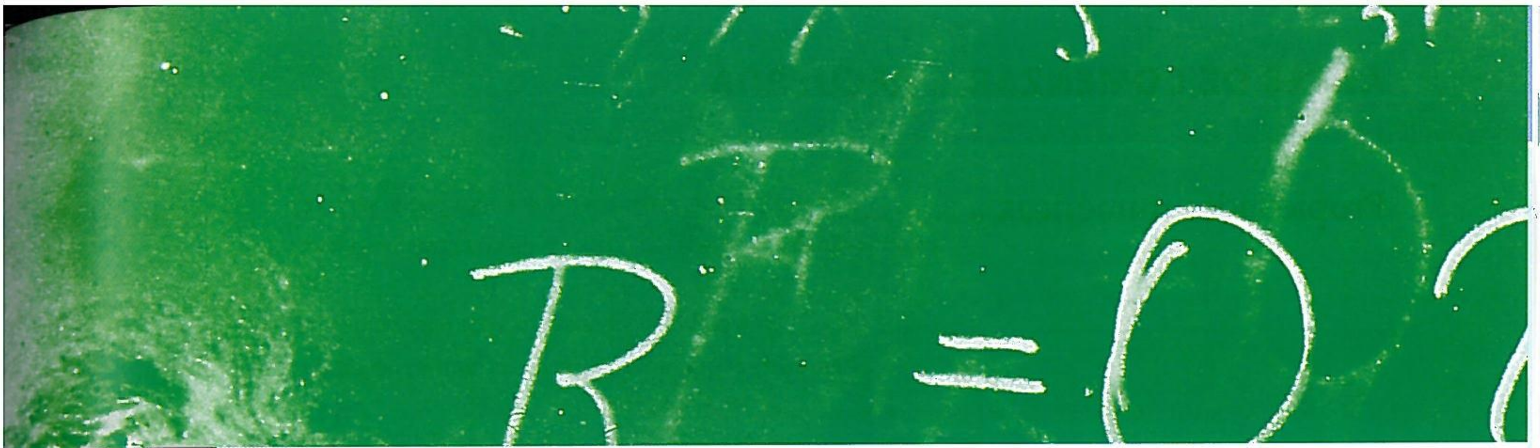


7 Funciones

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

En busca de Klingsor

Cierta vez, un reportero preguntó a Einstein:

–¿Existe una fórmula para obtener éxito en la vida?

–Sí, la hay.

–¿Cuál es? –preguntó el reportero, insistente.

–Si A representa al éxito, diría que la fórmula es $A = x + y + z$, en donde x es el trabajo e y la suerte –explicó Einstein.

–¿Y qué sería la z?

Einstein sonrió antes de responder:

–Mantener la boca cerrada.

Un joven norteamericano, Bacon, estudia Física en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y allí conoce a Einstein, del que recuerda algunas anécdotas como esta. Al finalizar la Segunda Guerra Mundial, se hace espía y viaja a Alemania para encontrar al máximo responsable de las investigaciones atómicas realizadas por los nazis, que se esconde bajo el seudónimo de Klingsor. En sus pesquisas le ayuda un matemático, de nombre Links, que formó parte del equipo de investigación nuclear.

¿Por qué estábamos juntos el teniente Bacon y yo [pensaba Links]? ¿Cuándo nos encontramos por primera vez? ¿Cuál era nuestra misión? ¿Cómo se cruzaron, en fin, nuestras vidas paralelas? Para responder a estos cuestionamientos no me queda más remedio que hablar un poco de mí.

Ubico mi nacimiento en el mapa de mi imaginación como un pequeño punto dibujado en el centro de un plano cartesiano. Hacia arriba, en el eje de las y, está todo lo positivo que me ha ocurrido; en contraposición, hacia abajo descubro mis desventuras, mis retrocesos y mis requiebros. A la derecha, en el eje de las x, encuentro los actos que me definen, aquellos que voluntariamente he convertido en el centro de mi vida –deseos, anhelos, obsesiones–, mientras que, a la izquierda, yacen esas porciones de mi ser que me han modelado contra mi voluntad o mi conciencia, esas partes aparentemente impredecibles o espontáneas que, no puedo negarlo, también me han llevado adonde estoy ahora. ¿Cuál sería el resultado final de un ejercicio como éste? ¿Qué forma aparecería en medio de la hoja? ¿Sería posible trazar las coordenadas que he recorrido a lo largo de mi trayecto? ¿Y obtener, a partir de esa línea, la fórmula que me resuma en cuerpo y alma?

JORGE VOLPI

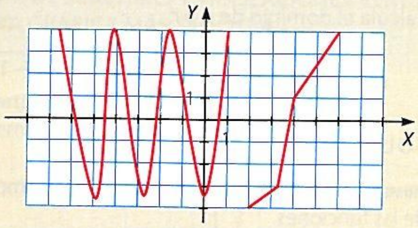
Juzga la metáfora de Links. ¿Sería posible representar una «vida» mediante una curva en un sistema de coordenadas cartesianas?

ACTIVIDADES

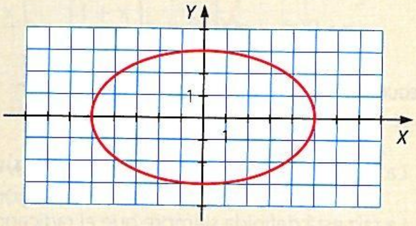
Concepto de función

21 Razona si las siguientes gráficas pueden corresponder a una función.

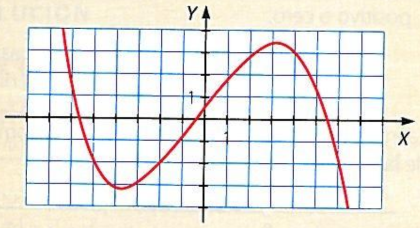
a)



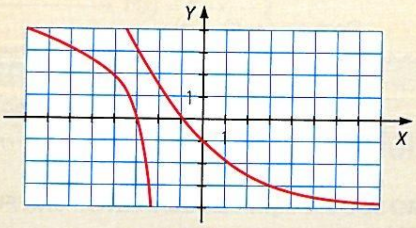
b)



c)



d)



22 Realiza una tabla y representa estas funciones.

a) Cada número entero lo relacionamos con su número de divisores positivos.

b) Cada número real lo relacionamos con su parte entera.

c) A cada número le hacemos corresponder él mismo menos su valor absoluto.

d) A cada número le corresponde el valor 2.

23 A lo largo de un día medimos la longitud, en metros, de la sombra que proyecta una farola desde el amanecer hasta que anochece.

Las medidas, tomadas cada dos horas, desde las 6:00 h, se muestran a continuación.

