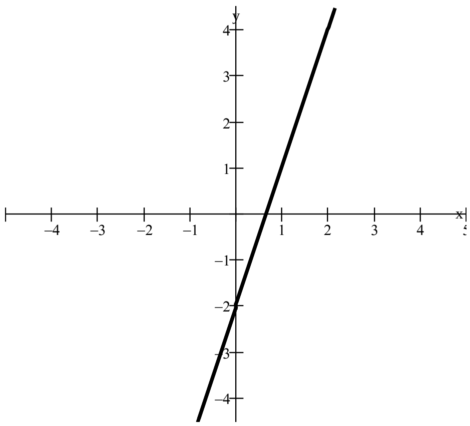
FUNCIONES ELEMENTALES

1.- FUNCIONES POLINÓMICAS

1.- Funciones Lineales

Son funciones cuya ley es un polinomio de primer grado, es decir, $f(x) = mx + n$
Sus gráficas son rectas y para representarlas basta con obtener dos puntos por los que pasen.

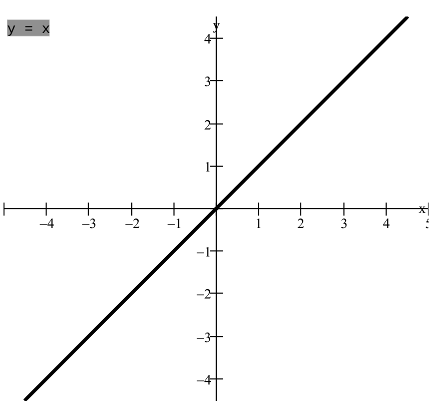
Por ejemplo: la función $f(x) = 3x - 2$ pasa por los puntos (0,-2) y (1,1), así que su gráfica sería:

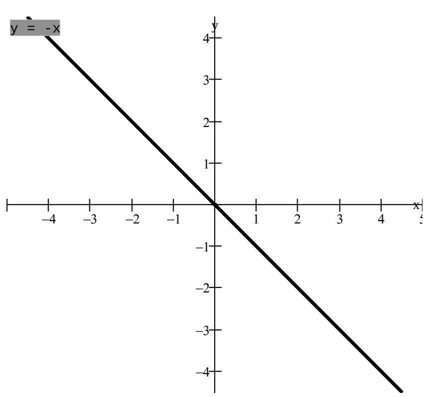


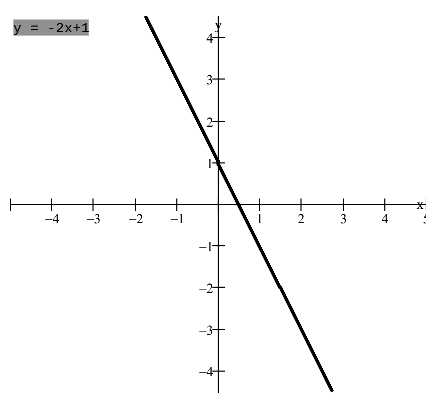
El Dominio y el Recorrido de todas estas funciones son todos los números Reales.
Si la *pendiente* de la recta (*m*) es positiva, la función será creciente, mientras que si *m* es negativa, será decreciente. A *n* se le llama *ordenada en el origen*, e indica el punto donde la gráfica corta al eje Y.

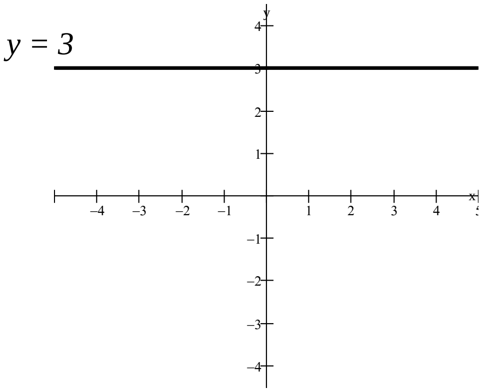
Cuanto más se acerque *m* a cero, más horizontal será la recta. Las rectas con pendiente 0 son horizontales, mientras que las rectas verticales son de la forma $x = a$.

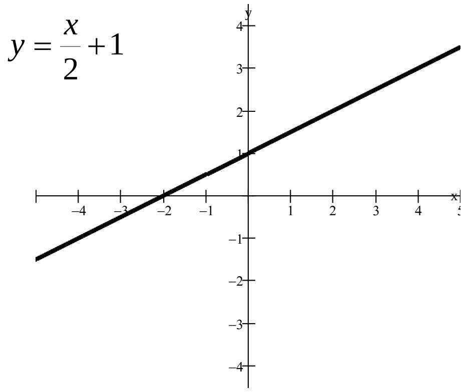
Algunos ejemplos son:











2.- Parábolas

Son funciones cuya ley es un polinomio de segundo grado, es decir:
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Sus gráficas son parábolas y para representarlas se calcula su vértice y los puntos de corte con el eje X.

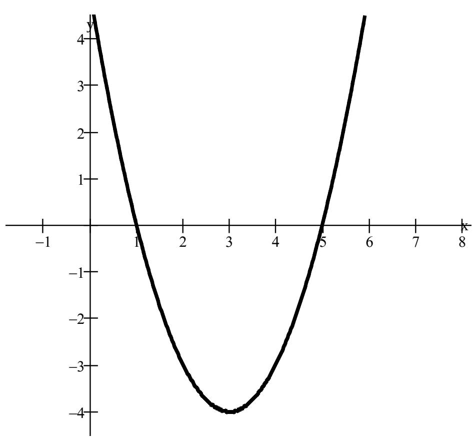
La primera coordenada del vértice se calcula mediante la fórmula $\frac{-b}{2a}$, mientras que la segunda se calcula sustituyendo la primera en la función.

Los puntos de corte con el eje X se obtienen igualando la función a 0 y resolviendo la ecuación de 2º grado correspondiente.

Así por ejemplo, representamos la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Su vértice será: $\frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$, $f(3) = -4$, es decir, el punto V(3,-4)

Si resolvemos la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$, obtenemos como soluciones de la misma x = 1 y x = 5, luego cortará al eje X en los puntos (1,0) y (5,0). Con todo ello su dibujos será:



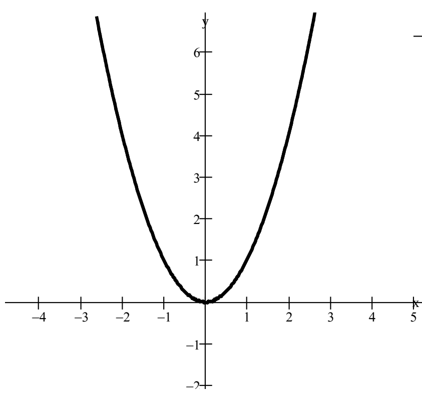
Como propiedad común, el dominio de todas estas funciones es todos los números Reales. En este caso el recorrido es $[-4,+\infty)$, aunque éste variará de una función a otra.

Otra característica común es que si *a > 0*, la parábola es convexa y su vértice corresponde a un mínimo absoluto, mientras que si *a < 0*, la parábola es cóncava y su vértice será un mínimo absoluto.

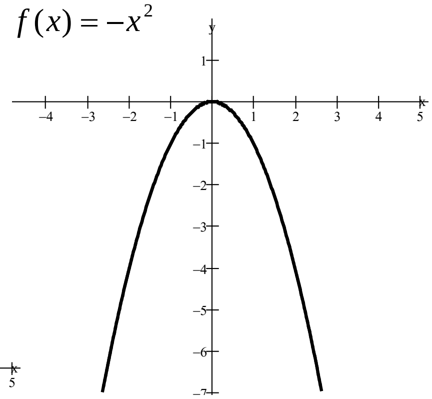
Si no tiene puntos de corte con el eje X o sólo tiene uno (el vértice) conviene darle un par de valores (uno anterior y otro posterior al vértice) para dibujarla más exactamente.

