

Tema 3 – Ecuaciones, inecuaciones e sistemas

Ecuaciones

Ecuaciones biquadradas

Son ecuaciones de cuarto grado, de la forma $ax^4+bx^2+c=0$. Se pueden transformar en ecuaciones de segundo grado mediante el cambio de variable $z=x^2$

Ejemplo:

$$x^4-x^2-2=0 \Leftrightarrow z^2-z-2=0 \Rightarrow \begin{cases} z=-1 \Leftrightarrow x^2=-1 \text{ (en este caso no hay solución)} \\ z=2 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Ecuaciones racionales

Son ecuaciones que tienen denominadores. La estrategia consiste en buscar un denominador común y multiplicar por dicho denominador.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \frac{2x}{2x(x+1)} + \frac{2(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{3x(x+1)}{2x(x+1)} \Leftrightarrow 2x+2(x+1)=3x(x+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x+2x+2=3x^2+3x \Leftrightarrow -3x^2+x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Ecuaciones con radicales

En las ecuaciones con radicales la estrategia es elevar la ecuación a la potencia correspondiente, de tal modo que se anule el radical. Para ello hay que despejarlo previamente.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{2x} = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 - \sqrt{2x} \Leftrightarrow x-1 = (3 - \sqrt{2x})^2 \Leftrightarrow x-1 = 9 + 2x - 6\sqrt{2x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6\sqrt{2x} = x + 10 \Leftrightarrow 36 \cdot 2x = (x+10)^2 \Leftrightarrow 72x = x^2 + 20x + 100 \Leftrightarrow x^2 - 52x + 100 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=50 \end{cases} \end{aligned}$$

Observación importante: cuando elevamos una ecuación al cuadrado (o a una potencia par), la ecuación que obtenemos no es equivalente a la anterior, sino que puede tener más soluciones (por ejemplo $x=2 \Rightarrow x^2=4$). Esto nos obliga a comprobar las soluciones obtenidas.

$$\sqrt{2-1} + \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{1} + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3 \Rightarrow 2 \text{ es solución de la ecuación.}$$

$$\sqrt{50-1} + \sqrt{50 \cdot 2} = \sqrt{49} + \sqrt{100} = 7 + 10 \neq 3 \Rightarrow 50 \text{ no es solución de la ecuación.}$$

Por lo tanto, en el ejemplo anterior, la única solución válida es $x=2$

Ecuaciones logarítmicas

En este tipo de ecuaciones, hay incógnitas dentro de logaritmos.

Los pasos habituales son:

- Utilizar las propiedades de los logaritmos para dejar cada miembro de la ecuación dentro de un logaritmo.
- “Simplificar” los logaritmos. Se pueden eliminar los logaritmos ya que no hay dos cantidades que tengan el mismo logaritmo (si los logaritmos son iguales, las expresiones que hay dentro también han de serlo).
- Resolver la ecuación que queda, ya sin logaritmos.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\log(2x-3)-\log x=2 &\Leftrightarrow \log\left(\frac{2x-3}{x}\right)=\log 100 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x}=100 \Leftrightarrow 2x-3=100x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x-100x=3 \Leftrightarrow -98x=3 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{98} \text{ (no es solución válida)}\end{aligned}$$

Observación: al resolver una ecuación logarítmica hemos de comprobar que las soluciones tengan sentido. En el ejemplo anterior, la ecuación no tendría solución ya que $\log\left(\frac{-3}{98}\right)$ no es una expresión válida.

Cuando las expresiones dentro del logaritmo sean las mismas podemos utilizar la estrategia del cambio de variable para resolver la ecuación.

Ejemplo:

$$\log x + \frac{1}{\log x} = 2 \quad \text{hacemos el cambio } z = \log x, \text{ con lo que la ecuación queda}$$

$$z + \frac{1}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 + 1 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$z = 1 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow 10^1 = x \Leftrightarrow x = 10$$

Ecuaciones exponenciales

En este tipo de ecuaciones, la incógnita aparece en el exponente de una potencia. No hay un método general para resolver ecuaciones exponenciales, pero sí un conjunto de técnicas que nos pueden ayudar.

