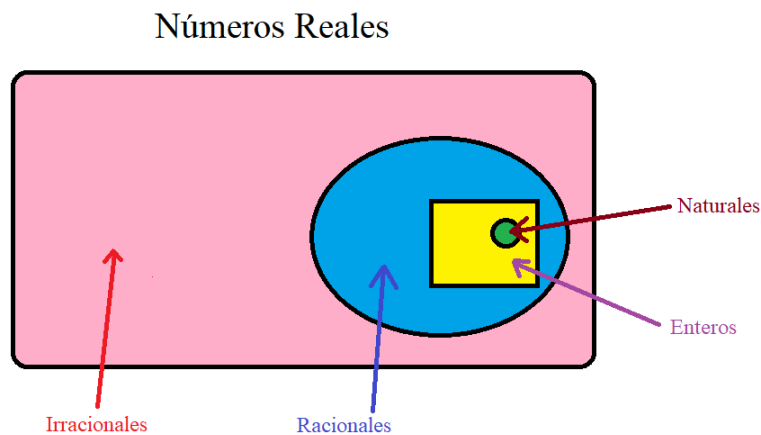


Tema 1 Números Reales

Tipos de números



Naturales:

$\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ (usados para contar)

Enteros:

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (positivos + negativos + cero)

- Los números negativos y el cero surgieron a partir del desarrollo del comercio (necesidad de un registro contable)

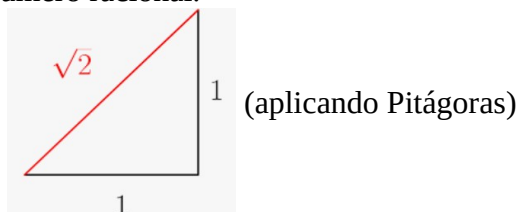
Racionales:

$\mathbb{Q} = \{\dots, -7, \dots, -2.75, \dots, -\frac{1}{3}, 0, 2.3333\dots, \dots\}$

- Los números racionales surgieron a partir de la necesidad de hacer repartos (las divisiones no siempre dan resultados enteros).
- Las **características fundamentales** de los números racionales son:
 - Se pueden escribir en forma de fracción.
 - Su expresión decimal es finita o periódica.

Irracionales

- Son aquellos números que no se pueden representar mediante una fracción y tienen una expresión decimal infinita y no periódica.
- Un ejemplo de número racional es $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$, pero hay muchos más, algunos muy famosos como $\pi = 3.1415965\dots$ ó $e = 2.718281\dots$
- Los irracionales aparecieron en la antigua Grecia, al calcular medidas donde el resultado no era un número racional.



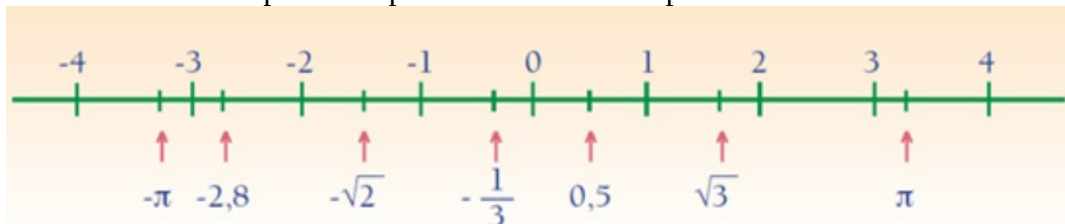
Reales

- Los números reales es el conjunto formado por la unión de racionales e irracionales.

Representación de números reales

Recta Real

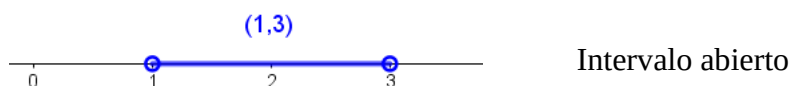
Los números reales pueden representarse mediante puntos en una recta



La posición de los números en la recta determina un orden: cuanto más a la derecha esté posicionado, mayor será un número.