0	25	17	5	2
6	19	32	0	

a) ¿Crees que las tablas definen una función?

b) En caso afirmativo, identifica sus variables.

Propiedades de las funciones

24 Comprueba si los siguientes puntos están en los dominios de cada función.

a) Los puntos $x = 3$, $x = 2$ y $x = -5$ para la función $f(x) = \sqrt{x+1}$.

b) Los puntos $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$ para la función $f(x) = \ln(x-4)$.

c) Los puntos $x = 2$, $x = -2$ y $x = 0$ para la función $f(x) = \dfrac{3x-6}{x+2}$.

25 Estudia si los valores de la ordenada, y, están incluidos en los recorridos de estas funciones.

a) Las ordenadas $y = 3$, $y = 2$ e $y = -5$ para la función $f(x) = \sqrt{3x-3}$.

b) Las ordenadas $y = 0$, $y = 30$ e $y = -3$ para la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

c) Las ordenadas $y = 1$, $y = \dfrac{13}{6}$ e $y = -7$ para la función $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+2}$.

26 Determina el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{7}$

b) $f(x) = \dfrac{7}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x}$

27 Estudia el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \sqrt{x+3}$

b) $y = \sqrt{2x^2+3x-2}$

c) $y = \sqrt{x^2-4x+4}$

d) $y = \sqrt{5-2x}$

e) $y = \sqrt{x^2+2x+9}$

f) $y = \sqrt{6+x-x^2}$

28 Escribe el dominio de las funciones.

a) $y = \log_4(x-4)$

b) $y = cos\,(1-x)$

c) $y = 3^{\ln x}$

d) $y = sen\,(x-\pi)$

e) $y = \ln\left(\dfrac{10}{4-x}\right)$

29 Analiza el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \log_4(5+x)$

b) $y = 2^{3x-6}$

c) $y = 5^{\frac{1}{x-2}}$

d) $y = 2 - tg\,x$

e) $y = \dfrac{3}{tg\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

30 Determina el dominio de las funciones.

a) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}$

b) $y=\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt{x+3}$

c) $y=\sqrt{2x-4}\cdot\sqrt{1-x}$

31 Estudia el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $y=5x-3$

b) $y=2+\sqrt{x-1}$

c) $y=\dfrac{3}{x}$

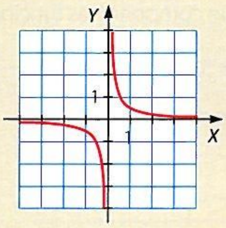
d) $y=2-4^x$

e) $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}$

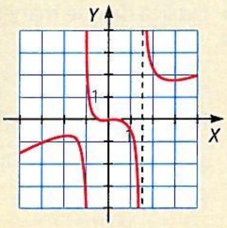
f) $y=\dfrac{2}{x-2}$

32 Estudia las características de las siguientes funciones.

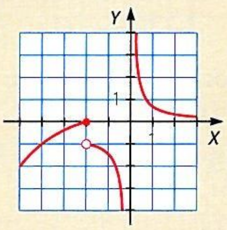
a)



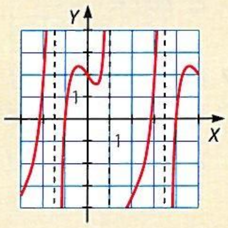
c)



b)



d)



33 Considera la función que relaciona el tiempo, en días, con la superficie visible de la Luna.

a) ¿Es una función periódica?

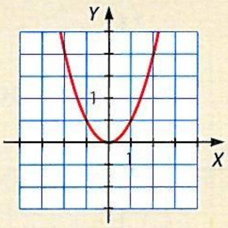
b) En caso afirmativo, indica el período.

34 Estudia las simetrías de la función.

$$f(x)=x^3-3x$$

Transformaciones de funciones

35 Dada la gráfica de la función $y=x^2$:



representa estas funciones.

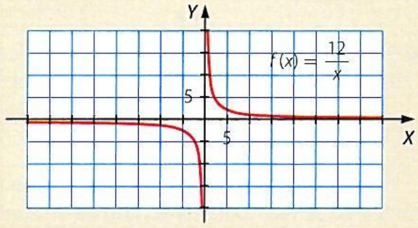
a) $y=(x-2)^2$

b) $y=x^2+3$

c) $y=(x+3)^2$

d) $y=x^2-4$

36 A partir de la siguiente función:



obtén la gráfica de estas funciones.

a) $g(x)=\dfrac{12}{x-2}$

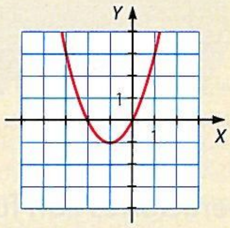
b) $h(x)=\dfrac{12}{x+4}$

c) $i(x)=\dfrac{12}{x}+1$

d) $j(x)=-\dfrac{12}{x}$

37 Con la gráfica de esta función:

$$f(x)=x^2-2x$$



representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $f(x-2)$

b) $-f(x)$

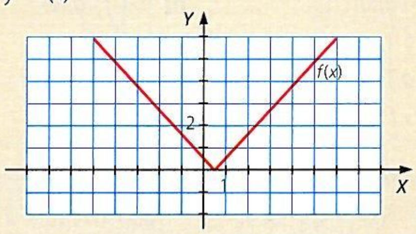
c) $f(x+1)$

d) $f(x)+2$

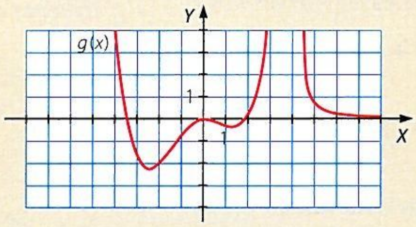
Razona cómo lo haces y calcula su expresión algebraica.

38 A partir de cada gráfica, dibuja la gráfica de las funciones que se indican.

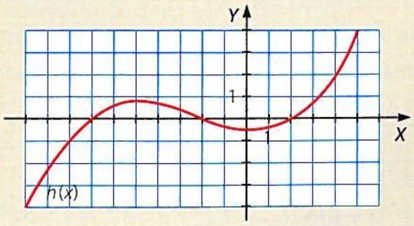
a) $f(-x)$ y $-f(x)$



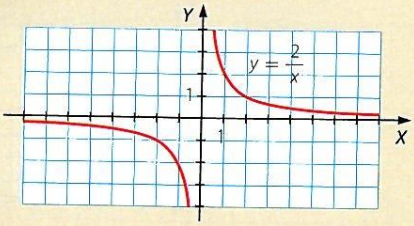
b) $g(x)+1$ y $g(x)-3$



c) $h(x+1)$ y $h(x-2)$



39 La gráfica pertenece a la función $y = \frac{2}{x}$.



Construye a partir de ella la gráfica de las funciones.