Algunos ejemplos son:

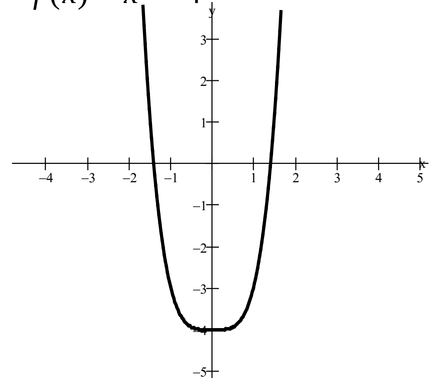
$f(x) = x^2$



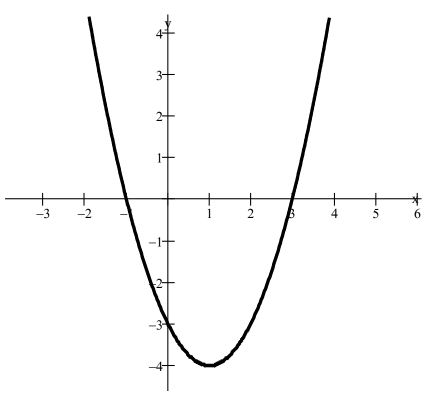
$f(x) = -x^2$



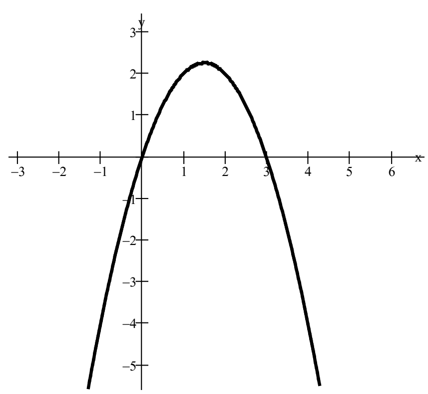
$f(x) = x^2 - 4$



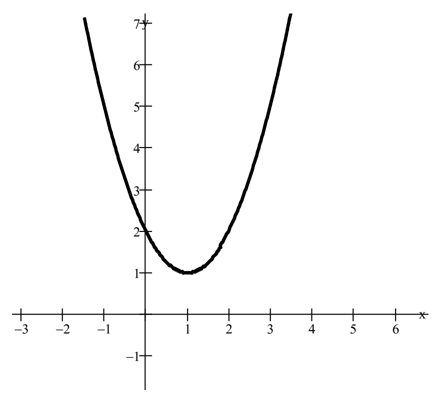
$f(x) = x^2 - 2x - 3$



$f(x) = -x^2 + 3x$



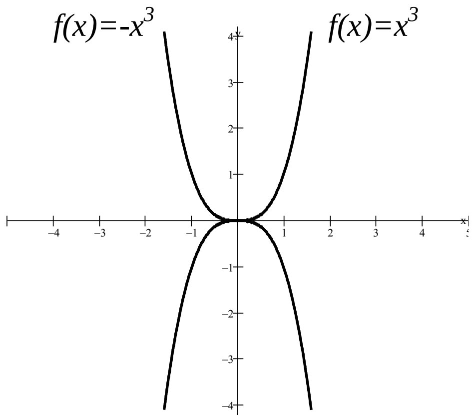
$f(x) = x^2 - 2x + 2$

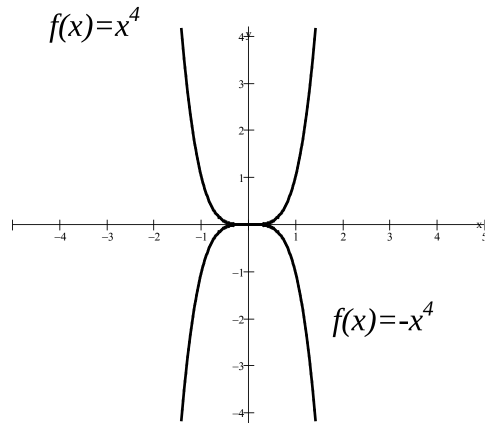


3.- Funciones polinómicas de grado superior

Son funciones cuya ley es un polinomio de grado superior a dos. No tienen características comunes, salvo que su dominio son todos los números reales.

Algunos ejemplos importantes son:



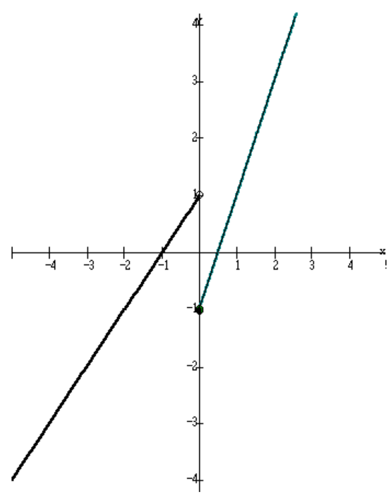


2.- FUNCIONES A TROZOS

Son funciones definidas por distintas leyes por intervalos, de manera que el dibujo de la función completa será una mezcla de las diversas funciones que componen la función representadas cada una de ellas en el intervalo (del eje X) correspondiente.

Por ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 2x-1 & x\geq 0 \end{cases}$$

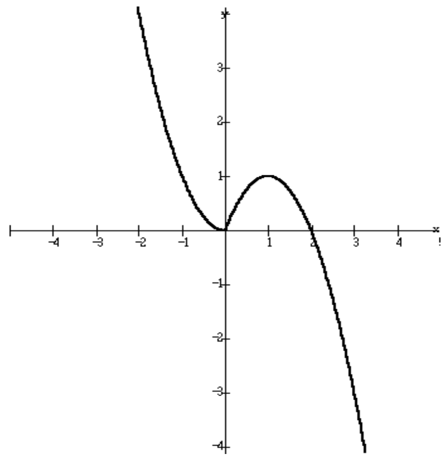


Al primer trozo de recta le hemos dado los valores (aunque podrían ser cualesquiera) (0,1) y (-1,0), mientras que para el segundo trozo los valores calculados han sido (0,-1) y (1,1). Como el 0 está incluido en el segundo trozo, se señala con un punto, dejando un hueco en el (0,1) que sería hasta donde llegaría (casi) el primer trozo de la función.

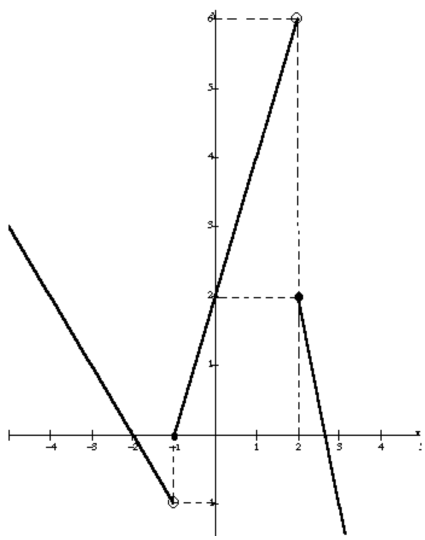
Es de destacar que el tipo de función que aparezca en cada trozo puede en principio ser cualquiera, y puede haber tantos trozos como queramos, de manera que nos podemos encontrar con funciones formadas por dos trozos de parábola, dos rectas y una parábola, ...

Algunos ejemplos podrían ser:

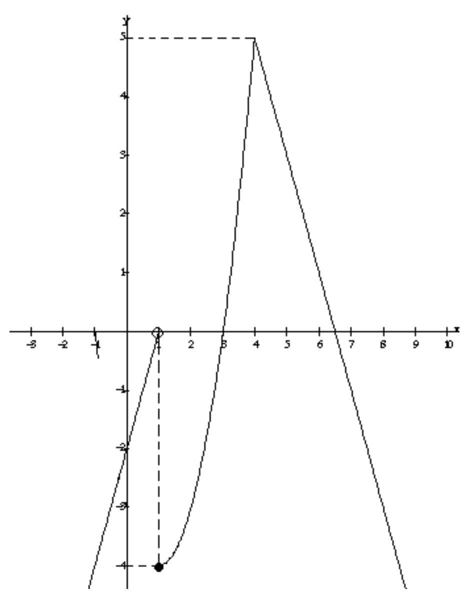
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ -x^2+2x & x\geq 0 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & x<-1 \\ 2x+2 & -1\leq x<2 \\ -3x+8 & x\geq 2 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} 2x-2 & x<1 \\ x^2-2x-3 & 1\leq x\leq 4 \\ -2x+13 & x>4 \end{cases}$$

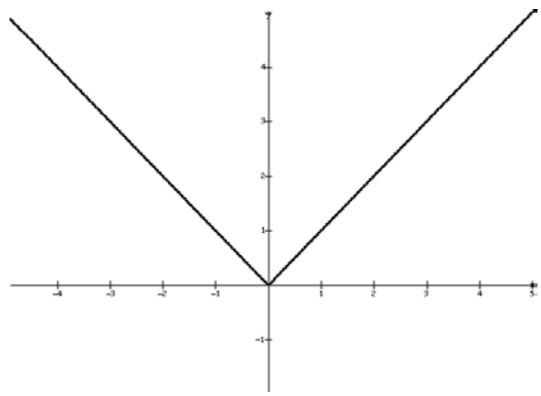


3.- FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Es un caso particular de función a trozos. El valor absoluto de un número, $|x|$, lo deja igual si éste es positivo y le cambia el signo si es negativo.

Es decir, en general: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Si la dibujamos como una función a trozos, su gráfica sería:

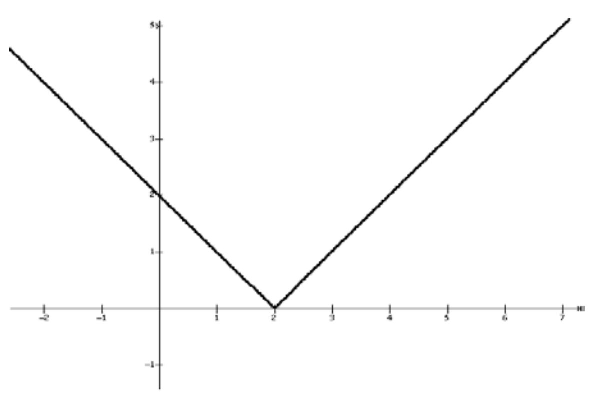


Como propiedades, aparte de que su dominio son todos los números Reales, destacar el hecho de que su recorrido son sólo los positivos (y el cero), algo que resulta obvio si tenemos en cuenta que el valor absoluto de un número nunca puede ser negativo.