- **Tomar logaritmos**

$$2^{3x-1} = 7 \Leftrightarrow \log 2^{3x-1} = \log 7 \Leftrightarrow (3x-1) \cdot \log 2 = \log 7 \Leftrightarrow 3x-1 = \frac{\log 7}{\log 2} \approx 2.81 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \approx \frac{2.81+1}{3} = 1.27$$

- **Igualar exponentes**

Aquí necesitamos transformar la ecuación en una igualdad de dos potencias de la misma base

$$4^{x-1} - 2^x = 0 \Leftrightarrow 4^{x-1} = 2^x \Leftrightarrow (2^2)^{x-1} = 2^x \Leftrightarrow 2^{2x-2} = 2^x \Leftrightarrow 2x-2 = x \Leftrightarrow x = 2$$

- **Cambio de variable**

$$4^x - 2^{x+1} + 1 = 0 \quad (\text{aquí buscamos el cambio } z = 2^x)$$

$$(2^2)^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Sistemas de ecuaciones

Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

Para resolver un sistema lineal con dos incógnitas disponemos de 3 métodos analíticos ya vistos en cursos anteriores: igualación, sustitución y reducción.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$

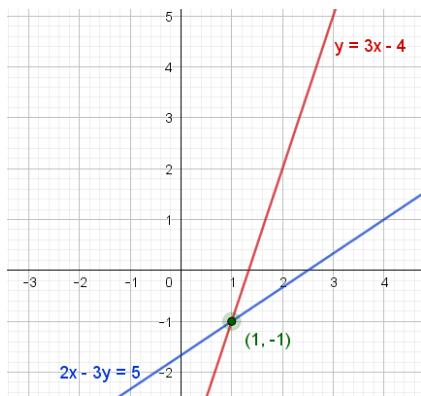
$$2x - 3(3x - 4) = 5 \Rightarrow 2x - 9x + 12 = 5 \Rightarrow -7x = -7 \Rightarrow x = 1 \quad (\text{método de sustitución})$$

$$y = 3 \cdot 1 - 4 \Rightarrow y = -1$$

Interpretación geométrica

Una ecuación lineal con dos incógnitas se corresponde con una recta en el plano, es decir, las coordenadas de los puntos de la recta serán soluciones de dicha ecuación.

La solución del sistema de ecuaciones será aquella que verifique las dos ecuaciones simultáneamente, y se corresponderá con el punto que pertenezca a las dos rectas, es decir, el punto de corte



Clasificación de los sistemas lineales

Al resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas nos podemos encontrar 3 casos:

- Sistema compatible determinado. Hay una única solución, geométricamente, las dos rectas se cortarían.

- Sistema incompatible. No hay ninguna solución, en este caso las rectas serían paralelas.
- Sistema compatible indeterminado. Hay infinitas soluciones, las dos rectas serían equivalentes (estarían superpuestas).

Sistemas no lineales (de 2 ecuaciones y 2 incógnitas)

En estos sistemas de ecuaciones, al menos una de las ecuaciones no será lineal. La estrategia a seguir es utilizar el **método de sustitución** para transformar el sistema en una única ecuación de las estudiadas anteriormente.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$$

En la ecuación de abajo despejamos $y = \frac{2}{x}$, si sustituimos en la de arriba, tenemos:

$$x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 + 4 = 5x^2 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

haciendo el cambio $x^2 = z; x^4 = z^2$

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ z = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

con lo que tenemos 4 pares de soluciones:

$$\begin{array}{ll} x=1; y=2 & \quad x=2; y=1 \\ x=-1; y=-2 & \quad x=-2; y=-1 \end{array}$$

Inecuaciones con una incógnita

Las inecuaciones son desigualdades entre dos expresiones algebraicas. Son similares a las ecuaciones pero en vez del signo “=” aparece un signo de desigualdad: $<$, $>$, \leq o \geq

Inecuaciones lineales

Las inecuaciones lineales se resuelven de manera similar a las ecuaciones, con la única diferencia de que al cambiar de signo la inecuación, también cambia el sentido de la desigualdad.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} (3-2x) \cdot 7 \leq \frac{x-2}{4} &\Leftrightarrow 21 - 14x \leq \frac{x-2}{4} \Leftrightarrow 84 - 56x \leq x - 2 \Leftrightarrow -57x \leq -86 \Leftrightarrow 57x \geq 86 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{86}{57} \quad \text{por tanto la solución será el intervalo } \left[\frac{86}{57}, +\infty \right) \end{aligned}$$

Cabe observar que en las inecuaciones las soluciones suelen ser intervalos o conjuntos formados por uniones de intervalos.