a) $y = \frac{2}{x-1} + 3$

b) $y = 2 - \frac{2}{x-3}$

c) $y = \frac{2}{x+2} - 1$

d) $y = -1 - \frac{2}{x+1}$

40 Dada la función $f(x) = \frac{8}{x}$, determina la expresión algebraica de estas funciones y represéntalas.

a) $f(x-3)$ b) $f(x)+3$ c) $f(-x)$ d) $-f(x)$

Operaciones con funciones

41 Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \qquad g(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$

calcula.

a) $(f+g)(5)$

b) $(f-g)(3)$

c) $(f \cdot g)(0)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

e) $(f \cdot f)(2)$

f) $(g+f)(5)$

g) $(g-f)(3)$

h) $(f+f \cdot g)(0)$

i) $\left(\frac{g}{f}\right)(-2)$

j) $f^2(2)$

42 Calcula el dominio de las funciones.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \qquad g(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Utiliza el resultado para calcular el dominio de las siguientes funciones.

a) $(f+g)(x)$

b) $(f \cdot g)(x)$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

d) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

43 Dadas las funciones:

$$m(x) = \sqrt{x^2 - 4} \qquad n(x) = x + 6 \qquad p(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

define las siguientes funciones y determina sus dominios.

a) $(m+n)(x)$

b) $(n+p)(x)$

c) $\left(\frac{n}{m}\right)(x)$

d) $(m \cdot n + p)(x)$

Composición de funciones

44 Dadas las funciones:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

calcula las composiciones de funciones.

a) $f \circ g$

b) $g \circ h$

c) $h \circ f$

d) $g \circ f$

e) $h \circ g$

f) $f \circ h$

Determina el valor de cada función para $x = 3$.

45 Comprueba con las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = 3x - 2$ que la composición de funciones no es conmutativa. Calcula el dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$.

46 Explica de qué manera hay que componer las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \qquad g(x) = 5x + 1 \qquad h(x) = \frac{2}{x+1}$$

para obtener las siguientes funciones.

a) $m(x) = 5\sqrt{x^2 + 4} + 1$

b) $n(x) = 25x + 6$

c) $p(x) = \frac{x+11}{x+1}$

47 Determina $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ en los pares de funciones para comprobar si son inversas o no.

a) $f(x) = 3x - 1$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 1$

b) $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \log_2 x$

d) $f(x) = \mathit{sen}\, x$ y $f^{-1}(x) = \mathit{arc\ sen}\, x$

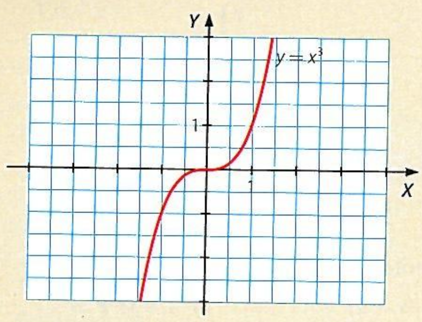
e) $f(x) = x^2 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

48 Calcula la función inversa de cada función.

a) $y = 2x + 5$ b) $y = \frac{3-x}{2}$ c) $y = \sqrt[3]{2x-3}$

Comprueba que sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

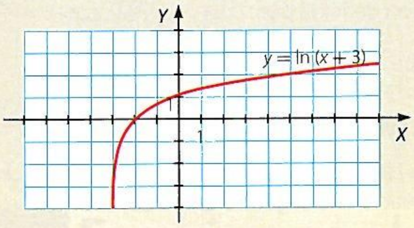
49 Dada la gráfica de la función $y = x^3$:



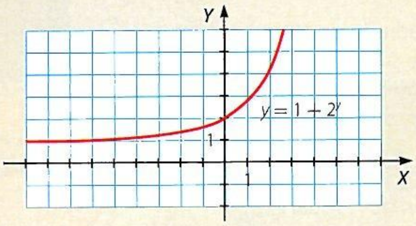
dibuja la gráfica de su función inversa.

50 Dibuja las funciones inversas.

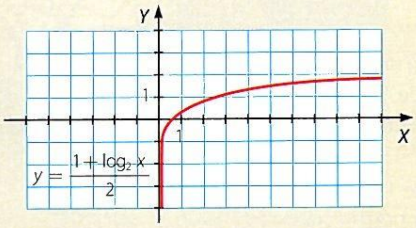
a)



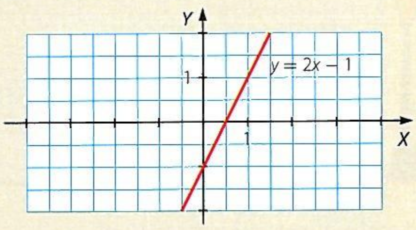
b)



c)



d)



51 Dibuja funciones que cumplan estas propiedades.

a) Su dominio y su recorrido son $\mathbb{R}$.

b) Su dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$.

c) Es creciente y su dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

d) Es logarítmica y su dominio es $(3, +\infty)$.

e) Es logarítmica y su dominio es $(-\infty, -2)$.

f) Es exponencial y su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Problemas con funciones

52 En una vivienda pagan 10 euros de gasto fijo y 0,50 euros por cada kilovatio consumido a la empresa que les suministra electricidad.

a) Obtén una expresión de la relación que existe entre el consumo y el precio y represéntala.

b) Si a esta cantidad hay que aumentarle el 16 % de IVA, ¿cómo será la ecuación? ¿Qué variación sufre la gráfica?

53 Halla el dominio de las funciones del tipo $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$, siendo n un número natural.

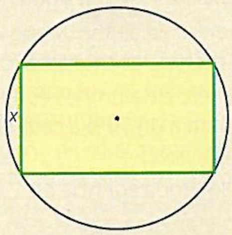
54 El manual de usuario de un vehículo afirma que el ruido producido por el motor sigue aproximadamente la fórmula:

$$r = at^2 + 2{,}8t + 8$$

donde t es el número de años de antigüedad del vehículo; a es un número fijo, que se denomina coeficiente de atenuación, y r es el nivel de ruido, medido en decibelios.

La semana pasada llevé mi vehículo a pasar la revisión de los cuatro años y en el informe figura que la medición fue de 27 decibelios. ¿Cuál es el coeficiente de atenuación? ¿Cuántos decibelios producirá a los ocho años?