A partir de ella podemos obtener los valores absolutos de otras funciones, como por ejemplo:

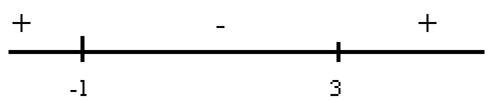
$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x-2 \geq 0 \\ -x+2 & x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -x+2 & x < 2 \end{cases}$$

Y cuyo dibujo sería algo como:



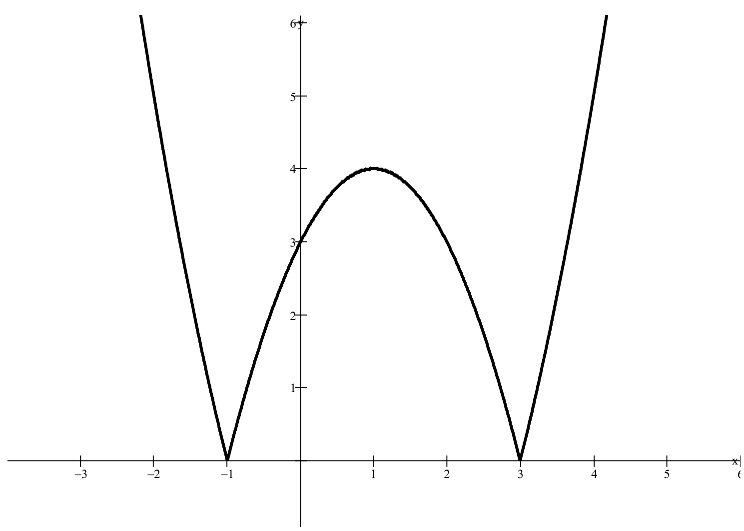
Algo más complicadas resultan los valores absolutos de parábolas.

Por ejemplo, para representar $\left|x^2-2x-3\right|$, primero resolvemos la ecuación $x^2-2x-3=0$, obteniendo como soluciones de la misma *x = -1* y *x = 3*. Estos dos valores dividen a la recta en tres intervalos: $(-\infty,-1),(-1,3)$ y $(3,+\infty)$. Tomamos un punto de cada intervalo para ver en cuál de ellos el polinomio es positivo y en cuál es negativo, lo que nos dirá en que trozos del eje X la parábola se queda como está y en cuáles se cambia de signo. En nuestro caso:



Y por tanto, la función quedaría por trozos: $\left|x^2-2x-3\right|=\begin{cases} x^2-2x-3 & x\leq -1 \\ -x^2+2x+3 & -1<x<3 \\ x^2-2x-3 & x\geq 3 \end{cases}$

Y su gráfica correspondiente:

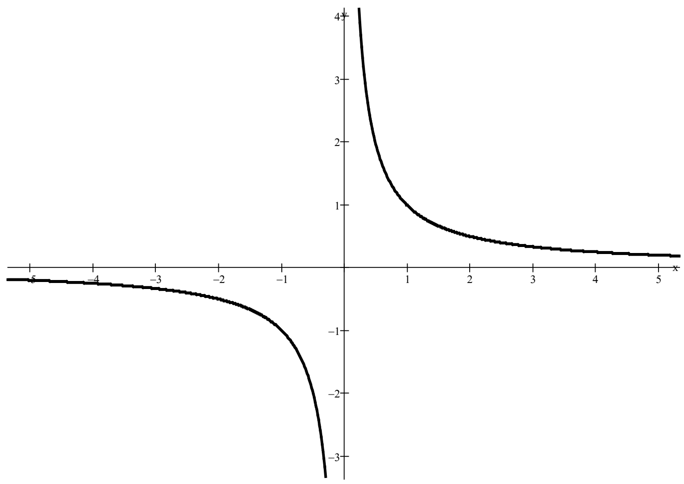


Ejercicio: Representar las funciones: $|3x-2|$, $|4-x|$, $\left|x^2-1\right|$, $\left|-x^2+6x\right|$, $\left|x^2-2x-8\right|$

4.- FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

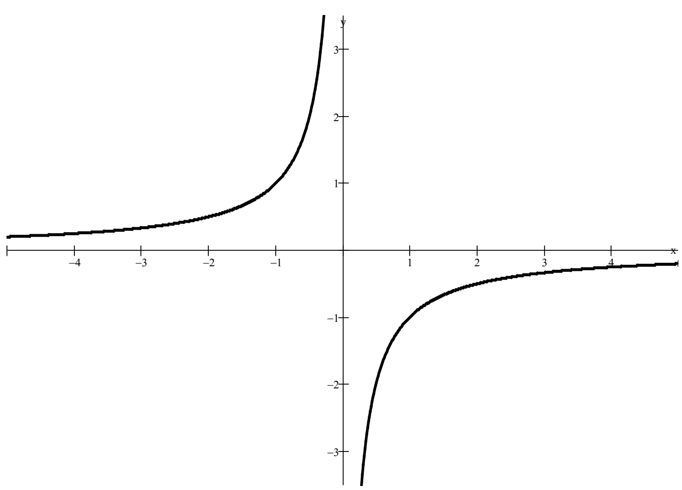
Son funciones cuya ley es del tipo: $f(x) = \frac{k}{x}$, donde k es un número real.

Por ejemplo, si le damos valores a la función $f(x) = \frac{1}{x}$, obtenemos una gráfica como la siguiente:



Claramente, y como propiedades comunes a todas estas funciones, su dominio y su recorrido son todos los números reales menos el 0. Y todas tienen una asíntota horizontal en el eje X y otra vertical en el eje Y

Si ahora dibujamos la función $f(x) = \frac{-1}{x}$, obtenemos la siguiente gráfica:

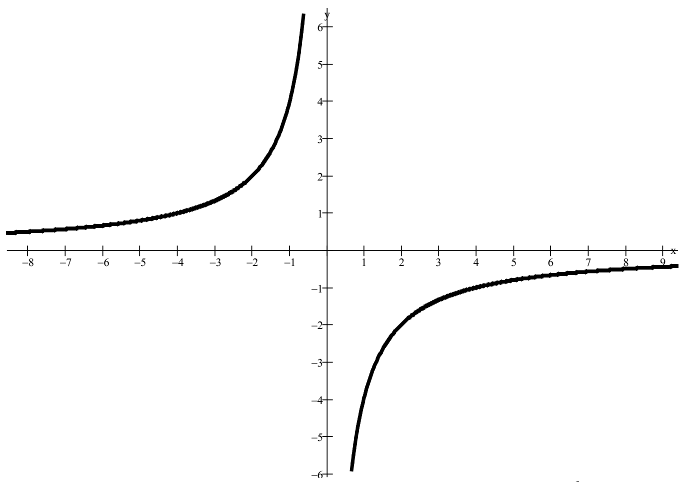


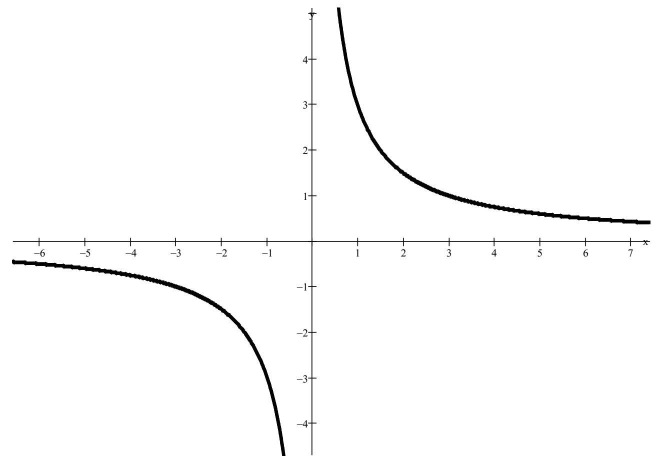
Cuya diferencia fundamental con la anterior es su monotonía (ésta es creciente y la otra era decreciente)

En general, si k es positivo la función va a ser decreciente, mientras que si k es negativo, será decreciente. Con este dato, y sabiendo la "pinta" que van a tener, bastará darle un par de valores (p. ej. el 1 y el –1) para poder dibujarlas correctamente.

Por ejemplo:

$$f(x)=\frac{-3}{x} \qquad\qquad f(x)=\frac{4}{x}$$





Ejercicio: Representar la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x} & x<0 \\ \dfrac{-2}{x} & x>0 \end{cases}$

5.- FUNCIONES EXPONENCIALES

Son funciones cuya ley es una potencia, es decir, del tipo
$f(x)=a^x$
Donde *a* es cualquier número positivo.

