

Números complejos

Los números complejos, históricamente, aparecen al intentar resolver ecuaciones polinómicas (o lo que es lo mismo, factorizar polinomios).

Para ilustrar el problema consideremos el polinomio $p(x)=x^2+1$, el cual, en principio, no puede factorizarse, ya que si buscamos sus raíces nos encontramos una ecuación sin solución.

$$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$$

Para poder resolver esta ecuación (y de paso el resto de ecuaciones polinómicas) se introduce un nuevo número “imaginario” conocido como $i=\sqrt{-1}$.

Con este nuevo número, la ecuación anterior tendría dos soluciones y el polinomio podría factorizarse:

$$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow x=\pm i$$

$$x^2-1=(x-i)\cdot(x+i)$$

Al incorporar a los números reales los nuevos números imaginarios (i y sus múltiplos) obtenemos lo que se conoce como **conjunto de números complejos**.

Un número complejo puede describirse como un número real más un número imaginario, lo cual puede representarse mediante la forma

$$z=a+b\cdot i \ ; \ a,b\in\mathbb{R}$$

Números complejos en la ecuación de segundo grado

Sea la ecuación $x^2+x+1=0$

Si aplicamos la fórmula conocida tenemos:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}$$

con lo que la ecuación tendría dos soluciones complejas $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Obsérvese que las dos raíces de la ecuación son **complejos conjugados** (el conjugado de $a+bi$ es $a-bi$)

En el resto de ecuaciones de segundo grado podemos razonar de manera análoga, con lo que observamos que una ecuación de segundo grado siempre va a tener dos soluciones complejas (aunque esas soluciones puedan ser coincidentes, es decir, la misma solución).

Este resultado puede generalizarse a una ecuación polinómica de cualquier grado, en lo que se conoce como **teorema fundamental del álgebra**, el cual afirma que cualquier ecuación polinómica de grado n tiene exactamente n raíces complejas. Como consecuencia, al utilizar números complejos, cualquier polinomio de grado n puede descomponerse en n polinomios de grado 1.

Operaciones con números complejos

Suma y resta:

$$(2+3i)+(5+2i)=7+5i$$

$$(2+3i)-(5+2i)=-3+i$$

Multiplicación:

$$(2+3i) \cdot (5+2i) = 10 + 4i + 15i + 6i^2 = 10 + 4i + 15i - 6 = 4 + 19i$$

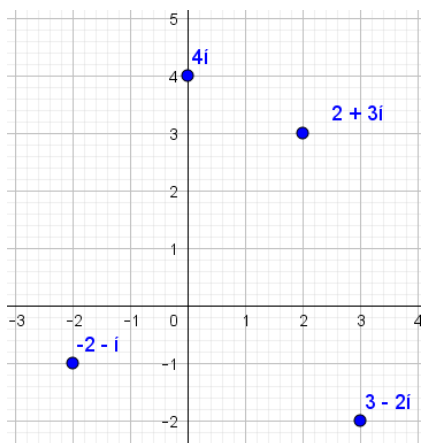
División: (conjugado)

$$\frac{2+3i}{5+2i} = \frac{(2+3i) \cdot (5-2i)}{(5+2i) \cdot (5-2i)} = \frac{10-4i+15i-6i^2}{5^2-(2i)^2} = \frac{16+11i}{25-(-4)} = \frac{16}{29} + \frac{11}{29}i$$

Representación de números complejos

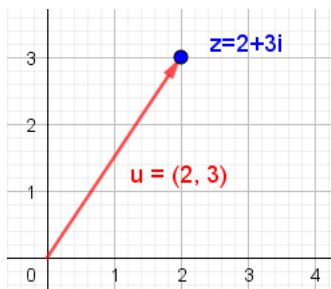
Si los números reales los podíamos representar en una recta, para los números complejos necesitamos un plano.

Si tenemos el número complejo $z=a+b \cdot i$, podemos asociar al complejo z el punto (a,b) . A ese punto se le conoce como **afijo** del complejo.



Módulo y argumento de un complejo

Si consideramos el vector que va desde el punto $(0,0)$ al afijo del complejo z , entonces el módulo de z coincidirá con el módulo de dicho vector.