Ejemplo 2:

$$2x - 3 > \frac{3x + 1}{-4} \Leftrightarrow -8x + 12 < 3x + 1 \Leftrightarrow -11x < -11 \Leftrightarrow 11x > 11 \Leftrightarrow x > 1$$

Nótese que en el primer paso cambia el sentido de la desigualdad, ya que al multiplicar la inecuación por -4 estamos cambiando el signo.

Sistemas de inecuaciones

Para resolver un sistema de ecuaciones tan solo tenemos que resolver cada inecuación de manera independiente. La solución del sistema será la intersección de todas las soluciones.

$$\begin{cases} 2x - 2 > 4 \\ x - 1 \leq 3 \end{cases}$$

$$2x - 2 > 4 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3 \rightarrow \text{la solución de esta inecuación es } (3, +\infty)$$

$$x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 4 \rightarrow \text{la solución aquí es } (-\infty, 4]$$

La solución del sistema será $(3, +\infty) \cap (-\infty, 4] = (3, 4]$

Inecuaciones con dos incógnitas

Las soluciones de una inecuación de una incógnita era un conjunto de números reales que se podía representar en la recta.

Las soluciones de una ecuación con dos incógnitas, será un conjunto de pares de números que habrá que representar en el plano, asociando cada solución (pareja de números) con las coordenadas de un punto.

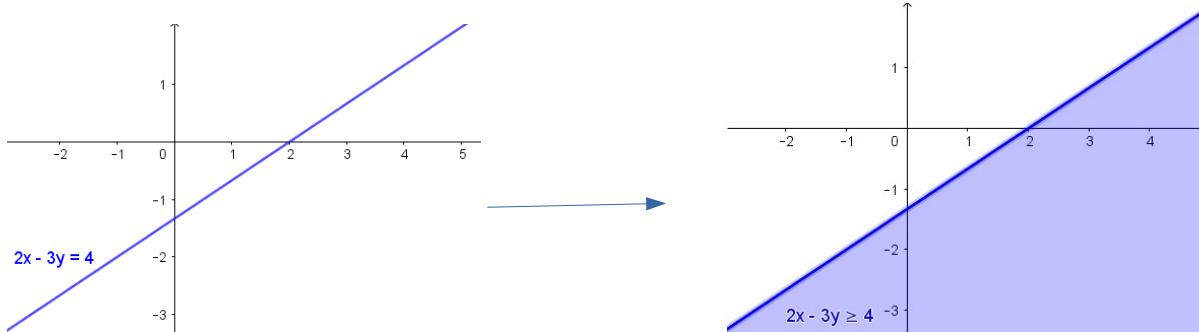
Inecuaciones lineales con 2 incógnitas

$$2x - 3y \geq 4$$

En una inecuación lineal de dos incógnitas, las soluciones forman un semiplano. La ecuación de recta que limita dicho semiplano se obtiene sustituyendo el signo de la inecuación por un “=”

En este caso la recta que limita la región será $2x - 3y = 4 \Leftrightarrow 3y = 2x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{2x - 4}{3}$, la cual

representamos en el plano.

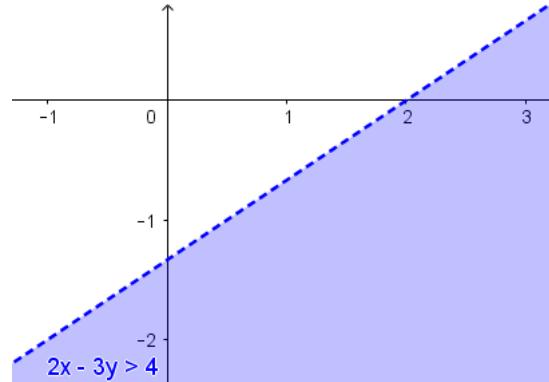
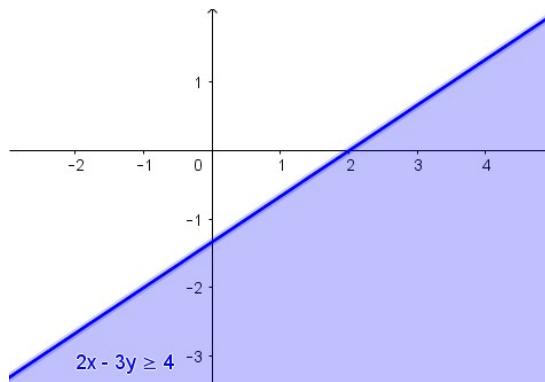