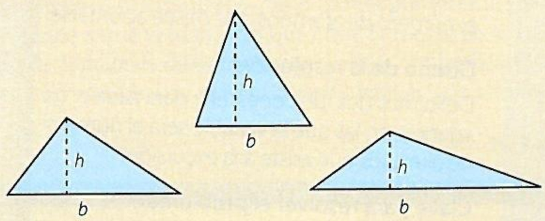
55 En una circunferencia de 5 cm de radio se inscribe un rectángulo de lado x.



a) Expresa el área en función de x. ¿Cuál es su dominio?

b) Realiza un tanteo para determinar el máximo valor que puede tomar esa función. ¿Cuánto medirán los lados del rectángulo en ese caso? ¿Qué tanto por ciento de la superficie del círculo ocupa el rectángulo?

56 Considera los triángulos cuya superficie mide S.



a) Escribe la expresión algebraica que relaciona la base en función de la altura en estos triángulos.

b) ¿Cuál es la función que relaciona la altura en función de la base?

c) Representa ambas funciones.

PARA FINALIZAR...

Reflexiona sobre la teoría

57 Sean las funciones $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
Comprueba que se cumple que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.

58 Calcula las funciones inversas de:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

IDEA CLAVE

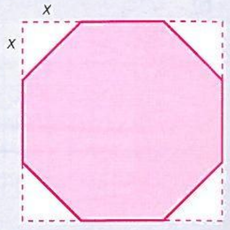
Despeja e^x en función de y, y haz el cambio de variable $z = e^x$. Obtendrás una ecuación de segundo grado cuya variable es z.

59 Si la función definida por $f(x) = \dfrac{cx}{2x+3}$, con $x \neq \dfrac{3}{2}$, verifica que $f[f(x)] = x$, ¿cuánto vale c?

IDEA CLAVE

Calcula $f[f(x)]$ e iguala esa expresión a x. Obtendrás una ecuación de segundo grado cuya variable es c.

60 En un cuadrado de 16 cm de lado se suprime, de cada esquina, un triángulo rectángulo e isósceles de cateto x. Expresa el área y el perímetro del polígono resultante en función de x. ¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido?



Piensa un poco más

61 Un grupo de alumnos de 1.º Bachillerato pide presupuesto en dos agencias de viajes para realizar una excursión.

La primera agencia les hace la siguiente propuesta.

- Si el número de alumnos que va a la excursión es 40 o menos, les cobrará 200 € por alumno.
- Si el número de alumnos es superior a 40 le descontará un 10 % a cada uno de los alumnos que se inscriba.

La oferta de la segunda agencia es:

- Si completan un autobús, con capacidad para 60 personas, el precio será de 150 € por persona. Si alguno de los autobuses no está completo, se incrementará el precio en un 1 % por cada persona que falte para completarlo.

¿Qué agencia les conviene más?

Análisis del enunciado

El precio de la excursión varía según el número de alumnos que desee apuntarse.

Diseño de la resolución

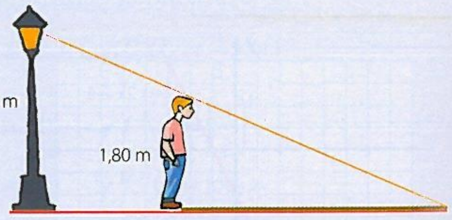
Definimos dos funciones, una para cada agencia, en las que la variable será el número de alumnos que asiste a la excursión.

Clave para resolver el problema

El punto de intersección entre las gráficas de ambas funciones significará que el precio es igual en ambas agencias.

62 Una farola tiene 7 m de altura. En su base hay una persona de 1,80 m de altura que empieza a andar en línea recta, alejándose de la farola a una velocidad de 2 m/s.

Al cabo de 10 segundos, ¿cuál será la longitud de su sombra?



Halla una función que exprese la longitud de la sombra en función del tiempo, t, que se camina.

Análisis del enunciado

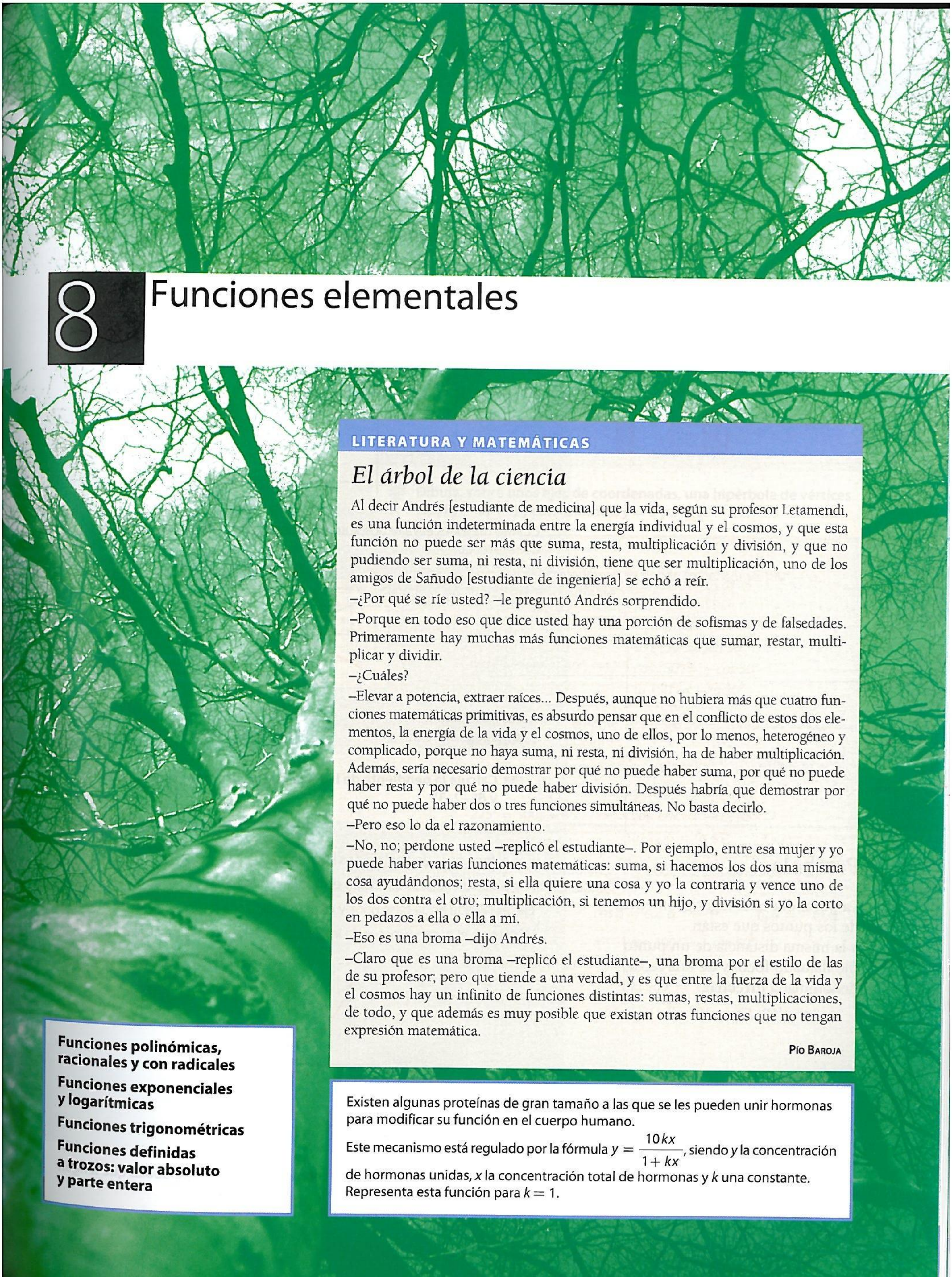
La sombra de la persona variará según se aleje de la farola, es decir, en función del tiempo que camine.