Intervalos

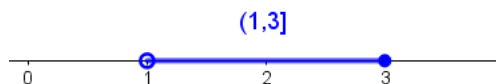
Frecuentemente es necesario trabajar con conjuntos de números reales consecutivos, esos conjuntos se conocen como intervalos.



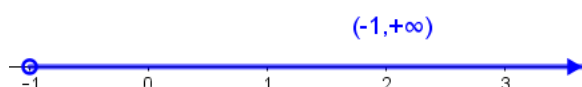
$(1,3) = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 3\}$ → conjunto de números reales mayores que 1 y menores que 3



$[1,3] = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 3\}$ → conjunto de números reales mayores o iguales que 1 y menores o iguales que 3 (a diferencia del anterior, el 1 y el 3 están incluidos)



$(1,3] = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 3\}$ → conjunto de números reales mayores que 1 y menores o iguales que 3 (el 3 está incluido, el 1 no)



$(-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x\}$ → conjunto de números reales mayores que -1

Valor absoluto y distancia

- Se define el valor absoluto de un número mediante la función:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- El valor absoluto se puede utilizar para definir la distancia entre 2 números:

$$d(a, b) = |b - a|$$

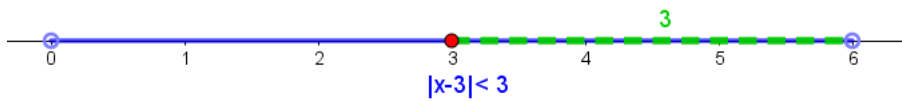
Por ejemplo $d(5, 3) = |3 - 5| = |-2| = 2$

- El valor absoluto nos permite expresar intervalos utilizando el centro y el radio:

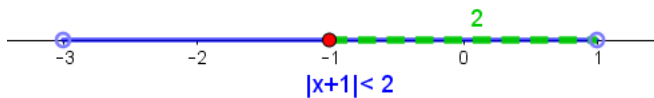
$$\{x \in \mathbb{R} / |x - C| < R\} = (C - R, C + R)$$

Ejemplos:

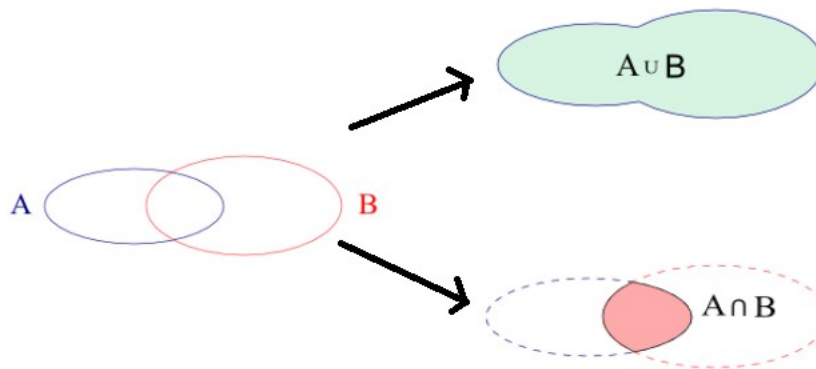
$$\{x \in \mathbb{R} / |x-3| < 3\} = (0,6)$$



$$\{x \in \mathbb{R} / |x+1| < 2\} = (-3,1)$$



Unión e intersección

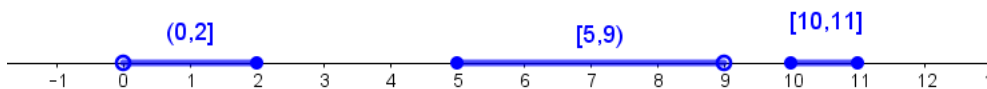


- La unión de dos conjuntos A y B consiste en un nuevo conjunto $A \cup B$, formado por todos los elementos de A y de B.
- La intersección de A y B es el conjunto $A \cap B$ formado por los elementos comunes de A y B
- Los intervalos, como conjuntos que son, también se pueden unir e intersectar:

$$(-1,2] \cup (0,7) = (-1,7)$$

$$(-1,2] \cap (0,7) = (0,2]$$

- Es habitual expresar conjuntos de números reales como unión de intervalos:



Los números marcados en azul forman el conjunto $(0,2] \cup [5,9) \cup [10,11]$

Aproximaciones y errores

Es habitual encontrarnos con números con muchas cifras decimales (sobre todo teniendo en cuenta que casi todos los números reales tienen infinitas cifras), lo cual es un inconveniente a la hora de representar dichas cantidades u operar con ellas. Por todo esto se suelen aproximar números con muchas cifras (o incluso infinitas) por otros que tengan pocas y sean más manejables.

- Aproximación por truncamiento: consiste en “cortar” la expresión numérica en la cifra deseada:

$$1,237254... \approx 1,23 \quad (\text{aproximación por truncamiento a las centésimas})$$

- Aproximación por redondeo: después del truncamiento se decide si nos quedamos con esa aproximación o es mejor aproximar al número siguiente.

$$1,237254... \approx 1,24 \quad (\text{aproximación por redondeo a las centésimas})$$

- Para aproximar por redondeo se tiene en cuenta la primera cifra que queda fuera del truncamiento, si esta cifra es 0-4 nos quedamos con el truncamiento, mientras que si es 5-9 aproximamos al siguiente número.

Cada vez que realizamos una aproximación cometemos un error. Al realizar operaciones, esos errores pueden acumularse, con lo que podríamos obtener una cantidad alejada del resultado correcto. Debido a esto, es necesario estudiar los errores cometidos y como mantenerlos por debajo del límite deseado.

- $\text{Error absoluto} = |\text{número exacto} - \text{aproximación}|$

$$1,23254... \approx 1,23 \Rightarrow E_a = |1,23254... - 1,23| = 0,00254...$$

- $\text{Error relativo} = \frac{|\text{número exacto} - \text{aproximación}|}{|\text{número exacto}|} \cdot 100\%$

$$1,237254 \approx 1,24 \Rightarrow E_r = \frac{|1,237254 - 1,24|}{1,237254} \approx 0.0022$$

En la práctica, no interesa calcular el error relativo o absoluto, sino que llega con asegurarse de que dichos errores están por debajo de cierto nivel (el cual depende de la precisión que requiera el problema).

- El **error absoluto depende de la cantidad de decimales** con la que se realice la aproximación. Por ejemplo, si aproximamos a las centésimas por redondeo, el error absoluto será a lo sumo de media centésima. Si aproximamos por redondeo, se cumple:

$$E_a \leq 0.5 \cdot 10^{-D}, \text{ donde } D \text{ es la cantidad de cifras decimales con la que aproximamos.}$$

$$1,237254... \approx 1,23 \Rightarrow E_a \leq 0.5 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow E_a \leq 0.005$$

- El **error relativo depende de la cantidad de cifras significativas** con la que se realiza la aproximación. Aproximando por redondeo, se cumple:

$$E_r \leq 5 \cdot 10^{-S}, \text{ donde } S \text{ es la cantidad de cifras significativas con la que aproximamos.}$$

- Las cifras significativas son aquellas que resultan de desechar los ceros a la izquierda y a la derecha.

$1253,257 \approx 1250$ (aproximación con 3 cifras significativas)

$1,35487 \approx 1,355$ (aproximación con 4 cifras significativas)

$25,3996 \approx 25,4$ (aquí aunque parece una aproximación con 3 cifras, se considera de 5 cifras significativas ya que con 5 cifras la aproximación sería equivalente $25,3996 \approx 25,400$)

Potencias

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

$$5^0 = 1$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{2^{-4} \cdot 3^5}{5^2 \cdot 7^{-3}} = \frac{3^5 \cdot 7^3}{5^2 \cdot 2^4}$$

