Matemática financiera

Variaciones porcentuales

Supongamos una cantidad, por ejemplo 5000, la cual aumenta un 12%. Para calcular la cantidad final podemos hacer las operaciones:

$5000+\frac{12}{100}\cdot 5000$ cuyo resultado es 5600.

Otra manera más rápida de hacer el cálculo es 5000·1,12 = 5600, el razonamiento consiste en hacer las mismas operaciones en otro orden.

$$5000+\frac{12}{100}\cdot 5000=\left(1+\frac{12}{100}\right)\cdot 5000=\mathbf{1{,}12\cdot 5000}$$

Esta manera de realizar las operaciones es más eficiente, sobre todo cuando tenemos varias variaciones encadenadas, por ejemplo, supongamos que esa misma cantidad sube un 12%, pero a continuación baja un 20%, para luego subir un 15%

$$5000 \xrightarrow[x\ 1{,}12]{} 5600 \xrightarrow[x\ 0{,}8]{} 4480 \xrightarrow[x\ 1{,}15]{} 5512$$

5000 · 1,12 · 0,8 · 1,15=5512

EL IPC

El IPC (Índice de Precios de Consumo) es un indicador, elaborado por el Instituto Nacional de Estadística (INE), cuyo **objetivo es reflejar la evolución de precios de los productos que consumen habitualmente las familias españolas**.

Para la elaboración del IPC, se seleccionan una serie de productos de consumo habitual y se realiza un muestreo de estos precios en establecimientos comerciales a lo largo de la geografía española (según el INE, unos 29000 establecimientos, localizados en 177 municipios españoles).

Finalmente, en el cálculo del IPC, se pondera la variación de precio de cada uno de estos productos en función del porcentaje del presupuesto familiar destinado a dicho producto. Así pues, el IPC describe una variación porcentual.

Es habitual que muchas rentas como alquileres o pensiones, estén vinculadas al IPC, es decir, el importe de la renta sufrirá el mismo incremento porcentual que el IPC.

Interés bancario

El negocio bancario tradicional consiste en la intermediación. Por un lado tenemos a los que necesitan capital (para montar un negocio, comprar una casa, …), los cuales piden el dinero al banco. El banco, obviamente, cobra a estos clientes un porcentaje del dinero prestado, lo que se conoce como interés del préstamo.

El dinero que presta el banco no procede de fondos propios (no es dinero del banco), sino que pertenece a clientes que depositan fondos en el banco. En circunstancias normales, para conseguir fondos, el banco paga a estos depositarios un interés por tener el dinero en el banco.

La clave del negocio, consiste en que el interés que el banco cobra por los préstamos es mayor que el que paga a los depositarios, obteniendo así un margen de beneficios.

Fórmulas para el cálculo del interés. Interés simple y compuesto.

Interés simple

Para calcular los intereses mediante esta fórmula, lo único que hay que hacer es multiplicar el capital por el coeficiente por el número de periodos

$$I = C \cdot \frac{i}{100} \cdot n$$

Por ejemplo, si tenemos un depósito de 5000 euros a un interés del 6% anual, y a los seis meses retiramos el depósito, según la fórmula del interés simple, los intereses serían

I= 5000 · 0,06 · 0,5=150 €

Aunque esta fórmula es la más simple, en el mundo bancario, lo más habitual es utilizar la fórmula del interés compuesto.

Interés compuesto

En esta fórmula, los intereses correspondientes a cada periodo se añaden al capital y pasan a formar parte de la base para el siguiente cálculo.

$$C_{final} = C_{inicial} \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^{n^o\ periodos}$$

Ejemplo:

Depositamos 5000 euros a un interés del 6% anual durante 5 años, según la fórmula del interés compuesto:

$$C_{final} = 5000 \cdot 1{,}06^5 = 6691{,}13$$

Es decir, finalizados los 5 años recibiremos los 5000€ iniciales más 1691,13€ en concepto de intereses.

Tipo de interés nominal y TAE

El tipo de interés nominal (TIN) es el porcentaje fijo que se pacta por ceder el dinero durante un periodo de tiempo.

En esencia, el TIN es el tipo que los bancos utilizan y nos comunican en los contratos de depósitos, imposiciones, préstamos, créditos e hipotecas.

Tiempo atrás, los bancos ofrecían gran cantidad de productos con diversos periodos y tipos de interés, lo cual hacía difícil comparar su rentabilidad. Por este motivo, el Banco de España (entidad encargada de regular el sistema bancario), obligó a incluir el TAE (tasa anual equivalente) en la información de los productos financieros.