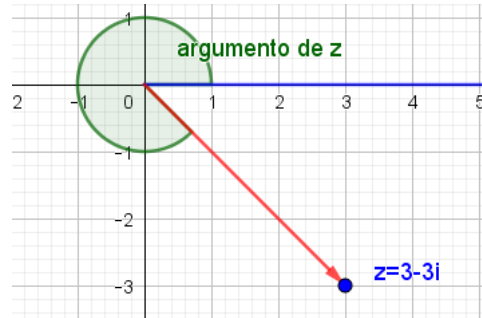
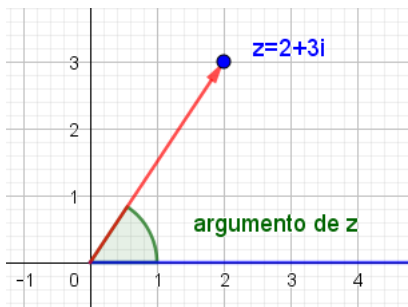
Ejemplo: si $z=2+3i$, entonces $|z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

En general si $z = a + bi$, entonces $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Una propiedad interesante del módulo es que los complejos conjugados tienen el mismo módulo y que si multiplicamos un complejo por su conjugado, el resultado es el módulo al cuadrado.

$$\left. \begin{array}{l} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{array} \right\} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

El **argumento** de un vector es el ángulo que forma el vector correspondiente (el que une el (0,0) con su afijo) y el semieje positivo X.

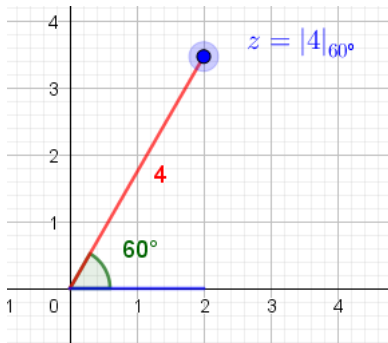


Cabe observar que el argumento de un complejo puede tomar valores entre 0° y 360° .

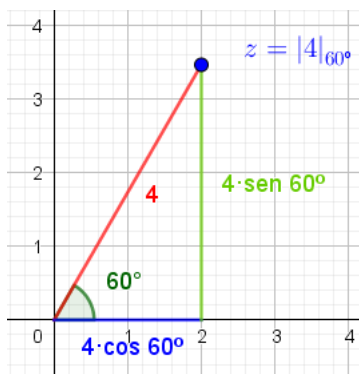
Forma binómica y forma polar

La forma **binómica** de un complejo consiste en expresarlo mediante su parte real más su parte imaginaria, es decir $z = a + bi$

Para expresar un complejo en forma polar se utiliza su módulo y su argumento, es decir $z = |z|_\theta$, donde $|z|$ es el módulo y θ su argumento.



Para pasar de forma polar a forma compleja, tan solo hay que aplicar trigonometría



En general, si $z = |z|_{\theta}$ entonces $z = |z| \cdot \cos \theta + |z| \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot i$ (se puede comprobar que esta fórmula funciona en los cuatro cuadrantes).

Para pasar de binómica a polar, simplemente hay que calcular el módulo y el argumento del complejo.

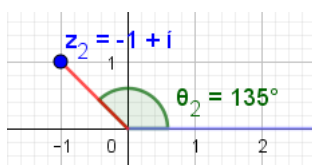
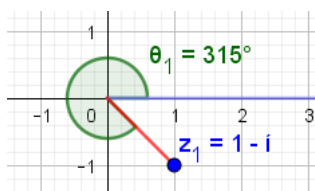
El módulo es sencillo, $z = a + b \cdot i \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Para calcular el argumento hay que usar la tangente: $z = a + b \cdot i \Rightarrow \tan \theta = \frac{b}{a}$, ahora bien, a la hora de utilizar la función arco-tangente de la calculadora, hay que comprobar que el cuadrante sea el correcto.

Ejemplo:

$$z_1 = 1 - i \Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{-1}{1} = -1 \quad z_2 = -1 + i \Rightarrow \tan \theta_2 = \frac{1}{-1} = -1$$

En los dos casos la calculadora (mediante la función arco-tangente) nos devuelve un ángulo de -45° (equivalente a 315°), pero esa solución solo es correcta en uno de los dos casos



Multiplicación y división en forma polar

En forma polar es más sencillo multiplicar y dividir complejos. Para multiplicar, tan solo hay que **multiplicar los módulos y sumar los argumentos**. Para dividir, lo contrario, dividir módulos y restar argumentos.