Diseño de la resolución

La farola, la persona, los rayos de luz de la farola y el suelo forman dos triángulos rectángulos.

Clave para resolver el problema

Los triángulos están en posición de Tales.



8 Funciones elementales

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El árbol de la ciencia

Al decir Andrés [estudiante de medicina] que la vida, según su profesor Letamendi, es una función indeterminada entre la energía individual y el cosmos, y que esta función no puede ser más que suma, resta, multiplicación y división, y que no pudiendo ser suma, ni resta, ni división, tiene que ser multiplicación, uno de los amigos de Sañudo [estudiante de ingeniería] se echó a reír.

–¿Por qué se ríe usted? –le preguntó Andrés sorprendido.

–Porque en todo eso que dice usted hay una porción de sofismas y de falsedades. Primeramente hay muchas más funciones matemáticas que sumar, restar, multiplicar y dividir.

–¿Cuáles?

–Elevar a potencia, extraer raíces... Después, aunque no hubiera más que cuatro funciones matemáticas primitivas, es absurdo pensar que en el conflicto de estos dos elementos, la energía de la vida y el cosmos, uno de ellos, por lo menos, heterogéneo y complicado, porque no haya suma, ni resta, ni división, ha de haber multiplicación. Además, sería necesario demostrar por qué no puede haber suma, por qué no puede haber resta y por qué no puede haber división. Después habría que demostrar por qué no puede haber dos o tres funciones simultáneas. No basta decirlo.

–Pero eso lo da el razonamiento.

–No, no; perdone usted –replicó el estudiante–. Por ejemplo, entre esa mujer y yo puede haber varias funciones matemáticas: suma, si hacemos los dos una misma cosa ayudándonos; resta, si ella quiere una cosa y yo la contraria y vence uno de los dos contra el otro; multiplicación, si tenemos un hijo, y división si yo la corto en pedazos a ella o ella a mí.

–Eso es una broma –dijo Andrés.

–Claro que es una broma –replicó el estudiante–, una broma por el estilo de las de su profesor; pero que tiende a una verdad, y es que entre la fuerza de la vida y el cosmos hay un infinito de funciones distintas: sumas, restas, multiplicaciones, de todo, y que además es muy posible que existan otras funciones que no tengan expresión matemática.

Pío Baroja

Funciones polinómicas, racionales y con radicales

Funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones trigonométricas

Funciones definidas a trozos: valor absoluto y parte entera

Existen algunas proteínas de gran tamaño a las que se les pueden unir hormonas para modificar su función en el cuerpo humano.

Este mecanismo está regulado por la fórmula $y = \dfrac{10kx}{1+kx}$, siendo y la concentración de hormonas unidas, x la concentración total de hormonas y k una constante. Representa esta función para $k = 1$.

ACTIVIDADES

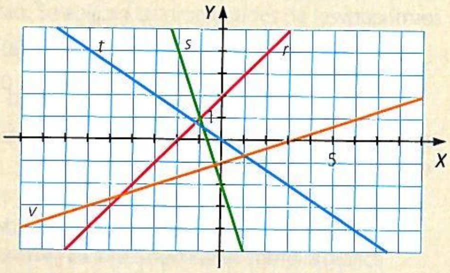
Funciones polinómicas

21 Representa, sin hacer las tablas de valores correspondientes, las funciones lineales y afines.

a) $y = \dfrac{x-3}{3}$ c) $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

b) $y = -x + 4$ d) $y = -2x$

22 Escribe la expresión algebraica de las funciones representadas, y calcula su pendiente y su ordenada en el origen.



23 Representa las funciones en los mismos ejes de coordenadas, y relaciona la abertura de las ramas de cada parábola con el coeficiente de x^2.

a) $y = x^2$ c) $y = 2x^2$

b) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ d) $y = \dfrac{1}{4}x^2$

24 Halla los vértices y los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

b) $g(x) = -2x^2 + x - 1$

c) $h(x) = -x^2 - 2$

25 Haz la representación gráfica de las siguientes funciones cuadráticas, indicando el vértice y los cortes con los ejes.

a) $y = x^2 - 2x - 8$ c) $y = x^2 + 4x + 4$

b) $y = -x^2 + 3x$ d) $y = 2x^2 + 3x - 2$

26 Representala función $y = x^2$ y, a partir de ella, dibuja las gráficas de estas funciones polinómicas.

a) $y = (x-2)^2$

b) $y = x^2 + 3$

c) $y = (x+3)^2$

d) $y = x^2 - 4$

¿Qué relación guardan las gráficas de las últimas cuatro funciones con la gráfica de la primera?

27 Haz la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$. Obtén la expresión algebraica de las siguientes funciones y represéntalas.

a) $f(x-2)$ c) $f(x+1)$

b) $f(x) - 4$ d) $f(x) + 2$

¿Hay alguna relación entre estas gráficas?

28 Considera las siguientes funciones.

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ $g(x) = (x-1)^2$ $h(x) = 3x$

Calcula la expresión algebraica de la función que se indica en cada apartado, y represéntala gráficamente.

a) $f(-x)$ d) $-g(x)$

b) $-f(x)$ e) $h(-x)$

c) $g(-x)$ f) $-h(x)$

29 Construye la tabla de valores y dibuja la gráfica de las funciones.

a) $y = x^3 + 2x^2 + 3$

b) $y = -x^3 + 6x + 1$

30 Halla los puntos donde cortan las siguientes funciones polinómicas al eje X.

a) $y = 3x + 9$

b) $y = -2x + 5$

c) $y = 6x^2 + 17x - 3$

d) $y = 8x^2 + 10x - 3$

e) $y = 2x^2 + x + 3$

31 Halla los puntos donde estas funciones cortan al eje X.

a) $y = (x-1)(x+2)$

b) $y = (2x-1)^2$

c) $y = (x-2)(x+3)(2x+1)$

32 Representa las siguientes funciones polinómicas, indicando los puntos de corte con los ejes.

a) $y = 4x^2 + 4x + 1$

b) $y = x^3 - x^2 - 9x + 9$

c) $y = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$

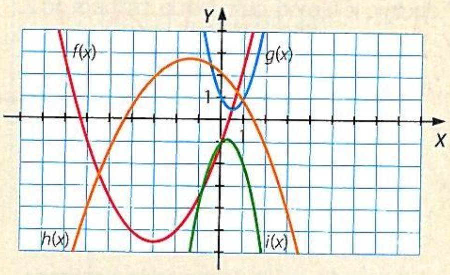
d) $y = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

e) $y = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

33 Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.

a) $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x - 1$ c) $y = -\dfrac{x^2}{3} - x + 2$

b) $y = 2x^2 - 2x + 1$ d) $y = -2x^2 + x + 1$



34 Representa funciones de la forma $y = ax^2 - 3x + 2$ con distintos valores de a, y estudia su variación en función del parámetro.

