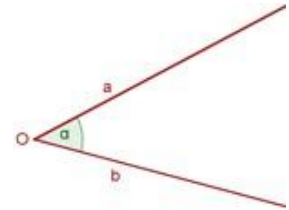


TEMA 4: TRIGONOMETRÍA

Medida de ángulos

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama **lados** y al origen común **vértice**.

El ángulo es **positivo** si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y **negativo** en caso contrario



Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

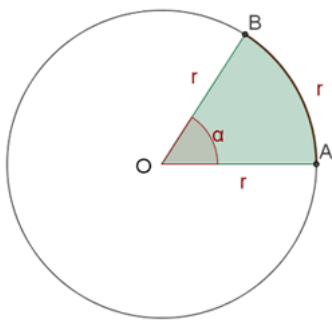
- **Grado sexagesimal (°)**

Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal.

Un grado tiene 60 minutos (') y un minuto tiene 60 segundos (").

- **Radián (rad)**

Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio.



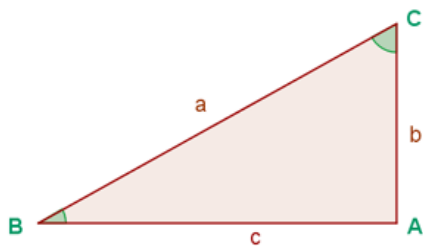
$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$30^\circ \longrightarrow \text{rad} \quad \frac{\pi}{\alpha} = \frac{180^\circ}{30^\circ} \quad \alpha = \frac{30^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\frac{\pi}{3} \longrightarrow ^\circ \quad \frac{\pi}{\alpha} = \frac{180^\circ}{\alpha} \quad \alpha = \frac{180^\circ \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Razones trigonométricas



▪ Seno

$$\text{sen } B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

▪ Coseno

$$\text{cos } B = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

▪ Tangente

$$\text{tg } B = \frac{\text{sen } B}{\text{cos } B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

▪ Cosecante

$$\text{cosec } B = \frac{1}{\text{sen } B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

▪ Secante

$$\text{sec } B = \frac{1}{\text{cos } B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$$

▪ Cotangente

$$\text{cotg } B = \frac{1}{\text{tg } B} = \frac{\text{cos } B}{\text{sen } B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

Circunferencia goniométrica

Se llama circunferencia goniométrica a aquella que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio es la unidad. En la circunferencia goniométrica los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

El seno es la ordenada (y).

$$\text{sen } \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = \text{PQ}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{OP}{PQ} = \frac{OS'}{OT'} = \frac{OS'}{r} = OS'$$

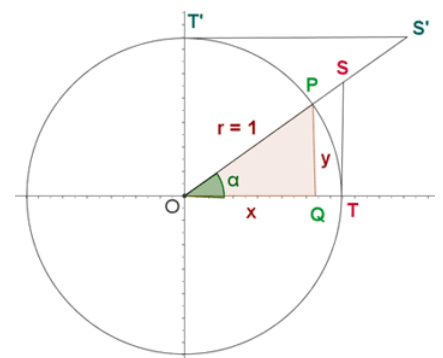
El coseno es la abscisa (x).

$$\text{cos } \alpha = \frac{OQ}{OP} = \text{OQ}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{OT} = \frac{OS}{r} = OS$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{r} = ST$$

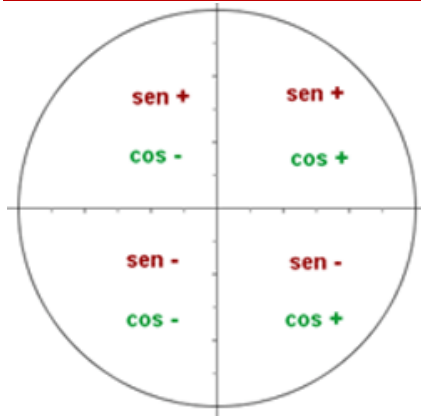
$$\text{cotg } \alpha = \frac{OQ}{PQ} = \frac{S'T'}{OT'} = \frac{S'T'}{r} = S'T'$$