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 3_{60^\circ} \\ z_2 = 2_{45^\circ} \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 6_{105^\circ} \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = 3_{60^\circ} \\ z_2 = 2_{45^\circ} \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 : z_2 = 1,5_{15^\circ}$$

La justificación de este resultado está, en hacer las operaciones en forma binómica y aplicar las fórmulas de suma y resta de razones trigonométricas

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} z_1 = |z_1|_{\theta_1} \\ z_2 = |z_2|_{\theta_2} \end{array} \right\} &\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (|z_1| \cdot \cos \theta_1 + |z_1| \cdot \operatorname{sen} \theta_1 i) \cdot (|z_2| \cdot \cos \theta_2 + |z_2| \cdot \operatorname{sen} \theta_2 i) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 i + |z_1| \cdot |z_2| \cdot \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 i - |z_1| \cdot |z_2| \cdot \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + |z_1| \cdot |z_2| (\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) \cdot i = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2)) + |z_1| \cdot |z_2| (\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \cdot i = |z_1 \cdot z_2|_{\theta_1 + \theta_2} \end{aligned}$$

(el razonamiento para la división es similar)

Potencia de números complejos

En forma binómica es complejo hacer una potencia: $(1 - i)^4 = (1 - i) \cdot (1 - i) \cdot (1 - i) \cdot (1 - i)$

Sin embargo en forma polar es mucho más sencillo: se eleva el módulo y se multiplica el argumento.

$$1-i=\sqrt{2}_{315^{\circ}} \Rightarrow (1-i)^4=(\sqrt{2}_{315^{\circ}})^4=(\sqrt{2})^4_{315^{\circ} \cdot 4}=4_{1260^{\circ}}=4_{180^{\circ}}=-4$$

Raíces de números complejos

Al igual que con las potencias, la manera más sencilla de hacer raíces es en forma polar. Para ello, al contrario que con la potencia, hacemos la raíz del módulo y dividimos el argumento.

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{8_{180^{\circ}}}=(\sqrt[3]{8})_{180^{\circ}:3}=2_{60^{\circ}}$$

Ahora bien, si nos paramos un momento a reflexionar, $8_{180^{\circ}}$ es lo mismo que -8 , y sabemos que $\sqrt[3]{-8}=-2$, nada que ver con el resultado obtenido.

La respuesta a esta aparente contradicción es que los números complejos tienen varias raíces y hemos encontrado dos de ellas (cada una por un método diferente). Concretamente **un número complejo tiene siempre n raíces de grado n**. La siguiente pregunta es cómo encontrarlas todas.

La respuesta a esta cuestión está relacionada con el concepto de ángulos equivalentes.

En el ejemplo anterior vemos que $2_{60^{\circ}}$ es una raíz cúbica de $8_{180^{\circ}}$ ya que $(2_{60^{\circ}})^3=8_{180^{\circ}}$, ahora bien, si consideramos los complejos $2_{180^{\circ}}=2_{(60^{\circ}+120^{\circ})}$ y $2_{300^{\circ}}=2_{(60^{\circ}+240^{\circ})}$ podemos comprobar que:

$$(2_{180^{\circ}})^3=(2_{(60^{\circ}+120^{\circ})})^3=8_{(180^{\circ}+360^{\circ})}=8_{180^{\circ}}$$

$$(2_{300^{\circ}})^3=(2_{(60^{\circ}+240^{\circ})})^3=8_{(180^{\circ}+720^{\circ})}=8_{180^{\circ}}$$

¿Por qué 120° y 240° ? La respuesta es que $120^{\circ} \cdot 3=360^{\circ}$, con lo que nos da un ángulo equivalente (con 240° ocurre lo mismo al ser múltiplo de 120°)

Si quisiésemos calcular $\sqrt[4]{1_{180^{\circ}}}$, tomaríamos $1_{45^{\circ}}$ e iríamos sumando 90° al argumento, ya que $90^{\circ} \cdot 4=360^{\circ}$. Así pues, todas las raíces serían $1_{45^{\circ}}$, $1_{135^{\circ}}$, $1_{225^{\circ}}$ y $1_{315^{\circ}}$