35 Representa funciones de la forma $y = x^2 + bx + 2$ con distintos valores de b, y explica cómo varían en función del parámetro.

36 Representa funciones de la forma $y = x^2 + 2x + c$ con distintos valores de c, y analiza su variación en función del parámetro.

37 Escribe funciones con las siguientes características.

a) Una parábola que corte al eje X en $x = 3$ y $x = 5$.
b) Una parábola que corte al eje X en $x = -2$ y $x = 1$.
c) Una parábola que corte dos veces al eje X en $x = 2$.
d) Una función cúbica que corte al eje X en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 1$.
e) Una función cúbica que corte al eje X dos veces en $x = 2$ y una vez en $x = -1$.
f) Una función cúbica que corte una vez al eje X en $x = 5$.
g) Una función polinómica de cuarto grado que corte al eje X en $x = -1$, $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$.
h) Una función de cuarto grado que solo corte dos veces al eje de abscisas, en $x = -2$ y en $x = 5$.

38 Explica las diferentes situaciones que pueden producirse al determinar dónde corta al eje X una función polinómica de cuarto grado.

39 Obtén la expresión algebraica y representa la función cuadrática que pasa por los puntos $A(1, -2)$, $B(2, -2)$ y $C(3, 0)$.

40 Halla y representa las funciones polinómicas de grado mínimo que pasan por los siguientes puntos.

a) $A(0, 0)$, $B\left(5, \frac{5}{2}\right)$ y $C(-2, -1)$
b) $A(-1, 0)$, $B(0, -1)$ y $C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
c) $A(3, 0)$, $B(4, 1)$ y $C(5, 0)$
d) $A(1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(3, 0)$ y $D(4, 1)$
e) $A(-2, 3)$, $B\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ y $C(2, 2)$
f) $A(-2, -2)$, $B(1, 1)$ y $C(4, -3)$

Funciones racionales

41 ¿Cuál es el dominio de estas funciones racionales?

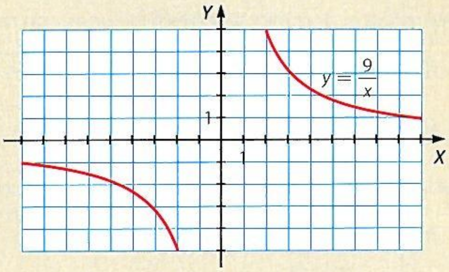
a) $f(x) = \dfrac{7}{(x + 7)(x - 4)}$

b) $g(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 3x - 10}$

42 Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$, determina la expresión algebraica de las siguientes funciones.

a) $g(x) = f(x - 3)$
b) $g(x) = f(x + 1)$
c) $g(x) = f(x) - 2$
d) $g(x) = f(x) + 3$
e) $g(x) = f(-x)$
f) $g(x) = -f(x)$

43 Observa la gráfica de la función $y = \dfrac{9}{x}$.



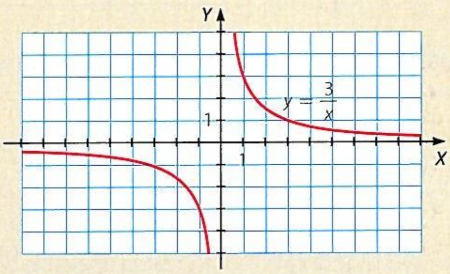
Representa las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{9}{x - 3}$
b) $y = \dfrac{9}{x} - 3$
c) $y = -\dfrac{9}{x}$
d) $y = \dfrac{9}{x + 2}$
e) $y = \dfrac{9}{x} + 2$
f) $y = -\dfrac{9}{x - 1}$

44 Sin representarlas, escribe la relación que hay entre las gráficas de estas funciones y la de $y = \dfrac{12}{x}$.

a) $y = \dfrac{12}{x + 4}$
b) $y = \dfrac{12}{x} - 2$
c) $y = \dfrac{12}{x} + 1$
d) $y = -\dfrac{12}{x}$

45 La gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x}$ es:



Encuentra la relación que tienen estas funciones con la función $y = \dfrac{3}{x}$ y represéntalas.

a) $y = \dfrac{x + 4}{x + 1}$

Ten en cuenta que: $y = \dfrac{x + 4}{x + 1} = 1 + \dfrac{3}{x + 1}$.

b) $y = \dfrac{2x - 5}{x - 1}$

c) $y = \dfrac{-2x + 1}{x + 1}$

d) $y = \dfrac{-x - 5}{x + 2}$

Funciones con radicales

46 Determina el dominio de estas funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt{x} + 7$

b) $g(x) = -\sqrt{x} + 5$

c) $h(x) = \sqrt{x + 7}$

d) $i(x) = -\sqrt{x + 5}$

47 Halla el dominio de las siguientes funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

b) $g(x) = \sqrt{x^4 - 81}$

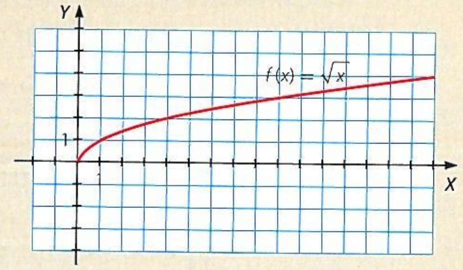
c) $h(x) = \sqrt[4]{1 - x^3}$

48 ¿Cuál es el dominio de estas funciones con radicales?

a) $f(x) = \dfrac{7x}{2 - \sqrt{x - 5}}$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{3x - 1}}{4 - \sqrt{x + 1}}$

49 La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es:



Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x - 2)$

b) $f(x + 3)$

c) $1 + f(x)$

d) $-f(x)$

e) $-1 - f(x)$

f) $f(x) - 2$

50 Con ayuda de la calculadora, realiza una tabla de valores para representar la función $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Determina su dominio y su recorrido.