$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$$

Signo de las razones trigonométricas



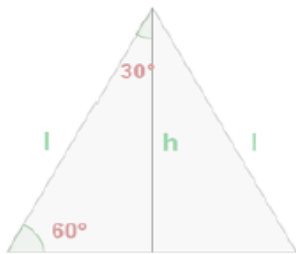
Razones trigonométricas de 0°, 90°, 180° y 270°

$\alpha :$	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

- Seno, coseno y tangente de 30° y 60°

Si dibujamos un triángulo equilátero ABC, cada uno de sus tres ángulos mide 60° y, si trazamos una altura del mismo, h, el ángulo del vértice A por el que la hemos trazado queda dividido en dos iguales de 30° cada uno. Recurriendo al Teorema de Pitágoras, tenemos que la altura es:



$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

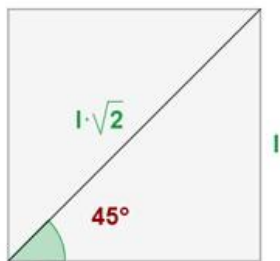
$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} l} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$$

- Seno, coseno y tangente de 45°



$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

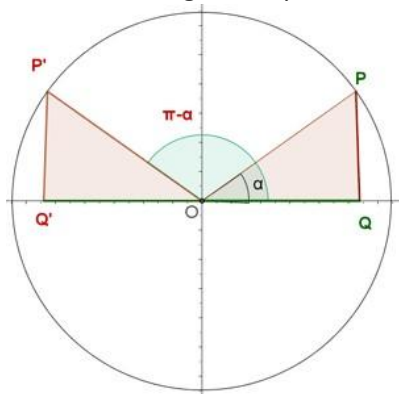
$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Razones trigonométricas de ángulos notables

$\alpha :$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

Relaciones entre ángulos: reducciones al 1º cuadrante.

- Ángulos suplementarios (Son aquéllos cuya suma es 180° ó π radianes).



$$\text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (\pi - \alpha) = -\text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$$

$$\text{sen } 150^\circ = \text{sen } (180^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 150^\circ = \text{cos } (180^\circ - 30^\circ) = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 150^\circ = \text{tg } (180^\circ - 30^\circ) = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Ángulos que se diferencian en 180°

$$\text{sen } (\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

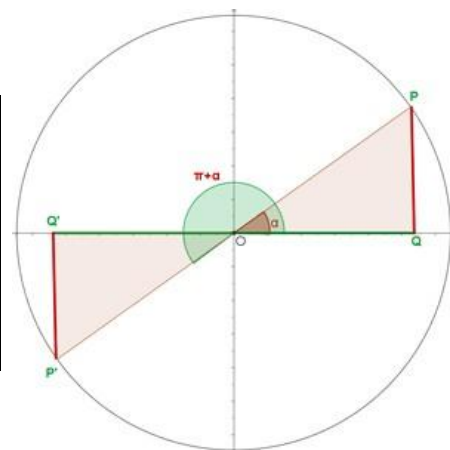
$$\text{cos } (\pi + \alpha) = -\text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha$$

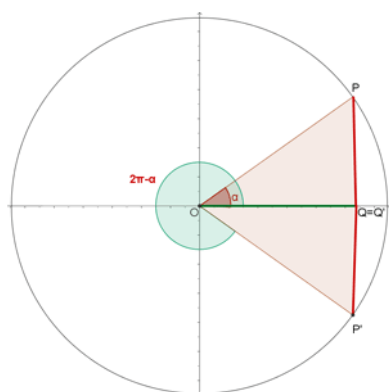
$$\text{sen } 210^\circ = \text{sen } (180^\circ + 30^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 210^\circ = \text{cos } (180^\circ + 30^\circ) = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 210^\circ = \text{tg } (180^\circ + 30^\circ) = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



- Ángulos opuestos (Son aquéllos cuya suma es 360° ó 2π radianes).



$$\text{sen } (2\pi - \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (2\pi - \alpha) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (2\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$$

$$\text{sen } 330^\circ = \text{sen } (360^\circ - 30^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 330^\circ = \text{cos } (360^\circ - 30^\circ) = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 330^\circ = \text{tg } (360^\circ - 30^\circ) = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Ángulos negativos (Se desplazan en el sentido del movimiento de las agujas del reloj).

