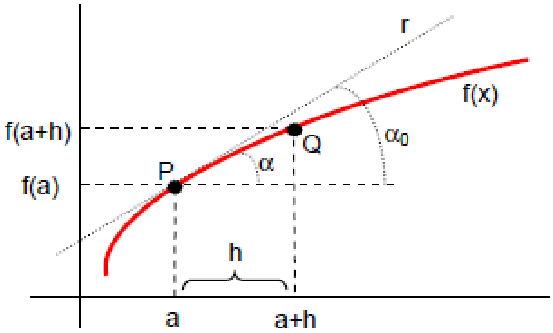
TEMA 10 DERIVADAS

Isaac Newton (1642-1727) Gottfried Leibniz (1646-1716)

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO f'(a):



Consideremos una función f(x) y un punto P de su gráfica (ver figura), de abscisa x=a. Supongamos que damos a la variable independiente x un pequeño incremento h (en el dibujo lo hemos exagerado, para que se pueda ver la situación…); por lo tanto, nos desplazaremos a un nuevo punto Q de la curva próximo. Consideremos la tangente del ángulo que forma el segmento PQ con la horizontal:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (2)$$

Si $h\to 0$, el segmento PQ tenderá a confundirse con la recta r tangente a la curva f(x) en x=a, es decir, los ángulos α y α_0 tenderán a ser iguales:

$$\operatorname{tg}\alpha_0=\lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\alpha \underset{\text{por (2)}}{=} \boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{\text{por definición}}{=} f'(a)} \qquad (3)$$

Esta fórmula nos da por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en x=a. Esta fórmula se conoce como derivada de la función f(x) en el punto x=a, y se designa como f '(a); por lo tanto:

> **«La derivada de una función en un punto representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto»**

Observaciones:

1º) La derivada de una función en un punto puede resultar un número positivo, negativo o cero2. Como veremos en el apdo. V, su signo indicará el crecimiento de la función.

2º) Veamos una expresión alternativa para calcular la derivada:
Supongamos que hacemos el cambio de variable a+h=x _ si h®0, entonces x®a, con lo cual (3) queda como:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \qquad (4)$$

3º) «Una función es derivable en un punto x=a si $ f '(a)»

4º) «Una función es derivable en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo»

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

1) Función constante: $\boxed{y = K \rightarrow y' = 0}$

Es decir, **«La derivada de una constante es siempre cero»**

Ejercicio 1: Hallar la derivada de las siguientes funciones constantes:

a) $y = 2$ **c)** $y = \frac{1}{2}$ **e)** $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $y = -3$ **d)** $y = 0$ **f)** $y = \pi$ **g)** $y = 0{,}5$

2) Función identidad: $\boxed{y = x \rightarrow y' = 1}$

3) Función de proporcionalidad directa: $\boxed{y = K \cdot x \rightarrow y' = k}$

Ejercicio 2: Hallar la derivada de las siguientes funciones de proporcionalidad directa:

a) $y = 2x$

b) $f(x) = -5x$ **d)** $y = \frac{x}{2}$ **f)** $f(x) = \frac{2}{3}x$ **h)** $y = -\frac{5x}{3}$

c) $y = 0{,}01x$ **e)** $y = x$ **g)** $y = -x$ **i)** $f(t) = 7t$

4) Derivada de una potencia: $\boxed{y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}}$ (donde $n \in \mathbb{R}$)

Ejercicio 3: Hallar la derivada de las siguientes potencias:

a) $y=x^2$ **b)** $f(x)=x^3$ **c)** $y=x^4$ **d)** $f(t)=t^5$ **e)** $y=x^{100}$

Este caso nos permite, dado que el exponente puede ser cualquier número real, abordar otros tipos de derivadas:

Ejercicio 4: Demostrar la fórmula de la derivada de: **a)** $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt{x}$

Ejercicio 5: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones, pasándolas previamente a forma de potencia:

a) $y = \sqrt[3]{x}$ **c)** $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ **e)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $y = \sqrt[4]{x^3}$ **d)** $y = x^2\sqrt{x}$ **f)** $y = \frac{\sqrt{x}}{x^3}$

<u>REGLAS DE DERIVACIÓN:</u>

Derivada del producto de un escalar por una función: $\boxed{y = K \cdot u \rightarrow y' = k \cdot u' \quad \text{donde } u \text{ es función}}$

«Las constantes multiplicativas pueden salir de la derivada»

