

EJERCICIOS TEMA 9. LÍMITES Y CONTINUIDAD.

20. a) Si se puede calcular el límite, pero la función en ningún caso podría ser continua, puesto que si $\neq f(a)$, no se podrá cumplir la definición: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + x) = 0$

Pero $\neq f(0)$
b) Si, una función puede tener infinitas asíntotas verticales. Por ejemplo:
 $f(x) = \tan x$ En los puntos $x = \pi/2 + \pi k / k \in \mathbb{Z}$ esta función tiene asíntotas verticales.

c) No siempre. Puede suceder que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ y en este caso la discontinuidad sería evitable. Por ejemplo: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$. $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = \left(\frac{0}{0} \text{ INDET}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x-2)} = \frac{0}{-1} = \boxed{0} \Rightarrow$ En $x=2$ la discont. es evitable $\Rightarrow$ No hay asíntota.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{0} \text{ INDET.}$
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 $\Rightarrow$ En $x=3$ la discont. es de salto infinito
 $\Downarrow$
 Asíntota vertical

d) No puede tener más de dos asíntotas horizontales, pues éstas estudian el comportamiento de la función cuando $x \rightarrow +\infty$ u $x \rightarrow -\infty$, así habrá como máximo 2 asíntotas horizontales si se cumple que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k_1 \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k_2$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

e) No, necesitamos añadir la condición: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 = f(2)$ para que se cumpla la definición de función continua en $x=2$.

21. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8} = \left(\frac{0}{0} \text{ INDET}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 8)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
 $f(1) = \frac{0}{0} \neq \frac{1}{5}$
 $\Rightarrow f(x)$ presenta discont. evitable en $x=1$

22. a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow f(x)$ discontinua en $x=1$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left(\frac{0}{0} \text{ INDET}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \neq f(1) (\neq f(1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ En $x=1$ hay una discontinuidad evitable $\Rightarrow$ Esta función se puede ampliar a otra función: $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ que sí es

continua en $x=1$, ya que $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1)$.

24- $f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ k & \text{si } x = 3 \end{cases}$ continua en $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ cont. en $x=3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \left(\frac{0}{0} \text{ INDET}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6 \quad \Rightarrow \boxed{k=6}$

$f(3) = k$

25- $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$ Posibles discontinuidades: $x=2$ y $x=\frac{1}{2}$

En $x=2$: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+2) \cdot (x-\frac{1}{2})}{f(x-2) \cdot (x-\frac{1}{2})} = \frac{4}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Discont. de} \\ \text{salto infinito} \end{array} \right.$ en $x=2$

$2x^2-5x+2=0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 1/2 \end{cases}$
 $2x^2+3x-2=0 \Rightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 1/2 \end{cases}$

En $x = \frac{1}{2}$: $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) = \left(\frac{0}{0} \text{ INDET}\right) = \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x+2}{x-2} = \frac{5/2}{-3/2} = -\frac{5}{3} = f(\frac{1}{2})$

26- $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\frac{\text{cont.}}{x+1} \quad \frac{\text{cont.}}{3-ax^2}$ $f(x)$ es continua en $x=1/2$

Para que $f(x)$ sea cont. en $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ cont. en $x=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} (3-ax^2) = 3-4a$

$\Rightarrow 3 = 3-4a \Rightarrow \boxed{a=0}$

27- $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $\frac{\ln x}{0 \text{ cont.}} \quad \frac{ax^2+b}{1 \text{ cont.}}$

$f(x)$ cont. $\Rightarrow f(x)$ cont. en $x=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \boxed{a=-b}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2+b = a+b$

$f(2) = 3 \Rightarrow \boxed{4a+b=3}$

$a=-b$
 $4a+b=3 \Rightarrow 4a-a=3 \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow \boxed{a=1}$
 $\boxed{b=-1}$

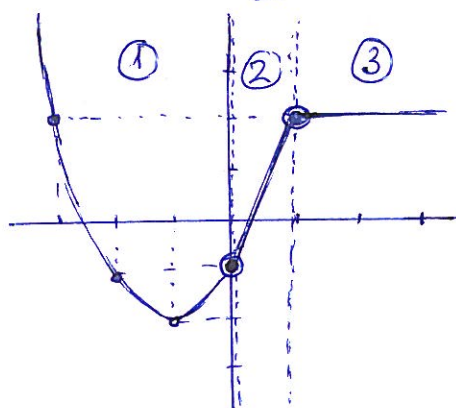
28- $f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x < 0 \quad \textcircled{1} \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x < 1 \quad \textcircled{2} \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \quad \textcircled{3} \end{cases}$

$f(x)$ continua $\Rightarrow f(x)$ cont. en $x=0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \boxed{b=-1}$

$\Downarrow$

$f(x)$ continua en $x=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a+b=2 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+2x-1) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a+b$



① $y = x^2+2x-1$ / $x < 0$
 $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$

x	y
-1	-2
-2	-1
-3	2

Vértice

② $y = 3x-1$

x	y
0	-1
1	2