$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$$

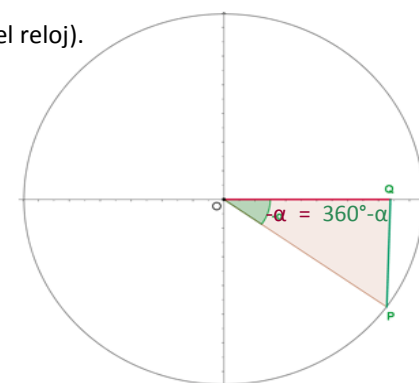
$$\text{cos } (-\alpha) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha$$

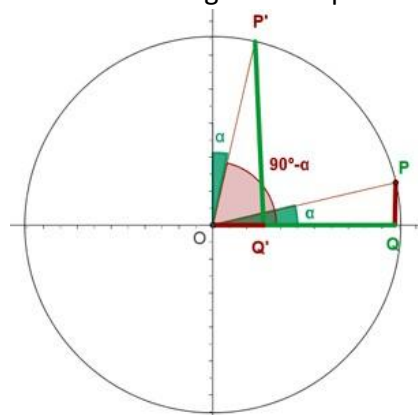
$$\text{sen } (-30^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{cos } (-30^\circ) = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } (-30^\circ) = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



- Ángulos complementarios (Son aquéllos cuya suma es 90° ó $\pi/2$ radianes).



$$\text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{cos } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{sen } \alpha$$

$$\text{tg } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cotg } \alpha$$

$$\text{sen } 60^\circ = \text{sen } (90^\circ - 30^\circ) = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

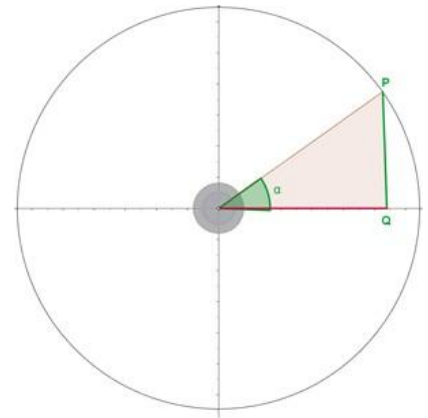
$$\text{cos } 60^\circ = \text{cos } (90^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \text{tg } (90^\circ - 30^\circ) = \text{cotg } 30^\circ = \sqrt{3}$$

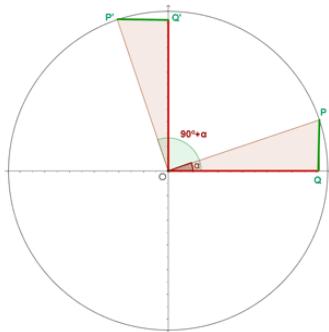
- Mayores de 360°

Ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas.

$\text{sen } (\alpha + 2\pi k) = \text{sen } \alpha$ $\text{cos } (\alpha + 2\pi k) = \text{cos } \alpha$ $\text{tg } (\alpha + 2\pi k) = \text{tg } \alpha$	$\frac{750^\circ}{30^\circ} \quad \frac{360^\circ}{2}$ $\text{sen } 750^\circ = \text{sen } (360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\text{cos } 750^\circ = \text{cos } (360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg } 750^\circ = \text{tg } (360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
--	--



- Ángulos que difieren en 90° ó $\pi/2$ rad



$\text{sen } \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \text{cos } \alpha$ $\text{cos } \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\text{sen } \alpha$ $\text{tg } \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\text{cotg } \alpha$	$\text{sen } 120^\circ = \text{sen } (90^\circ + 30^\circ) = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{cos } 120^\circ = \text{cos } (90^\circ + 30^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$ $\text{tg } 120^\circ = \text{tg } (90^\circ + 30^\circ) = -\text{cotg } 30^\circ = -\sqrt{3}$
--	---