El TAE viene siendo el tipo de interés del producto, calculado para un periodo de un año. Esto permite homogeneizar y comparar productos con diversos periodos de plazo. Además, en caso de que el producto tenga comisiones o gastos, estos deben incluirse en el cálculo del TAE.

Ejemplo 1:

Un banco ofrece una cuenta depósito con un interés nominal del 6% anual y pago mensual de intereses.

En este caso, al ser el pago mensual, hay que calcular el interés para cada periodo: 6% : 12 =0,5%

En un año, el capital que tendremos, será:

$$C_{final}=C_{inicial}\cdot\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^{12}=C_{inicial}\cdot 1,06168$$

Con lo que el TAE será del **6,168%**

Ejemplo 2:

Otro banco ofrece un depósito al 6,36 % nominal durante un plazo del 25 meses. Los intereses se pagan al finalizar el periodo.

El interés obtenido será $6,36\%\cdot\frac{25}{12}=13,25\%$

Con lo que el capital final será

$$C_{final}=C_{inicial}\cdot\left(1+\frac{13,25}{100}\right)=C_{inicial}\cdot 1,1325$$

Si comparamos con la fórmula del interés compuesto (con periodos anuales)

$$C_{final}=C_{inicial}\cdot\left(1+\frac{TAE}{100}\right)^{\frac{25}{12}}$$

obtenemos la ecuación:

$$\left(1+\frac{TAE}{100}\right)^{\frac{25}{12}}=1,1325 \iff 1+\frac{TAE}{100}=\sqrt[\frac{25}{12}]{1,1325}=1,1325^{\frac{12}{25}}=1,06154 \iff$$

$$\iff TAE=(1,06154-1)\cdot 100=\mathbf{6,154\ \%}$$

Ejemplo 3:

Un producto tiene un TAE del 5%, pero los intereses se pagan trimestralmente. Calculemos el tipo nominal.

Teniendo en cuente que en un año hay 4 periodos de pago y en cada uno de ellos el tipo de interés será $\frac{TIN}{4}$

$$C_{final}=C_{inicial}\cdot\left(1+\frac{TIN/4}{100}\right)^{4}$$

Por otra parte $C_{final}=C_{inicial}\cdot 1,05$ con lo que

$$\left(1+\frac{TIN/4}{100}\right)^{4}=1,05 \iff 1+\frac{TIN}{400}=\sqrt[4]{1,05} \iff TIN=(\sqrt[4]{1,05}-1)\cdot 400=\mathbf{4,9089\ \%}$$

Capitalización

Supongamos que queremos ahorrar para comprar un coche. Para ello contratamos un producto que nos permite aportar una cantidad fija todos los meses. Dicho producto nos ofrece un interés nominal anual del 6%, cuyos intereses se pagan cada mes y son añadidos al capital.

Si aportamos una cantidad de 300€ cada mes durante dos años, ¿qué cantidad conseguiremos ahorrar?

En primer lugar hemos de tener en cuenta que hay una aportación inicial (mes 0) y una final (mes 24), lo que hacen un total de 25 aportaciones. Cada una de estas aportaciones genera una cantidad diferente de intereses (las del principio generan más por tener un plazo superior). Así pues:

Aportación 0: $300\,€ \rightarrow 300\cdot\left(1+\frac{6/12}{100}\right)^{24}=300\cdot 1{,}005^{24}$

Aportación 1: $300\,€ \rightarrow 300\cdot 1{,}005^{23}$

…

Aportación 24: $300\,€ \rightarrow 300\cdot 1{,}005$

Aportación 25: $300\,€ \rightarrow 300$ (al no transcurrir plazo, no generan intereses)

Para calcular la cantidad final, debemos sumar todas las aportaciones (con sus intereses)

$$C_{final}=300\cdot 1{,}005^{24}+300\cdot 1{,}005^{23}+\ \ldots\ +300\cdot 1{,}005+300$$

La cual coincide con la suma de los 25 primeros términos de una progresión geométrica (podemos considerar $a_1=300$, $a_{25}=300\cdot 1{,}005^{24}$ y $R=1{,}005$

Recordamos la fórmula de la suma de una progresión geométrica:

$$S_n=\frac{a_n\cdot R-a_1}{R-1}$$

En este caso

$$C_{final}=\frac{300\cdot 1{,}005^{24}\cdot 1{,}005-300}{1{,}005-1}=300\cdot\frac{1{,}005^{25}-1}{0{,}005}=\mathbf{7967{,}53\,€}$$

Generalizando, podemos obtener la fórmula

$$C_{final}=Cuota\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{n}-1}{i/100}$$

En donde n es el número de pagos e i la tasa de interés efectivo (el % de interés que se paga en cada plazo).