La recta separa el plano en dos regiones, para saber cuál es la solución, elegimos un punto de una de ellas y comprobamos si cumple la inecuación. En nuestro caso probamos con el (0,0)

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 < 4 \text{ con lo que no cumple } 2x - 3y \geq 4$$

Así pues, el $(0,0)$ no forma parte de la solución y esta ha de ser la otra región delimitada por la recta $2x - 3y = 4$

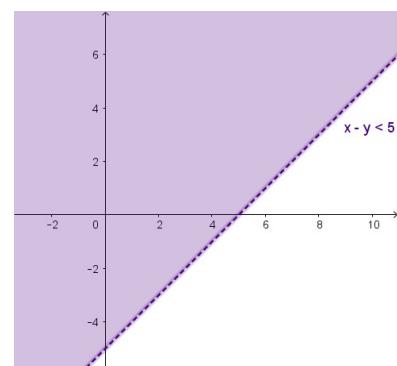
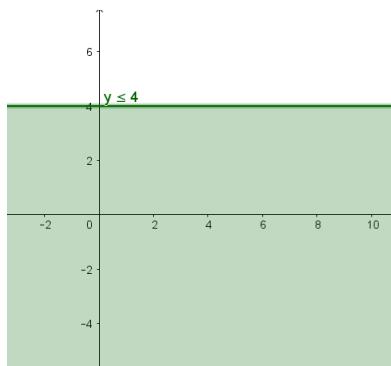
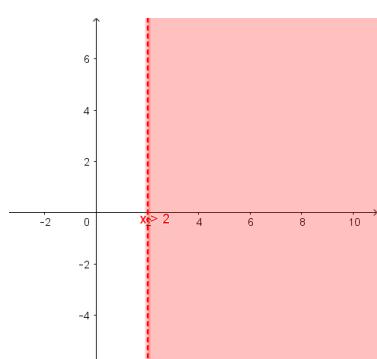
Observación: si la recta frontera forma parte de la solución, esta se representa con trazo continuo. En caso contrario se representa con trazo discontinuo.



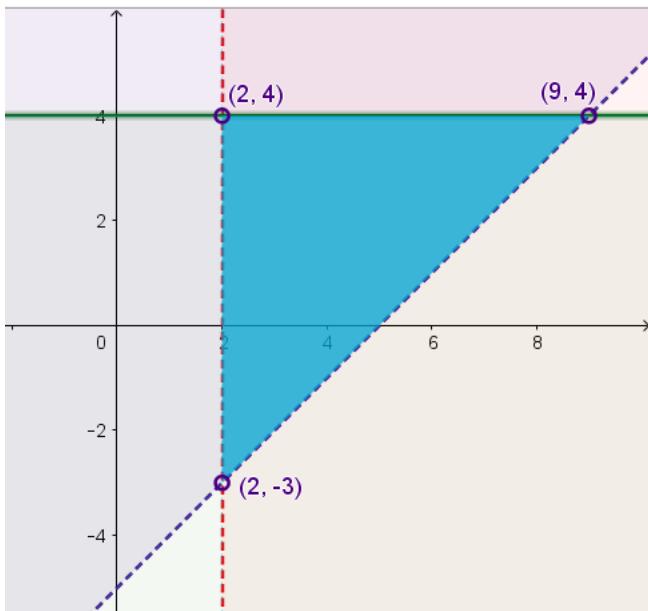
Sistemas de inecuaciones lineales con 2 incógnitas

En estos sistemas se procede de forma análoga a los ya estudiados. Para cada una de las inecuaciones, se representa la región solución. La intersección de todas esas regiones será la solución del sistema.

$$\begin{cases} x > 2 \\ y \leq 4 \\ x - y < 5 \end{cases}$$



Solución del sistema



Observación: para la correcta representación de la solución es importante representar las rectas con precisión y calcular las coordenadas de los vértices de la región (puntos de corte de cada par de rectas).