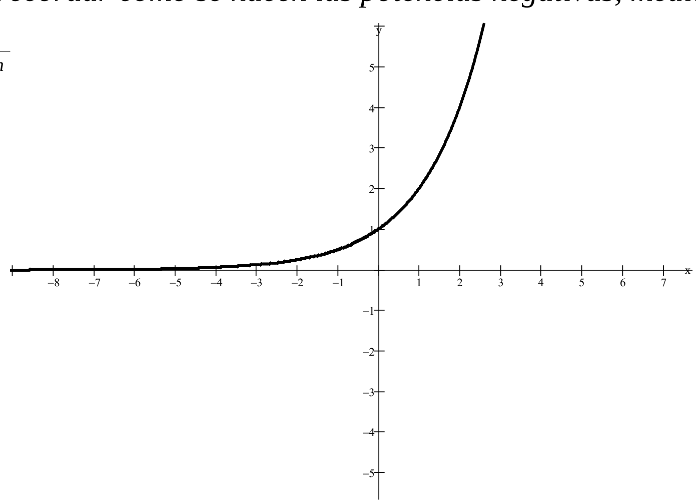
Por ejemplo, $f(x)=2^x$.
Si le damos valores a esta función, obtenemos una tabla como la siguiente:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
f(x)	1	2	4	8	1/2	1/4	1/8

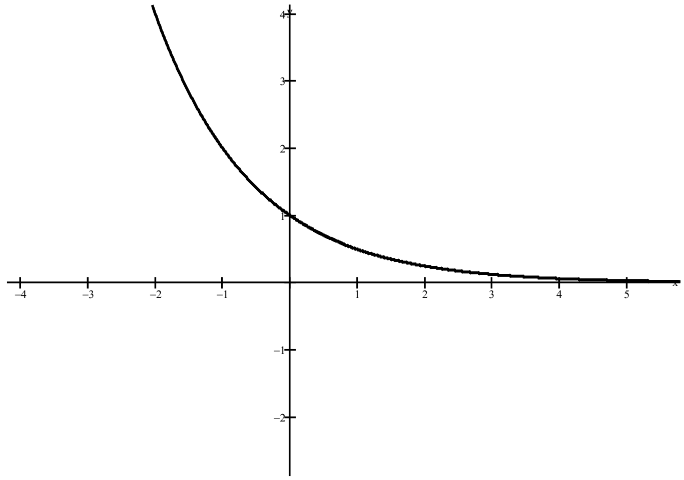
Nota: conviene recordar cómo se hacen las potencias negativas, mediante la propiedad:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Su gráfica sería:



De la misma manera podemos representar la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, obteniendo:

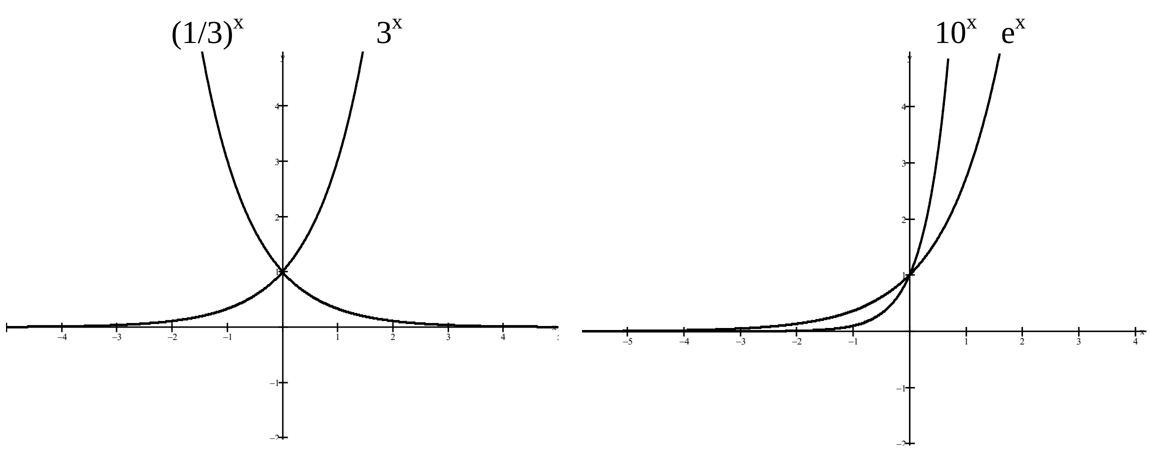


En general vemos por tanto que el dominio de todas estas funciones son todos los números reales y el recorrido los positivos (sin contar el 0).

Además, si $a > 1$, la función es creciente, mientras que si $a < 1$, la función es decreciente. Todas tienen una asíntota horizontal en el eje X (por la izquierda o la derecha según sean crecientes o decrecientes) y todas son convexas.

Para dibujarlas no hace falta hacer una tabla de valores, pues todas pasan por el punto (0,1) y por el punto (1,*a*), luego sabiendo la “pinta” que tienen y estos puntos podemos representarlas gráficamente sin problemas.

Así por ejemplo:



6.- FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Conviene antes de definirlas indicar la definición de logaritmo en base *a* de un número, a saber:

$$\boxed{\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x}$$

Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

$\log_5 25 = 2$ porque $5^2 = 25$

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$ porque $3^{-1} = \frac{1}{3}$

$\log_{10} 0'0001 = -4$ porque $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0'0001$

Como logaritmos especiales están el logaritmo en base 10, que se llama logaritmo decimal y se representa por *log* , y el logaritmo Nperiano que es el logaritmo en base *e* (2'71...) y se representa por ln.

Algunas propiedades interesantes de los logaritmos son:

$a) \log_a 1 = 0$

$b) \log_a a = 1$

$c) \log_a x^n = n \log_a x$

$d) \log_a xy = \log_a x + lob_a y$

$e) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Destacar fundamentalmente las dos primeras propiedades que nos servirán para representar las funciones logarítmicas.

Las funciones logarítmicas son aquellas cuya ley es del tipo:

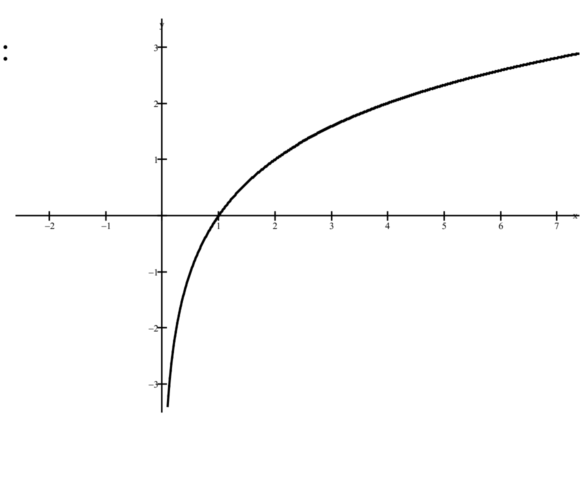
$f(x) = \log_a x$, con *a* un número real positivo.

Como propiedad fundamental, y teniendo en cuenta la definición de logaritmo, el dominio de todas estas funciones son los números reales positivos (sin contar el cero).

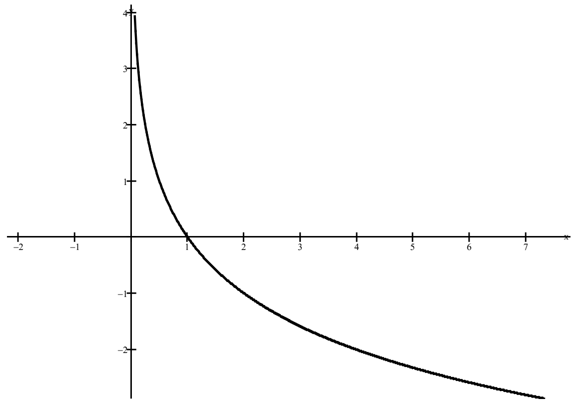
Vamos a representar por ejemplo la función $f(x) = \log_2 x$, para la que obtenemos la siguiente tabla de valores:

x	1	2	4	8	1/2	1/4	1/8
f(x)	0	1	2	3	-1	-2	-3

Su gráfica sería por tanto:



De la misma manera podemos representar la función $f(x) = \log_{1/2} x$, obteniendo:

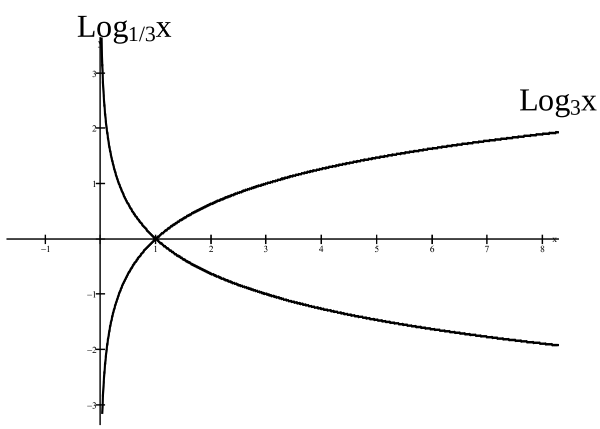


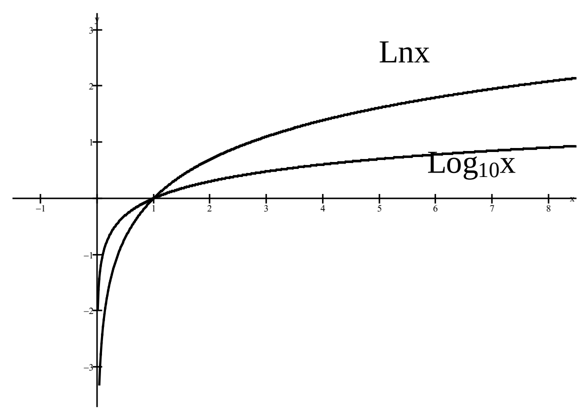
En general, además del dominio antes mencionado, el recorrido de todas las funciones de este tipo son todos los números reales.