Propiedades de las potencias

- $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Notación científica

Las cantidades se representan en notación científica mediante un número decimal, cuyo valor absoluto está entre 1 y 10, multiplicado por una potencia de 10

$$2\,345\,000\,000 = 2,345 \cdot 10^9$$

$$-0,000\,000\,278 = -2,78 \cdot 10^{-7}$$

Multiplicación y división

- Para multiplicar dos cantidades en notación científica, se multiplican las partes similares de cada una de las expresiones:

$$2,6 \cdot 10^{12} \cdot 1,4 \cdot 10^7 = (2,6 \cdot 1,4) \cdot (10^{12} \cdot 10^7) = 3,64 \cdot 10^{19}$$

- La división es análoga:

$$(2,6 \cdot 10^{12}) : (1,3 \cdot 10^7) = (2,6 : 1,3) \cdot (10^{12} : 10^7) = 2 \cdot 10^5$$

Cabe observar que al realizar estas operaciones, en general, el resultado no queda expresado en notación científica, por lo que suele ser necesario realizar algún ajuste adicional:

$$(3 \cdot 10^{22}) \cdot (4 \cdot 10^{14}) = 12 \cdot 10^{36} = 1,2 \cdot 10^{37}$$

- Para sumar y restar es necesario expresar primero las cantidades con el mismo exponente:

$$1,23 \cdot 10^{34} + 2,12 \cdot 10^{32} = 1,23 \cdot 10^{34} + 0,0212 \cdot 10^{34} = 1,2512 \cdot 10^{34}$$

Si sumamos o restamos cantidades de diferente magnitud, podemos comprobar que la cantidad menor suele ser despreciable:

$$1 \cdot 10^{34} + 2 \cdot 10^{22} = 1 \cdot 10^{34} + 0,000\,000\,000\,002 \cdot 10^{34} = 1,000\,000\,000\,002 \cdot 10^{34} \approx 1 \cdot 10^{34}$$

Raíces

$$\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow a^n=b$$

$$\sqrt[5]{32}=2 \Leftrightarrow 2^5=32$$

- Las raíces se pueden expresar como potencias de exponente racional

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

Esto es debido a que, según las propiedades de las potencias $(a^{(1/n)})^n=a$, con lo que $\sqrt[n]{a}=a^{(1/n)}$

- Las potencias de exponente racional también se pueden expresar utilizando raíces:

$$a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$$

- Debido a que las raíces son equivalentes a potencias, heredan las propiedades de estas.

Paso de raíces a índice común

A veces es necesario expresar dos radicales con el mismo índice, por ejemplo para compararlos o simplificar alguna expresión:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{a} &= a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{a^4} \\ \sqrt[4]{b} &= b^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{b^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[12]{a^4} \cdot \sqrt[12]{b^3} = \sqrt[12]{a^4 \cdot b^3}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{7} &= 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{49} \\ \sqrt{5} &= 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{7} < \sqrt{5}$$

Extracción de factores del radical

Podemos extraer un factor de una raíz siempre que tenga un exponente que sea múltiplo del índice de la raíz:

$$\sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[4]{3^8 \cdot 5} = 3^2 \cdot \sqrt[4]{5}$$

Esto nos puede servir para simplificar expresiones con radicales:

$$\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

Racionalización

Racionalizar una expresión consiste en eliminar el radical de denominador. Para ello se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^2}}{a}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-3} = \frac{-1+\sqrt{2}}{3} \quad (\text{utilizando el conjugado})$$

Logaritmos

$$\log_a X = Y \Leftrightarrow a^Y = X$$

Ejemplos:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$\log_5 1 = 0 \Leftrightarrow 5^0 = 1$$

Propiedades

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a (X \cdot Y) = \log_a X + \log_a Y$
- $\log_a \left(\frac{X}{Y} \right) = \log_a X - \log_a Y$
- $\log_a X^k = k \cdot \log_a X$
- $\log_b X = \frac{\log_a X}{\log_a b}$

Si al escribir el logaritmo se omite la base, se entiende que trabajamos en base 10:

$$\log X = \log_{10} X$$

Al logaritmo de base e se le conoce como logaritmo neperiano ($e \approx 2,718281\dots$)

$$\ln X = \log_e X$$