Identidades trigonométricas fundamentales

$$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$$

$$\text{cosec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha$$

Ejemplos de aplicación:

- Sabiendo que $\text{tg } \alpha = 2$, y que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} & \sec \alpha &= -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5} \\ \text{sen } \alpha &= 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \text{cosec } \alpha &= -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ \text{tg } \alpha &= 2 & \text{cotg } \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Sabiendo que $\text{sen } \alpha = 3/5$, y que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{3}{5} & \text{cosec } \alpha &= \frac{5}{3} \\ \cos \alpha &= -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} & \sec \alpha &= -\frac{5}{4} \\ \text{tg } \alpha &= -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} & \text{cotg } \alpha &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Fórmulas trigonométricas

SUMA DE ÁNGULOS

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTOS

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

DIFERENCIA DE ÁNGULOS

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

ÁNGULO MITAD

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS EN SUMAS

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$$

$$\cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

Ejemplos de aplicación:

▪ SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen} (45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

▪ ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen} 120^\circ = 2 \operatorname{sen} 60^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 60^\circ = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}$$

▪ **ÁNGULO MITAD**

$$\operatorname{sen}(22^{\circ} 30') = \operatorname{sen}\left(\frac{45^{\circ}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^{\circ}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos(22^{\circ} 30') = \cos\left(\frac{45^{\circ}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^{\circ}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(22^{\circ} 30') = \operatorname{tg}\left(\frac{45^{\circ}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^{\circ}}{1 + \cos 45^{\circ}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = -1 + \sqrt{2}$$

▪ **TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTOS**

$$\operatorname{sen} 40^{\circ} + \operatorname{sen} 20^{\circ} = 2 \operatorname{sen} 30^{\circ} \cos 10^{\circ}$$

$$\operatorname{sen} 40^{\circ} - \operatorname{sen} 20^{\circ} = 2 \cos 30^{\circ} \operatorname{sen} 10^{\circ}$$

$$\cos 40^{\circ} + \cos 20^{\circ} = 2 \cos 30^{\circ} \cos 10^{\circ}$$

$$\cos 40^{\circ} - \cos 20^{\circ} = -2 \operatorname{sen} 30^{\circ} \operatorname{sen} 10^{\circ}$$

▪ **TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS EN SUMAS**

$$\operatorname{sen} 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x)$$

$$\cos 3x \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x)$$

$$\cos 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x)$$

$$\operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 2x)$$

Ejercicios de aplicación de las fórmulas :

1. Calcula el valor exacto de :

- | | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| a. $\operatorname{sen} 75^{\circ}$ | b. $\cos 75^{\circ}$ | c. $\operatorname{sen} 15^{\circ}$ | d. $\cos 15^{\circ}$ |
| e. $\operatorname{tg} 120^{\circ}$ | f. $\operatorname{tg} 135^{\circ}$ | g. $\cos 285^{\circ}$ | h. $\operatorname{tg} 285^{\circ}$ |

2. Encuentra una fórmula para calcular :

- | | | | |
|---------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a. $\cos(3x)$ | b. $\operatorname{sen}(3x)$ | c. $\operatorname{tg}(3x)$ | d. $\operatorname{sen}(4x)$ |
|---------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|

3. Transforma en sumas las siguientes expresiones :

- | | |
|---|---|
| a. $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(y - 4x)$ | b. $\operatorname{sen}(x - 5y) \operatorname{sen}(-x + 3y)$ |
| c. $\cos(-2x + z) \cos(2 - 3z)$ | d. $\cos(x - 2p) \operatorname{sen}(3p - x)$ |

4. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas :

- | | | |
|---|---|---|
| a. $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen} x$ | b. $\cos(2x) + \operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen}^2 x$ | c. $\operatorname{tg}(2x) = -\operatorname{tg} x$ |
|---|---|---|