Además, si *a > 1*, son crecientes y cóncavas, mientras que si *a < 1*, son decrecientes y convexas. (Todas tienen una asíntota vertical en el eje Y, que irá hacia arriba o hacia abajo dependiendo de si son crecientes o decrecientes)

Conociendo esto, y que todas ellas pasan por los puntos *(1,0)* y *(a,1)*, podemos representar cualquier función logarítmica.

Por ejemplo:





7.- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

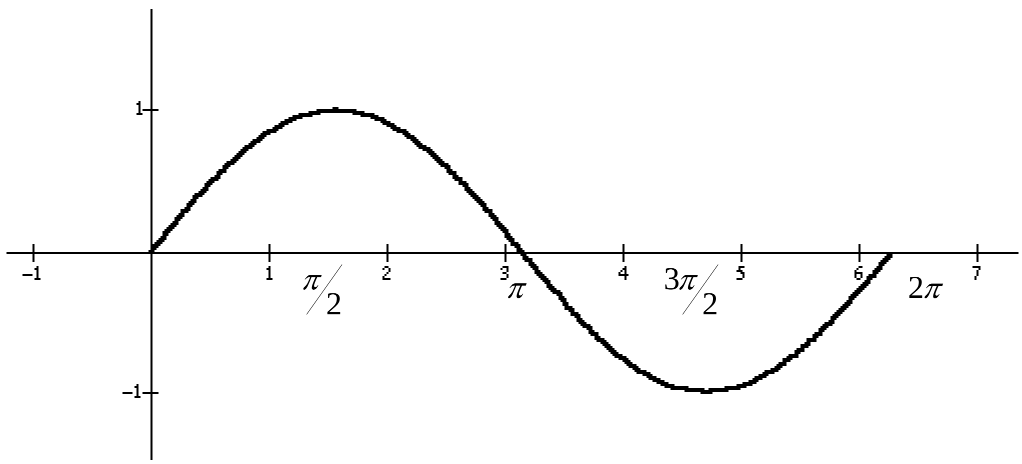
Son funciones cuya ley es una razón trigonométrica.

Las funciones trigonométricas más habituales son **senx** y **cosx**

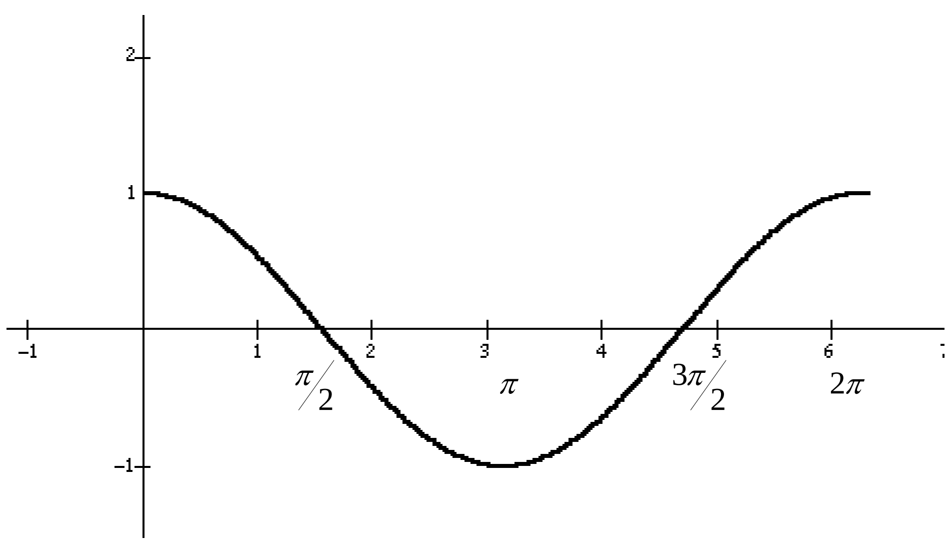
Destacar que, aunque el dominio de éstas funciones son todos los números reales, son periódicas de periodo 2π, lo que significa que se van repitiendo y por tanto lo que haga su gráfica en el intervalo de 0 a 2π, será lo mismo que haga en cualquier intervalo de la misma amplitud (de 2π a 4π, de 4π a 6π, de -2π a 0, ...)

Sus gráficas, que se obtienen con una simple tabla de valores y recordando cuestiones básicas de trigonometría, son las siguientes:

F(x) = sen x



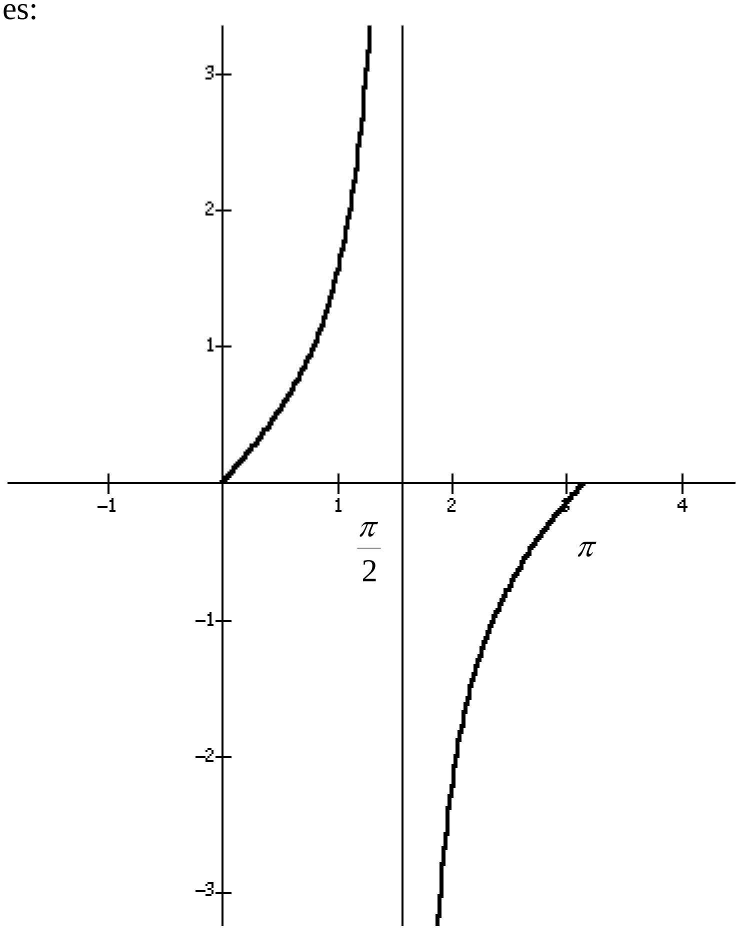
F(x) = cosx



Por otra parte está la función tangente, es decir: $f(x) = tgx = \frac{senx}{\cos x}$, cuyo dominio, a diferencia de las anteriores, serán todos los números reales menos aquellos puntos donde el coseno valga 0, es decir, los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}$$

En todos estos puntos la función tangente tendrá asíntotas verticales. Además, el periodo de esta función es π, con lo que bastará representarla en el intervalo de 0 a π.
Su gráfica es:



EJERCICIOS

Representar gráficamente las siguientes funciones:

1) $f(x) = -x^2+4x+5$

2) $f(x)=\begin{cases} x+3 & x<-1 \\ 2x^2 & -1\le x<2 \\ 8 & 2\le x \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x\ge 0 \\ x^2-x+1 & si\ x<0 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} 2/x & x<0 \\ Lnx & 0<x<1 \\ -x+1 & x\ge 1 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3^x} & x<0 \\ 4x-x^2 & 0\le x<4 \\ 2x-8 & x\ge 4 \end{cases}$

6) $f(x)=|3x-5|$

7) $f(x)=\begin{cases} x & si\ x<2 \\ -2x & si\ x>2 \end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x\le 0 \\ 1 & si\ 0<x<3 \\ 5x-2 & si\ x\ge 3 \end{cases}$

9) $f(x)=|x^2-2x-3|$

10) $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x\le -2 \\ 2 & -2<x<2 \\ x & x\ge 2 \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & x<0 \\ 3x+1 & 0\le x<1 \\ \left(1/4\right)^x & x\ge 1 \end{cases}$

12) $\mathrm{f}(x)=|-x^2+8x-12|$

13) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\le 0 \\ x^2-2x & x>0 \end{cases}$

14) $f(x)=\begin{cases} -x & x\le 1 \\ 2^x & x>1 \end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases} 1 & x\le -1 \\ -x^2+2 & -1<x<1 \\ \log_2 x & x\ge 1 \end{cases}$

16) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & x\le 0 \\ x^2-4x & x>0 \end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x\le 1 \\ 3^x & x>1 \end{cases}$

18) $f(x)=\begin{cases} e^x & x\le 0 \\ -x^2+1 & 0<x<1 \\ \log_2 x & x\ge 1 \end{cases}$

19) $f(x)=4|x|-x^2$

20) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3^x} & x\le 0 \\ -x^2+2x+3 & 0<x<3 \\ 2x-6 & x\ge 3 \end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases} 2^x & x\le 0 \\ x^2-2x & 0<x<3 \\ \log_3 x & x\ge 3 \end{cases}$ 22) $\mathrm{f}(x)=\left|x^2-4x-5\right|$