Ejercicio 6: Hallar la derivada de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = 3x^2$ **h)** $y = 3\sqrt[3]{x^4}$

b) $y = 4x^3$ **e)** $y = -x^5$ **i)** $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{2}$

c) $f(x) = -2x^4$ **f)** $y = \frac{2}{3}t^6$ **k)** $f(t) = -2t^7$

d) $y = \frac{x^2}{2}$ **g)** $y = -x$ **j)** $y = -\frac{3x^4}{2}$ **l)** $f(x) = \frac{x^3}{3}$

Derivada de la suma/resta de dos funciones: $\boxed{y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v' \quad \text{donde } u \text{ y } v \text{ son funciones}}$

Es decir: **«La derivada de la suma** (resta) **es la suma** (resta) **de las derivadas»**

Esta regla, combinada con las anteriores, es muy útil para derivar polinomios, como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 7: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + x^3$

b) $y = x^4 + 5$

c) $y = x^2 - 2$

d) $y = x - 2$

e) $f(t) = 3t - 5$

f) $y = 3x^2 - x^4$

g) $y = 2x^3 - 3x^4$

h) $y = 2t^4 - t^2 + 3$

i) $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

j) $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

k) $f(x) = -3x^5 + 4x^3 - x + 2$

l) $y = \frac{x^4}{2} + 5x$

m) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{5} - \frac{1}{2}$

n) $f(x) = x^5 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{6} - 3x^2 + \frac{x}{3}$

o) $y = \frac{x^4 + x^2}{2}$

p) $f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}001x^2 + 0{,}1x - 0{,}02$

q) $y = \frac{3x^6 - x^3 + 6x - 5}{3}$

Derivada del producto: $\boxed{y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + u\,v'}$

Esta regla se puede generalizar a tres o más funciones: $y = u \cdot v \cdot w \rightarrow y' = u'v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'$

NOTA: Para derivar un producto, una alternativa, a veces, es operar previamente hasta transformar en un polinomio, y luego derivar.

Ejercicio 8: Hallar, utilizando la fórmula más adecuada en cada caso, la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = (2x+3)(3x-2)$ [de 2 formas, y comparar] *(Sol: $12x+5$)*
b) $y = (x-2)(x+3)$ *(Sol: $2x+1$)*
c) $f(x) = (2x+3)(x-5)$ *(Sol: $4x-7$)*
d) $f(x) = (x^2+2)(3x-1)$ *(Sol: $9x^2-2x+6$)*
e) $y = (x^2-5)(3x-1)+7$ *(Sol: $9x^2-2x-15$)*
f) $y = (2x-3)^2$ [de 2 formas] *(Sol: $8x-12$)*
g) $f(x) = (x+2)^3$ *(Sol: $3(x+2)^2$)*
h) $y = (1{,}2-0{,}001x^2)x$ *(Sol: $-0{,}003x^2+1{,}2$)*
i) $y = (2x^2-3)^2$ *(Sol: $16x^3-24x$)*
j) $f(t) = 300t(1-t)$ *(Sol: $300-600t$)*
k) $f(x) = (-4x^3-2x)^2$ *(Sol: $96x^5+64x^3+8x$)*
l) $y = (t^2+t+1)^3$ *(Sol: $3(t^2+t+1)^2(2t+1)$)*
m) $y = (3x-2)(2x-3)(x+5)$ *(Sol: $18x^2+34x-59$)*
n) $f(x) = (2x-3)^{100}$ *(Sol: $200(2x-3)^{99}$)*

Derivada del cociente: $\boxed{y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}}$

Ejercicio 9: Demostrar, utilizando la derivada del producto, la fórmula anterior (Ayuda: poner u/v como $u \cdot v^{-1}$)

Ejercicio 10: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{2x-3}{3x+2}$ $\left(y' = \frac{13}{(3x+2)^2}\right)$

b) $y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$ $\left(y' = \frac{-10x}{(x^2-4)^2}\right)$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ $\left(y' = \frac{-6}{(x-3)^2}\right)$

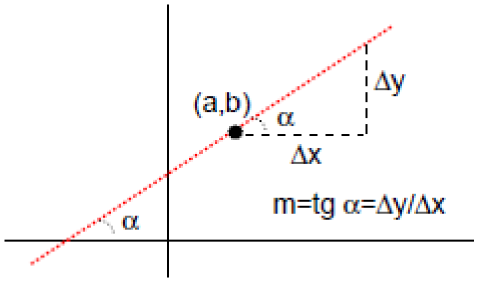
d) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ $\left(y' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)$

e) $y = \frac{x^2+x+1}{x}$ $\left(y' = \frac{x^2-1}{x^2}\right)$

f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ $(y'=1)$

g) $y = 3\frac{x^2-1}{x-2}$ $\left(y' = 3\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}\right)$

RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO



Recordatorio previo: recta en forma punto-pendiente

Conviene previamente recordar que la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto (a,b) y tiene pendiente m es [ver figura]: $y - b = m(x - a)$ (6)