Préstamos bancarios

En este caso somos nosotros los que pedimos prestado, y además de devolver el capital, tendremos que pagar también los correspondientes intereses. Veamos un ejemplo.

Supongamos que financiamos la compra de un coche mediante un préstamo de 12000 € a un interés del 8% TAE. Dicho préstamo lo hemos de pagar en cuotas de 300€ mensuales.

Lo primero que debemos hacer es calcular la tasa de interés efectiva, es decir, el porcentaje que hemos de pagar cada mes en concepto de intereses. Al ser 12 periodos:

$$\left(1+\frac{i}{100}\right)^{12}=1+\frac{8}{100} \Leftrightarrow 1+\frac{i}{100}=\sqrt[12]{1{,}08} \Leftrightarrow i=100\cdot(\sqrt[12]{1{,}08}-1)=\mathbf{0{,}6434\,\%}$$

De este modo, al final del primer mes, hemos de pagar 0,6434% de 12000€ = 77,21 € en concepto de intereses y el resto del dinero de la cuota (222,79€) es dinero que devolvemos.

El siguiente mes, pagaremos en intereses el 0,6434% de 11777,21€, y el resto de la cuota será dinero que devolvamos. El proceso se repite hasta devolver todo el capital.

Periodo	Cuota	Intereses	Amortización	Capital pendiente
0				12.000,00 €
1	300,00 €	77,21 €	222,79 €	11.777,21 €
2	300,00 €	75,77 €	224,23 €	11.552,98 €
3	300,00 €	74,33 €	225,67 €	11.327,31 €
4	300,00 €	72,88 €	227,12 €	11.100,19 €
5	300,00 €	71,42 €	228,58 €	10.871,61 €
6	300,00 €	69,95 €	230,05 €	10.641,56 €
7	300,00 €	68,47 €	231,53 €	10.410,03 €
8	300,00 €	66,98 €	233,02 €	10.177,01 €
9	300,00 €	65,48 €	234,52 €	9.942,49 €
10	300,00 €	63,97 €	236,03 €	9.706,46 €
11	300,00 €	62,45 €	237,55 €	9.468,91 €
12	300,00 €	60,92 €	239,08 €	9.229,83 €

Aquí podemos ver la evolución del préstamo durante el primer año.

A partir de aquí podemos plantearnos dos cuestiones fundamentales:

- Con esa cuota de 300€, ¿cuánto tardaremos en devolver el préstamo?
- Si queremos devolver el préstamo en un plazo determinado (por ejemplo 3 años), ¿cuál debería ser la cuota?

Las respuestas a estas dos cuestiones, se basan en pensar en el pago de cuotas como una capitalización, y mediante dicha capitalización devolvemos el capital más los intereses. Es decir, al acabar de pagar el préstamo, debe cumplirse:

$$\boxed{Capital\cdot\left(1+\frac{i}{100}\right)^{n}=Cuota\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{n}-1}{i/100}}$$

Capital + intereses al finalizar el préstamo

Capitalización realizada durante todo el periodo del préstamo

n: número de periodos de pago

i: tipo de interés efectivo (interés que se paga en cada periodo)

En nuestro caso, tenemos:

Capital= 12000€ Cuota= 300€ i= 0,6434%

Con lo que obtenemos la siguiente ecuación, que nos permite calcular el número de periodos:

$$12000\cdot 1{,}006434^n=300\cdot\frac{1{,}00634^n-1}{0{,}006434}\iff\frac{12000\cdot 0{,}006434}{300}\cdot 1{,}006434^n=1{,}00634^n-1\iff$$

$$\iff 0{,}25736\cdot 1{,}006434^n=1{,}00634^n-1\iff 1=1{,}00634^n-0{,}25736\cdot 1{,}006434^n\iff$$

$$\iff 1=(1-0{,}25736)\cdot 1{,}006434^n\iff\frac{1}{(1-0{,}25736)}=1{,}006434^n\iff 1{,}3465=1{,}006434^n\iff$$

$$\iff n=\frac{\log 1{,}3465}{\log 1{,}006434}\approx\mathbf{46{,}39}$$

Por lo tanto para pagar el préstamo necesitará 47 meses, aunque la última cuota no será completa.