23) $f(x)=\begin{cases} 3^x & x\le 0 \\ x^2-2x & 0<x<2 \\ -x^2+6x-8 & x\ge 2 \end{cases}$ 24) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x} & x<0 \\ \log_2 x & 0<x<2 \\ -x^2+4x-3 & x\ge 2 \end{cases}$

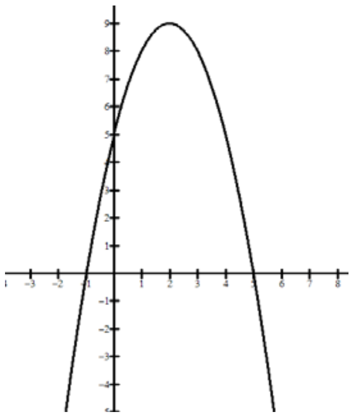
25) $f(x)=\left|-x^2+x+6\right|$ 26) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^x} & x\le 0 \\ x^2-2x & 0<x<2 \\ 3x-6 & x\ge 2 \end{cases}$ 27) $\mathrm{f}(x)=x^2-4|x|+4$

28) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le 2 \\ -x+5 & 2<x<5 \\ -x^2+10x-24 & x\ge 5 \end{cases}$ 29) $\left|x^2-2x-8\right|$

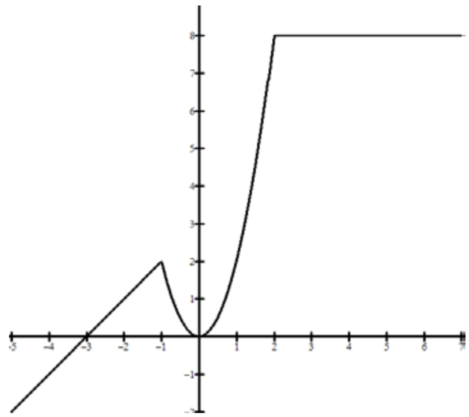
30) $f(x)=\begin{cases} -x^2-4x-3 & x<-1 \\ x^3+1 & -1\le x\le 1 \\ -2/x & x>1 \end{cases}$

SOLUCIONES

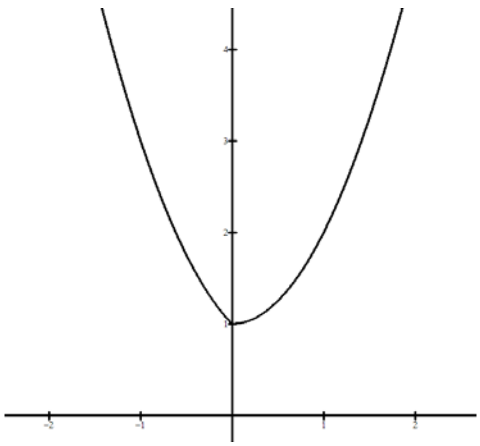
1)



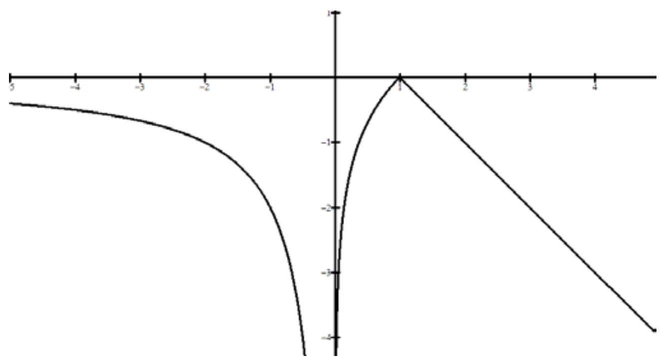
2)



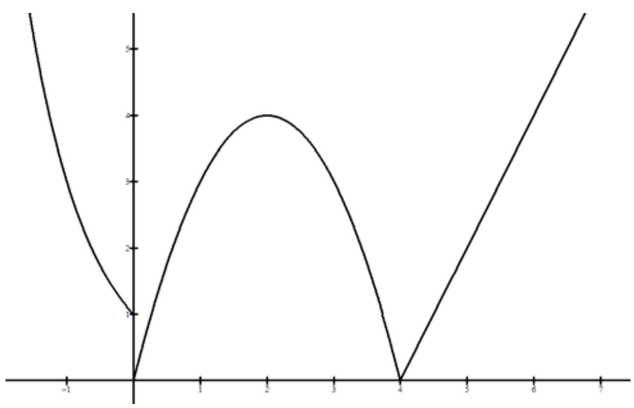
3)



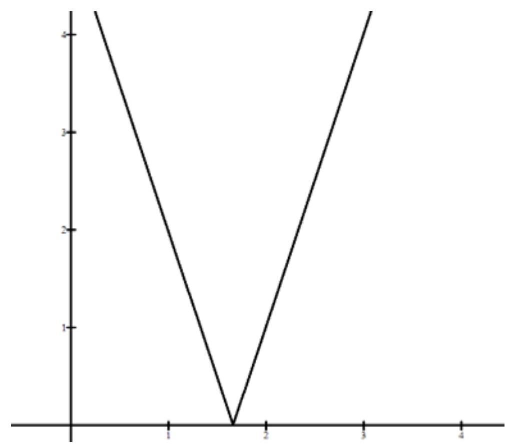
4)



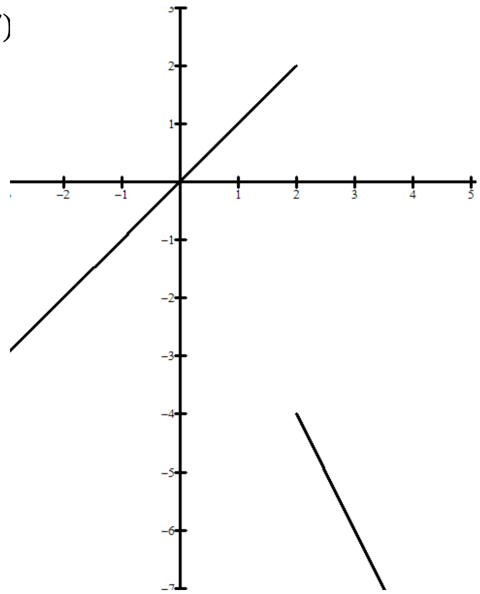
5)



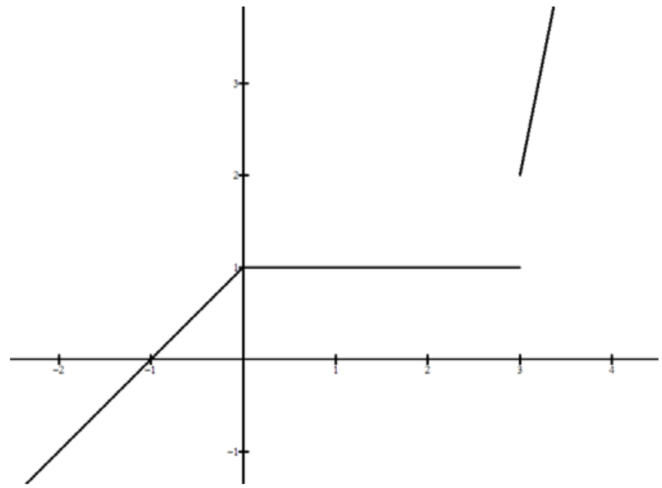
6)



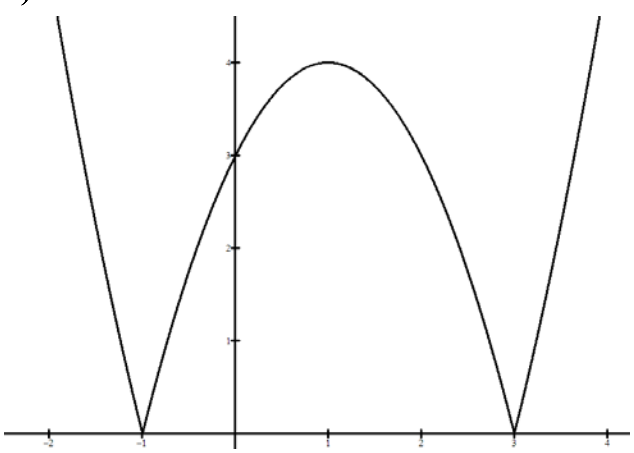
7)



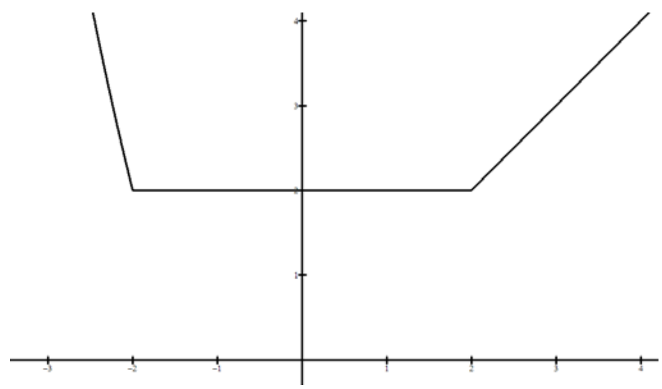
8)