Ecuación de la recta tangente:

Hay que recordar también que, la derivada de la función f(x) en el punto de abscisa x=a, la cual se designaba como
f '(a), es la pendiente de la recta tangente en dicho punto (a,f(a)); por lo tanto, la ecuación de dicha recta tangente [ver figura] en ese punto se obtendrá sustituyendo en (6):

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)} \quad (7)$$

Ejercicio 12: Hallar la ecuación de la recta tangente en x=3 a la curva $f(x)=x^2-5x+8$. Dibujar la situación, e interpretar el resultado. *(Sol: y=x-1)*

Ejercicio 13: Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=x^3-5$ en x=1

b) $y=\dfrac{1}{x}$ en x=-2

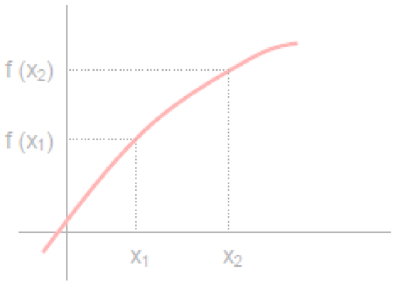
c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ en x=0

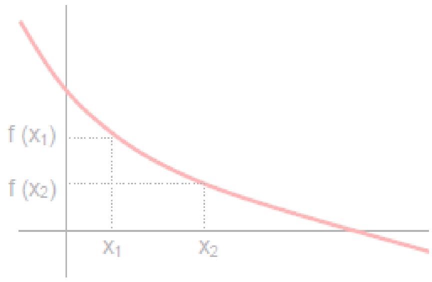
d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ en x=1

e) $y=\dfrac{-3}{x^2}$ en x=0

INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. Máximos y mínimos.

Idea intuitiva:





Definiciones:

f (x) es creciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

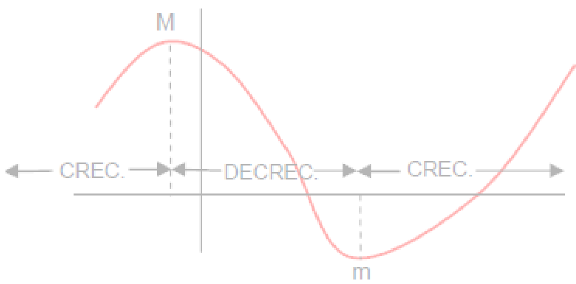
f (x) es decreciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

O, dicho con palabras: "Una función es creciente en un punto si, en las proximidades de dicho punto, a medida que aumentan las x aumentan también las imágenes correspondientes".

"Una función es decreciente en un punto si, en las proximidades de dicho punto, a medida que aumentan las x disminuyen las imágenes correspondientes".

Decimos que **«una función es creciente en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo»**.

- En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de crecimiento, también llamados de monotonía:



En un máximo (M), la función pasa de creciente a decreciente de forma continua. Se llama máximo relativo o local.
En un mínimo (m), la función pasa de decreciente a creciente de forma continua. Se llama mínimo relativo o local.

Teorema 1: $\boxed{f'(a) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x = a}$

O, dicho con palabras: **«Si la derivada de una función en un punto es positiva, entonces la función es creciente en dicho punto".**

Observaciones:

1º) La justificación de este teorema es obvia: teniendo en cuenta que la derivada era la pendiente de la recta tangente, si la derivada es positiva significará que la recta tangente tiene pendiente positiva, es decir, que la recta tangente es creciente, y, por lo tanto, también será creciente la curva.

2º) El recíproco no siempre es cierto: una función puede ser creciente en un punto y no ser necesariamente positiva su derivada (piénsese, por ejemplo, en y=x3 en x=0).

3º) Naturalmente, otra forma alternativa de enunciar este teorema es decir que:

$$\boxed{f'(a) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x = a}$$

4º) Por lo tanto, el **procedimiento práctico para hallar los intervalos de crecimiento será estudiar el signo de f ' (x)** (debido al teorema anterior). Para ver cómo cambia el signo de f ' (x), se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla). De los intervalos de crecimiento deduciremos fácilmente los posibles M y m.

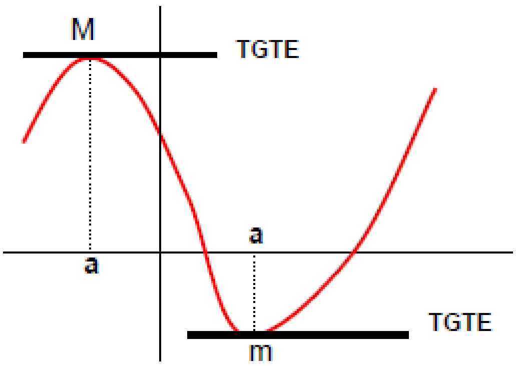
5º) Los intervalos de monotonía se expresan siempre con respecto al eje x.