51 A partir de la gráfica de la función $y = \sqrt{x^2 + 1}$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones con radicales.

a) $y = 1 + \sqrt{x^2 + 1}$

b) $y = -2 + \sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = 1 - \sqrt{x^2 + 1}$

d) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

52 Calcula el dominio de estas funciones.

a) $y = \sqrt[4]{(x - 1)^2}$

b) $y = \sqrt{x - 1}$

Utiliza el resultado para probar que las funciones no son iguales y represéntalas gráficamente.

Funciones exponenciales

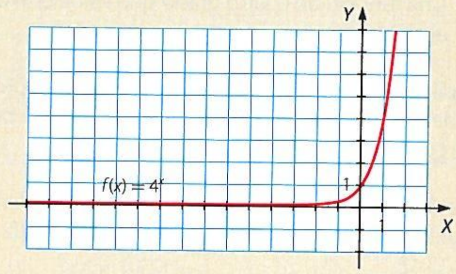
53 Representa la gráfica de las funciones $y = 2^x$ e $y = 3^x$. A partir de ellas, razona cómo será la gráfica de las funciones $y = 5^x$ e $y = 10^x$.

54 Ayúdate de la calculadora y realiza una tabla de valores para representar la función exponencial $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

55 Representa las funciones $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

A partir de las gráficas, ¿cómo serán las gráficas de las funciones $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{10}\right)^x$?

56 Esta es la gráfica de la función exponencial $f(x) = 4^x$.



Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x - 3)$

b) $f(x + 1)$

c) $4 + f(x)$

d) $-f(x)$

e) $2 - f(x)$

f) $f(x) - 2$

57 A partir de la gráfica de la función $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3}$

b) $y = 3^x$

c) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}$

d) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}$

e) $y = 3^{x+2}$

f) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-x}$

Funciones logarítmicas

58 Con la calculadora, realiza una tabla de valores para representar la función logarítmica $y = \log_3 x$.

59 Representa la gráfica de las funciones.

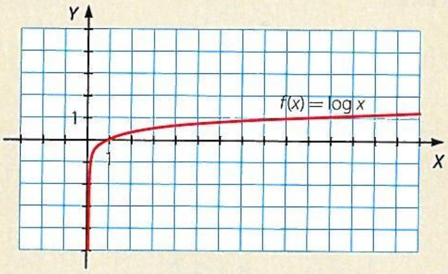
$$y = \log_2 x \qquad y = \log_3 x$$

Deduce, a partir de ellas, cómo será la gráfica de las funciones $y = \log_5 x$ e $y = \log x$.

60 Representa las funciones $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

¿Cómo serán las gráficas de las funciones $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{10}} x$?

61 Esta es la gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log x$.



Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x - 4)$
b) $f(x + 3)$
c) $4 + f(x + 1)$
d) $-f(x)$
e) $2 - f(x - 2)$
f) $f(2 - x)$

62 A partir de la gráfica de la función logarítmica $y = \log_3 x$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \log_3 3x$
b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$
c) $y = \log_3 \left(\dfrac{1}{x}\right)$
d) $y = \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{3}{x}\right)$
e) $y = \log_{\frac{1}{3}} 3x$
f) $y = \log_3 \left(\dfrac{x}{9}\right)$

Funciones trigonométricas

63 Dibuja la gráfica de $y = \cos x$ y, a partir de ella, haz la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = -\cos x$
b) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
c) $y = 1 + \cos x$
d) $y = \cos(-x)$

64 Dibuja la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y, a partir de ella, haz la gráfica de estas funciones.

a) $y = -\operatorname{sen} x$
b) $y = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
c) $y = -2 + \operatorname{sen} x$
d) $y = -\operatorname{sen}(-x)$

65 Realiza una gráfica y estudia las características de estas funciones.

$y = \operatorname{sen} 2x$ $\qquad$ $y = \operatorname{sen} 3x$

A partir de lo anterior explica cómo serán las gráficas de las funciones:

a) $y = \operatorname{sen} 4x$
b) $y = \operatorname{sen} 6x$

66 Representa y estudia las características de estas funciones.

$$y = \cos \frac{x}{2}$$
$$y = \cos \frac{x}{3}$$

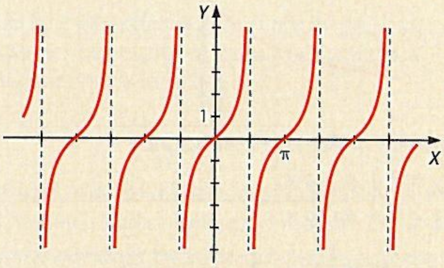
Explica a partir del estudio anterior, cómo serán las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = \cos \dfrac{x}{5}$
b) $y = \cos \dfrac{x}{6}$

67 Ayudándote de su gráfica, comprueba que estos pares de funciones no son iguales.

a) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ $\qquad$ $y = \dfrac{\cos x}{2}$
b) $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ $\qquad$ $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2}$
c) $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ $\qquad$ $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$

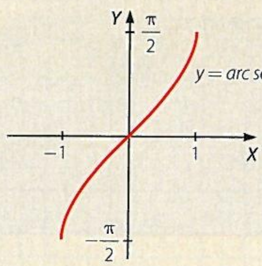
68 Esta es la gráfica de la función trigonométrica $y = \operatorname{tg} x$.



Utiliza la gráfica anterior para construir las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = \operatorname{tg}(x + \pi)$
b) $y = 1 - \operatorname{tg} x$

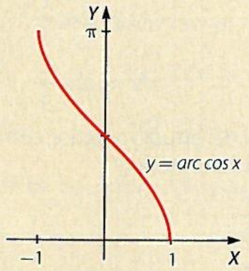
69 A continuación puedes ver la gráfica de la función $y = \operatorname{arc\,sen} x$.



Realiza las gráficas de las funciones.

a) $y = 2 + \operatorname{arc\,sen} x$
b) $y = 3 - \operatorname{arc\,sen} x$
c) $y = \operatorname{arc\,sen}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$
d) $y = \operatorname{arc\,sen}(x - 1)$

70 Esta es la gráfica de la función $y = arc\ cos\ x$.



Realiza las gráficas de las funciones.

