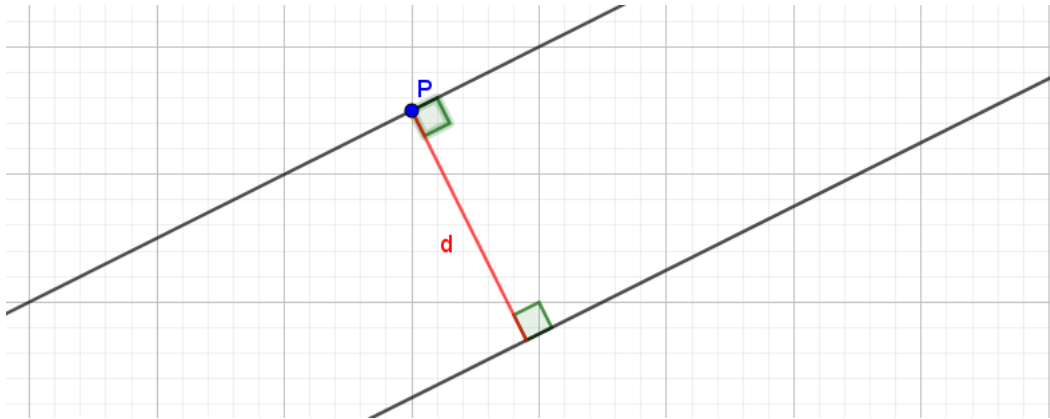
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \\ \vec{n} = (A, B) \end{array} \right\} \Rightarrow |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}| = |A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)| = |Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0| = |Ax_1 + By_1 + C|$$

(como $A(x_0, y_0)$ está en la recta, entonces cumple la ecuación y $C = -Ax_0 - By_0$)

y por tanto

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas



La idea para calcular la distancia, es tomar un punto en una de las rectas y calcular la distancia de ese punto a la otra, según lo visto en el apartado anterior.

Podemos suponer que las ecuaciones de las rectas son $Ax + By + C = 0$ y $Ax + By + C' = 0$, ya que al ser paralelas existe un mismo vector normal a las dos. Consideremos el punto $P(x_0, y_0)$, perteneciente a la primera recta, entonces.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Pero, como P está en la primera recta, cumple $Ax_0 + By_0 + C = 0 \Rightarrow Ax_0 + By_0 = -C$. Sustituyendo:

$$d = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$