Teorema 2: $\boxed{x = a \text{ es M o m de } f(x) \Rightarrow f'(a) = 0}$

(¡El recíproco no siempre se cumple!)

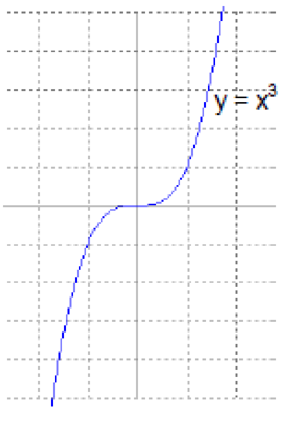
O, dicho con palabras: **«En un Máximo o mínimo la derivada siempre se anula"**.

Justificación gráfica: En un máximo o mínimo la tangente es horizontal, es decir, su pendiente será nula, y por tanto su derivada también:



Observaciones:

1º) El teorema dice que la condición necesaria (pero no suficiente) para que exista un máximo o un mínimo en un punto es que la derivada se anule. De hecho, **puede ocurrir que la derivada se anule en un determinado punto, pero no cambie de signo a ambos lados**; por ejemplo, $y=x^3$ entra en el origen con tangente horizontal -es decir, derivada nula-, pero no presenta máximos ni mínimos, sino lo que se conoce como **punto de inflexión**.



2º) Puede haber varios máximos o mínimos, no haber, o infinitos.

3º) Si la f(x) es continua, entre dos **máximo** siempre hay un **mínimo**, y viceversa.

4º) Los candidatos a máximo o mínimo son los que anulan f ' (x)

5º) Si f '(x) no se anula nunca, no hay máximo ni mínimo.

Ejercicio 14: Dada la parábola $f(x)=x^2-2x-3$ se pide:

a) Representarla gráficamente

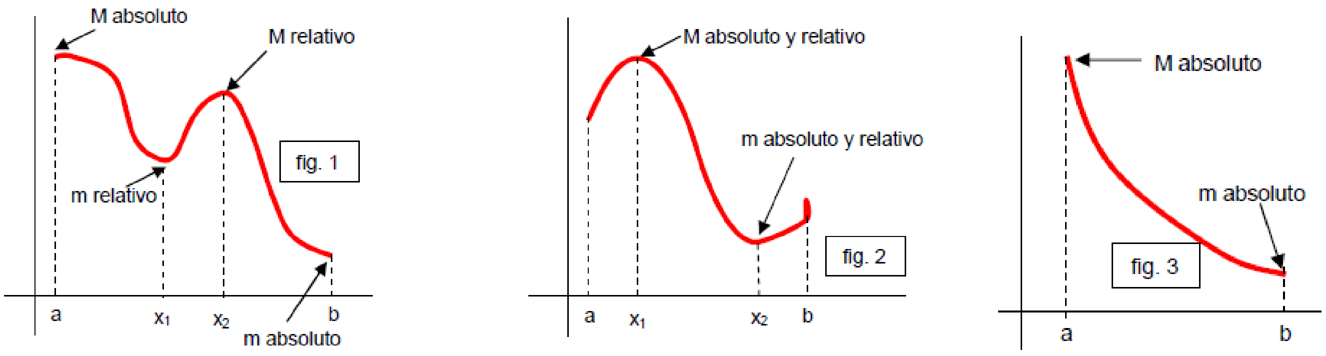
b) Estudiar el signo de f ' (x) y deducir sus intervalos de crecimiento y el máximo, comprobando que coinciden con la información de la gráfica.

Ejercicio 15: Ídem con la parábola $y=-x^2+4x+12$.

Ejercicio 16: Hallar los intervalos de monotonía y los posibles máximos y mínimos de la función $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$; dibujar, con esa información, su gráfica.

Máximos o mínimos absolutos:

Dada una función continua en un intervalo [a,b], pueden darse varias situaciones en dicho intervalo, que se resumen en las siguientes:



En resumen:

- Los máximos y mínimos relativos (los que hemos visto en los subapartados anteriores) son máximos “locales”, mientras que para los absolutos hay que tener en cuenta todo el intervalo.
- Puede haber varios extremos relativos, o puede no haberlos (fig. 3), pero siempre hay máximos y mínimos absolutos.
- Puede coincidir el máximo (o el mínimo) absoluto y relativo (fig. 2); en caso contrario el máximo (o el mínimo) absoluto lógicamente estará en un extremo (figs. 1 y 3)