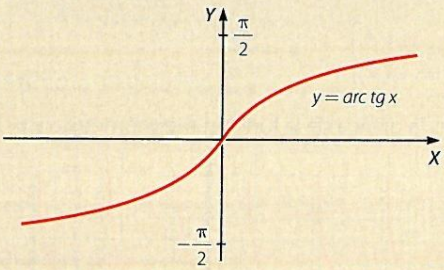
a) $y = 2 + arc\ cos\ x$

b) $y = 3 - arc\ cos\ x$

c) $y = arc\ cos\left(x - \frac{1}{2}\right)$

d) $y = arc\ cos\ (x - 1)$

71 Observa la gráfica de la función $y = arc\ tg\ x$.



Realiza las gráficas de las funciones.

a) $y = 2 + arc\ tg\ x$

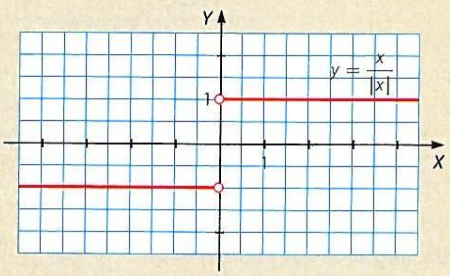
b) $y = 3 - arc\ tg\ x$

c) $y = arc\ tg\left(x - \frac{1}{2}\right)$

d) $y = arc\ tg\ (x - 1)$

Funciones definidas a trozos

72 La función cuya expresión algebraica es $y = \frac{x}{|x|}$ se llama *función signo de x*.



Encuentra su expresión algebraica como una función definida a trozos.

a) ¿Cuánto vale si $x = 3$?

b) ¿Y si $x = -5$?

c) ¿Y si $x = -3{,}4$?

73 Representa y describe las características de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ -x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x - 1} & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

74 Representa y describe las características de estas funciones definidas a trozos.

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2}{x - 3} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

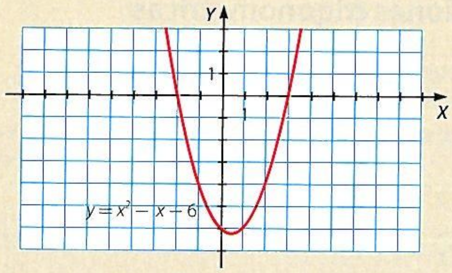
b) $g(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \log\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

75 Escribe como funciones definidas a trozos.

a) $y = |x + 2|$

b) $y = |12 - 3x|$

76 Observa la gráfica de la función $y = x^2 - x - 6$.



Realiza la gráfica de $y = |x^2 - x - 6|$.

77 Representa la función.

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 + 3x| & \text{si } x < -1 \\ -4 & \text{si } x = -1 \\ -x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Estudia el valor que toma la función en los puntos próximos a -1, completando las tablas.

Izquierda de −1	−2	−1,5	−1,1	−1,05
f(x)				

Derecha de −1	0	−0,5	−0,9	−0,95
f(x)				

Describe lo que le sucede a la función en las proximidades de -1.

78 Escribe como una función definida a trozos y representa las funciones.

a) $y = |x^2 - 4x - 5|$

b) $y = |x^2 - 4x + 5|$

c) $y = |2x^2 - 7x + 3|$

d) $y = |-x^2 + 4x - 5|$

79 Expresa como una función definida a trozos.

a) $y = |x| + |x + 2|$

b) $y = |x + 1| - |1 - x|$

c) $y = |x - 1| - |1 - x|$

d) $y = |2x + 1| - |2 - x|$

Problemas con funciones

80 El número de alumnos afectados por una epidemia de gripe se obtiene a partir de la función:

$$f(x) = \frac{30x}{x + 2}$$

siendo x el número de días transcurridos desde el comienzo de la epidemia.

a) ¿Cuántos afectados hubo el primer día?

b) ¿En qué momento el número de afectados fue 15?

c) Representa la función y comprueba los resultados que has obtenido en los apartados anteriores.

81 Un capital de 5.000 € está depositado en un banco, y produce un interés anual del 2 %.

a) ¿Cuánto dinero hay al cabo de un año?

b) ¿Y a los dos años?

c) ¿Y a los n años?

82 La tabla recoge el interés que ofrece un banco al ingresar dinero durante un año.

Dinero (€)	Interés (%)
Hasta 1.000	5
De 1.000 a 2.500	10
De 2.500 a 5.000	15
Más de 5.000	20

a) Representa la función que determina el interés obtenido dependiendo del dinero que se ingresa. ¿De qué tipo de función se trata?

b) Si se ingresan 1.800 €, ¿cuánto dinero tendré al final del año?

c) ¿Y si ingreso 500 €?

83 Encuentra las funciones inversas de estas funciones.

a) $y = 3x - 1$

b) $y = \sqrt{x}$

c) $y = sen\ 2x$

d) $y = \frac{1 + tg\ x}{2}$

e) $y = arc\ cos\ (x - 2)$

f) $y = \ln(x + 3)$

g) $y = 3 + 4 \cdot 5^x$

h) $y = \frac{1 + \log_3 x}{5}$

i) $y = |x - 1|$

j) $y = x$

84 Una granja de caracoles ha ajustado sus gastos de producción por x kilogramos de caracoles según la función:

$$G(x) = 20.00 + \frac{1}{200.000}x^3$$

Sus ingresos se rigen por la fórmula:

$$I(x) = 8.000 + 2x - \frac{1}{1.000}x^2 + \frac{1}{200.000}x^3$$

Averigua cuál es el número de kilogramos de caracoles con el que se obtiene el beneficio máximo.

85 Una ONG ha estimado que el número de personas ingresadas en los hospitales tras un *tsunami* sigue aproximadamente la fórmula:

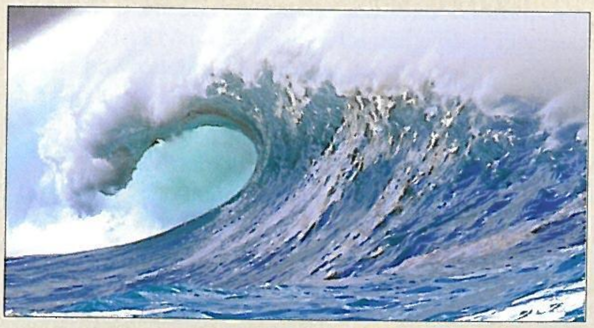
$$P = 1 + \frac{110}{t^2 + 10} \qquad t \in (0, 30)$$

donde P es el número de personas hospitalizadas, en miles, y t es el número de días transcurridos desde el *tsunami*.

a) ¿Cuántas personas habrá hospitalizadas el primer día?

b) ¿Y cuántas habrá al cabo de tres semanas?

c) Si la capacidad hospitalaria de una isla del área afectada es de 2.000 camas, ¿hasta que día estuvo desbordada la capacidad?



86 La evolución de una población viene determinada por la función $P(t) = 100 \cdot 2^t$, y la de los alimentos que necesitan sigue la función $A(t) = 1.000t + 1.000$.

a) ¿Cuánta población había al principio? ¿Y alimentos?

b) ¿Y después de 2 años?

c) ¿A partir de qué año la población tendrá menos alimentos de los que son necesarios?