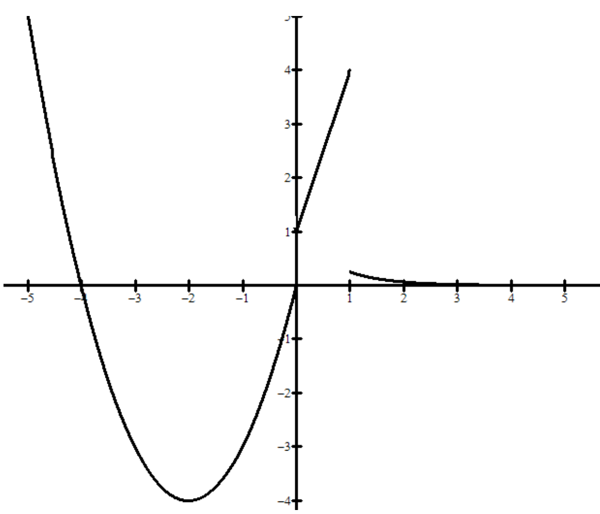
9)



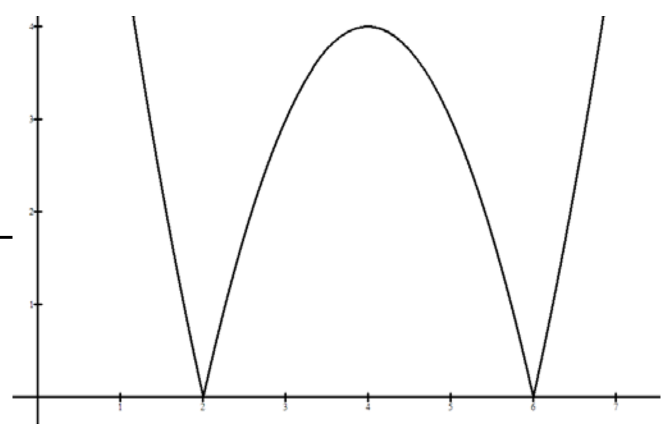
10)



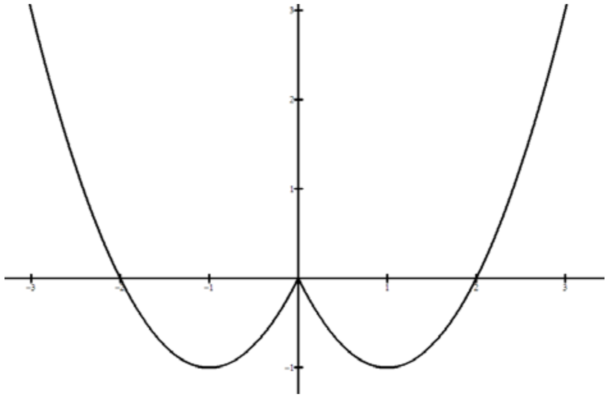
11)



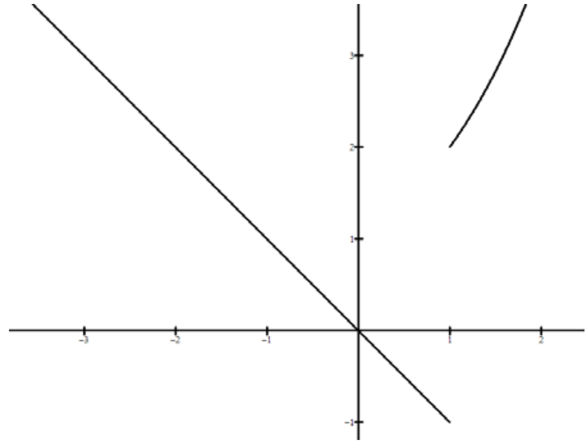
12)



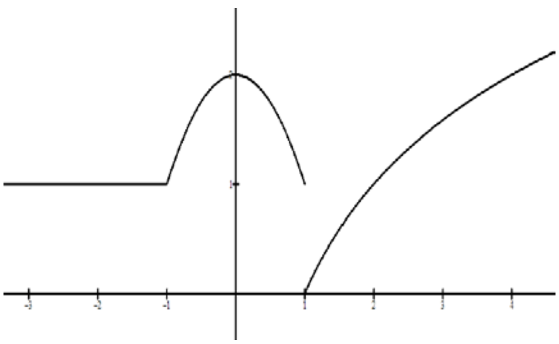
13)



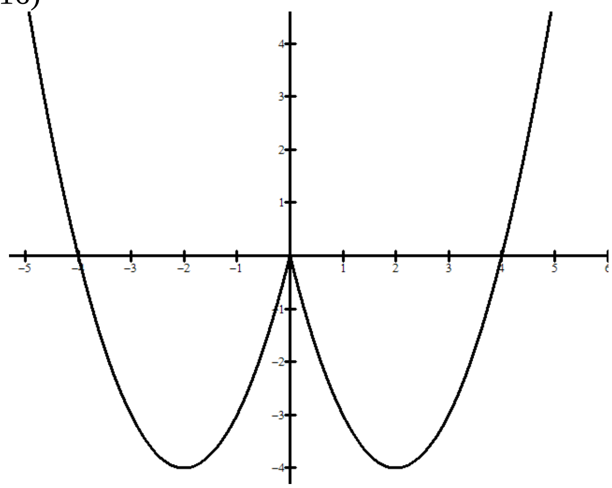
14)



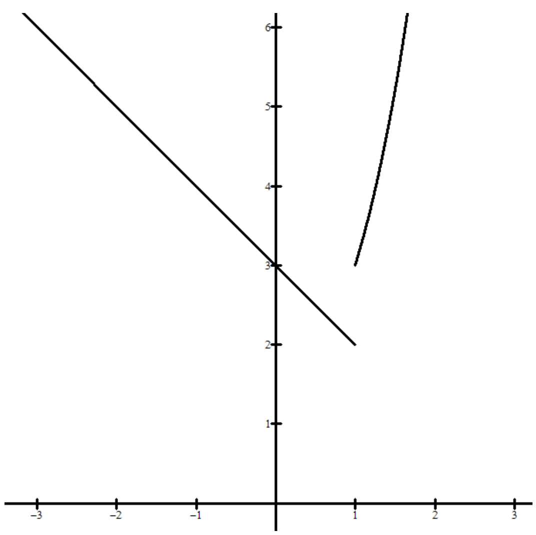
15)



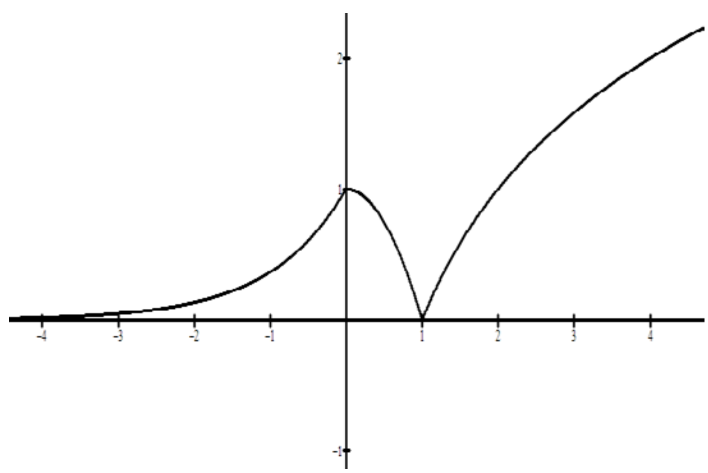
16)



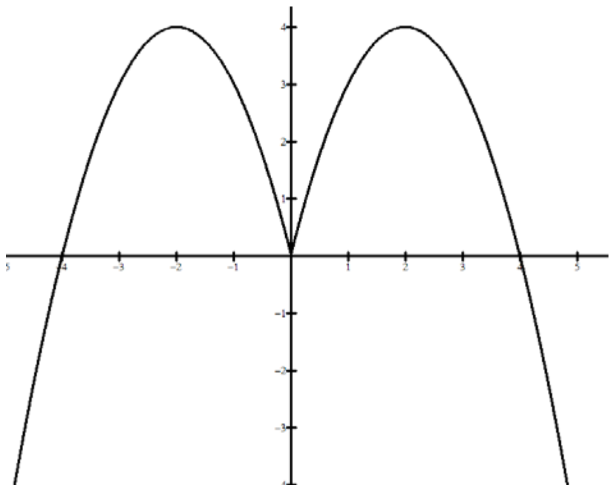
17)



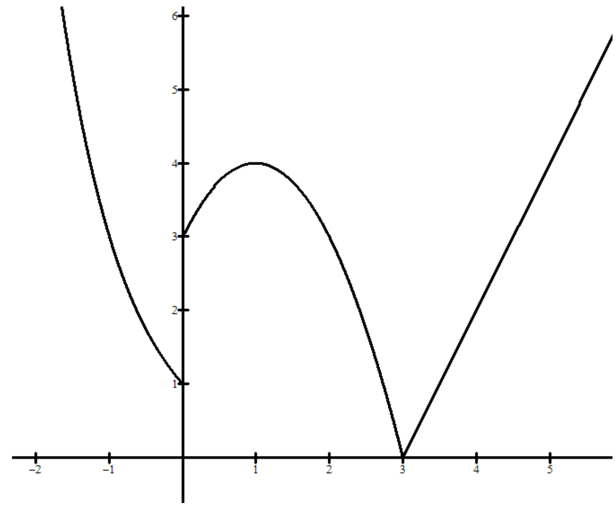
18)