Ahora respondamos a la segunda cuestión: ¿cuál debería ser la cuota si quisiésemos devolver el préstamo en 3 años?

En este caso, sustituyendo en la fórmula:

$$Capital\cdot\left(1+\frac{i}{100}\right)^n=Cuota\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n-1}{i/100}$$

Capital = 12000€ i=0,6434% n=36

$$12000\cdot 1{,}006434^{36}=Cuota\cdot\frac{1{,}006434^{36}-1}{0{,}006434}\iff 15116{,}53=Cuota\cdot 40{,}3653\iff$$

$$\iff Cuota=\frac{15116{,}53}{40{,}3653}=\mathbf{374{,}49\ €}$$

Préstamos con interés variable

Es habitual, para préstamos de larga duración como hipotecas, que las entidades ofrezcan productos con interés variable. Esto quiere decir que el tipo de interés del préstamo cambia periódicamente (normalmente cada año).

Lo habitual en este tipo de productos es que el tipo de interés esté calculado a partir de un índice de referencia, generalmente el Euribor. El Euribor es un índice que refleja el tipo de interés del mercado interbancario (lo que se cobran los bancos al prestarse dinero entre ellos).

Ejemplo:

Pedimos una hipoteca de 100.000 € a 20 años, con un tipo de interés Euribor+2% revisable anualmente. En estos momentos el Euribor está en 1,25%.

Con estos datos el tipo de interés durante el primer año será del 3,25%. Es con esta tasa con la que debemos calcular el valor de las cuotas:

Para calcular el interés efectivo mensual:

$$\left(1+\frac{i}{100}\right)^{12}=1+\frac{3,25}{100} \Leftrightarrow 1+\frac{i}{100}=\sqrt[12]{1,0325} \Leftrightarrow i=100\cdot\left(\sqrt[12]{1,0325}-1\right)=\mathbf{0,2669\,\%}$$

Para calcular la cuota:

$$Capital\cdot\left(1+\frac{i}{100}\right)^{n}=Cuota\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{n}-1}{i/100}$$

teniendo en cuenta Capital=100.000 € , i=0,2669% y n=240

$$100000\cdot(1,002669)^{240}=Cuota\cdot\frac{(1,002669)^{240}-1}{0,002669} \Leftrightarrow 189592,47=Cuota\cdot 335,678$$

Con lo que obtenemos una cuota mensual de **568,80€**

Con estos datos podemos realizar la tabla de amortización para el primer año

Periodo	Cuota	Interés	Amortización	Capital pendiente
0				100.000,00 €
1	568,80 €	266,90 €	301,90 €	99.698,10 €
2	568,80 €	0,00 €	568,80 €	99.129,30 €
3	568,80 €	0,00 €	568,80 €	98.560,50 €
4	568,80 €	0,00 €	568,80 €	97.991,70 €
5	568,80 €	0,00 €	568,80 €	97.422,90 €
6	568,80 €	0,00 €	568,80 €	96.854,10 €
7	568,80 €	0,00 €	568,80 €	96.285,30 €
8	568,80 €	0,00 €	568,80 €	95.716,50 €
9	568,80 €	0,00 €	568,80 €	95.147,70 €
10	568,80 €	0,00 €	568,80 €	94.578,90 €
11	568,80 €	0,00 €	568,80 €	94.010,10 €
12	568,80 €	0,00 €	568,80 €	93.441,30 €

Vemos pues, que al término del primer año el capital que resta por amortizar es de **93.441,30€**

Supongamos ahora que al término del primer año, el Euribor está en el 2% (con lo que nuestro tipo sería Euribor+2% =4%).

En este caso, tendríamos que **volver a calcular la cuota**, siendo la TAE del 4%, el capital 93.441,30€ y el plazo 19 años.

El interés efectivo mensual sería $i=100\cdot\left(\sqrt[12]{1,04}-1\right)=\mathbf{0,3274\,\%}$

y para calcular la cuota

$$93.441,3\cdot(1,003274)^{228}=Cuota\cdot\frac{(1,003274)^{228}-1}{0,003274} \Leftrightarrow 196878,37=Cuota\cdot 338,11$$

Con lo que la nueva cuota para el segundo año será de **582,29 €**