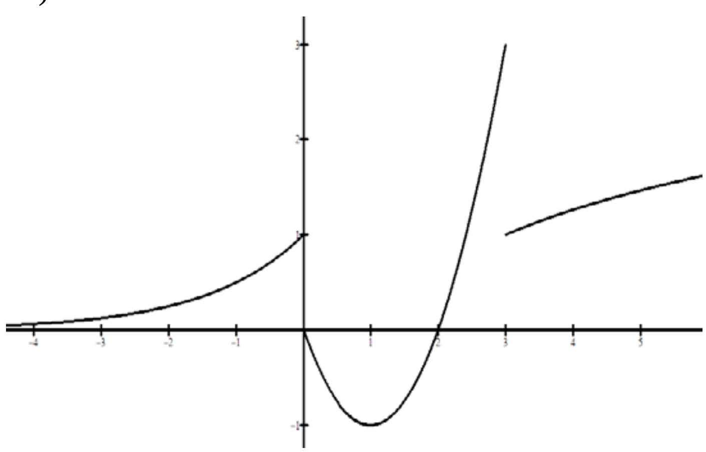
19)



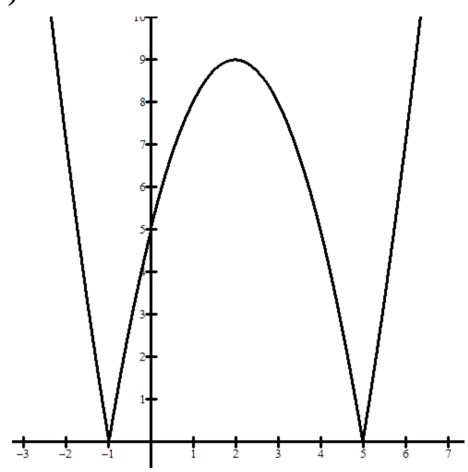
20)



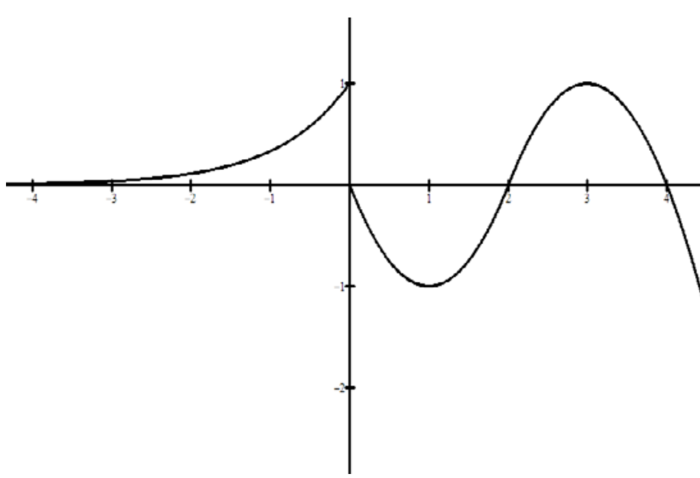
21)



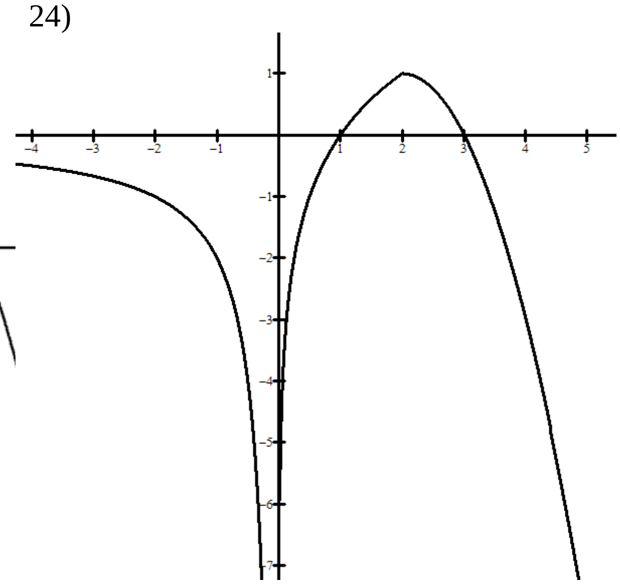
22)



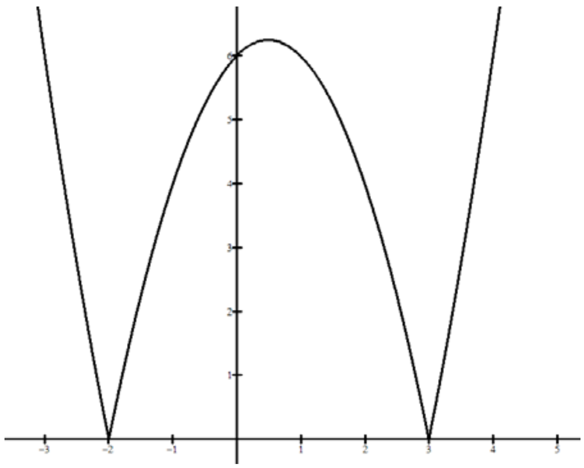
23)



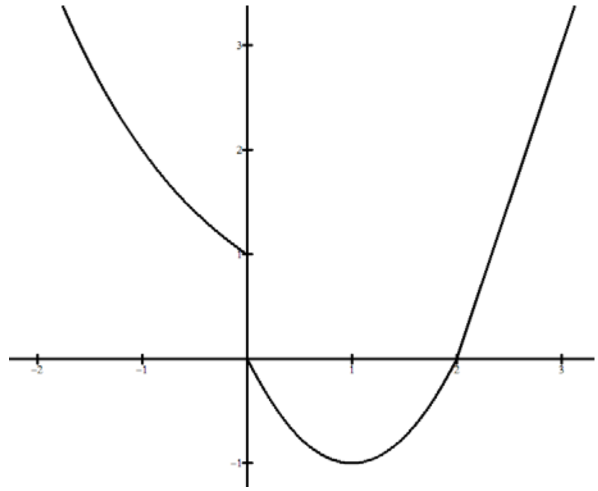
24)



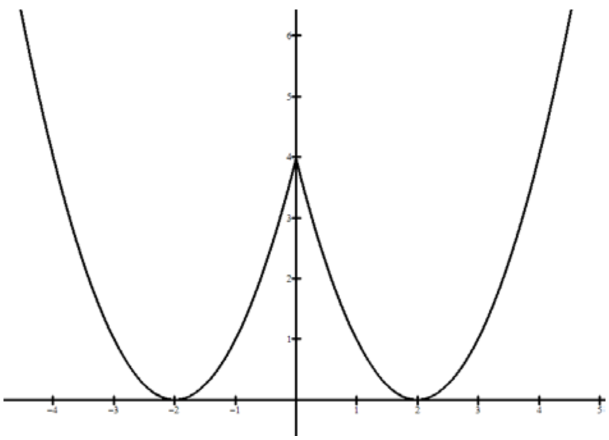
25)



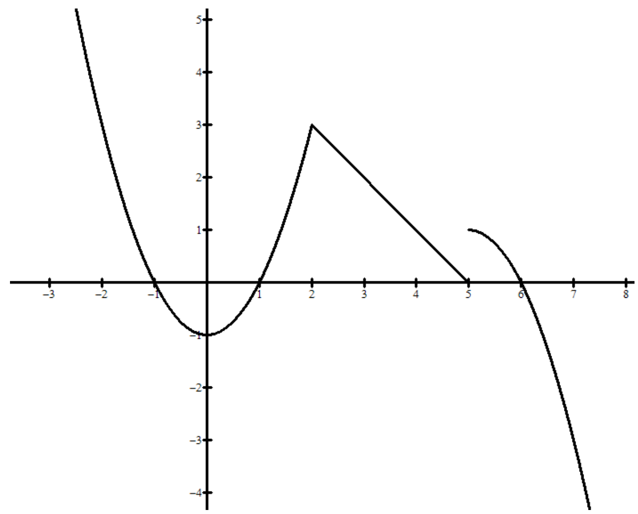
26)



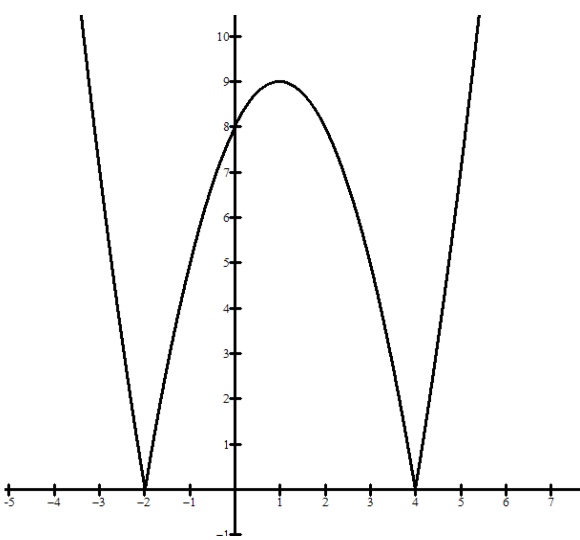
27)



28)



29)



30)