TEMA 5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

I. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Resolver un triángulo rectángulo es obtener a partir de los datos conocidos todos los ángulos y lados de dicho triángulo. Para resolver un triángulo utilizaremos los siguientes teoremas:

1. ***Teorema de Pitágoras***
2. ***Suma de ángulos es 180º***
3. ***Razones trigonométricas***

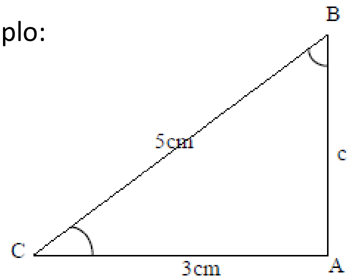
Todo triángulo rectángulo se puede calcular si conocemos dos datos, siempre que uno de ellos sea un lado.

CASO1: DOS LADOS CONOCIDOS

Nos faltaría conocer un lado y dos ángulos (ya que el otro ángulo es 90º). Pasos:

a) El tercer lado se calcula por Pitágoras
b) Calculamos los otros dos ángulo a partir de las razones trigonométricas

Ejemplo:



$c=\sqrt{5^2-3^2}=4\text{cm}$

$\cos\hat{C}=3/5 \rightarrow \hat{C}=\arccos(3/5)=53°7'48''$

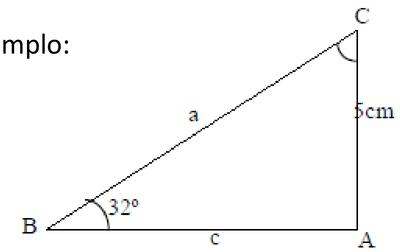
$\hat{B}=90°-\hat{C}=36°52'12''$

CASO 2: UN LADO Y UN ÁNGULO CONOCIDOS

Nos falta conocer otro ángulo y dos lados

a) Obtenemos el otro ángulo restando a 90º el que nos han dado
b) Obtendremos los otros dos lados a partir de las razones trigonométricas

Ejemplo:



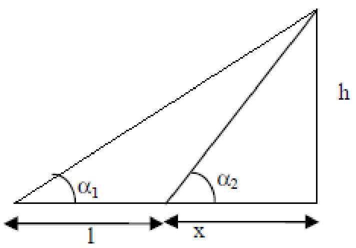
$\hat{C}=90°-\hat{B}=58°$

$\text{sen}(32)=5/a \rightarrow a=5/\text{sen}(32)\approx 9{,}4\text{cm}$

$\text{tg}(32)=5/c \rightarrow c=5/\text{tg}(32)\approx 8\text{m}$

CÁLCULO ALTURA CON DOBLE MEDIDA

Cuando queremos calcular la altura de una montaña, casa, etc. pero no somos capaces de acercarnos a la base, y por tanto no podemos calcular la distancia de un punto al objeto que deseamos medir tendremos que utilizar otro método. Veamos como con dos medidas indirectas podemos obtener la altura.



Donde conocemos l, α_1, α_2

$$\left.\begin{array}{l}\text{tg}(\alpha_1)=h/(l+x)\\ \text{tg}(\alpha_2)=h/x\end{array}\right\}$$

es un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas.

II. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo cualquiera es determinar todos sus elementos, es decir, sus tres lados y ángulos.

Para resolverlo aplicaremos los siguientes teoremas:

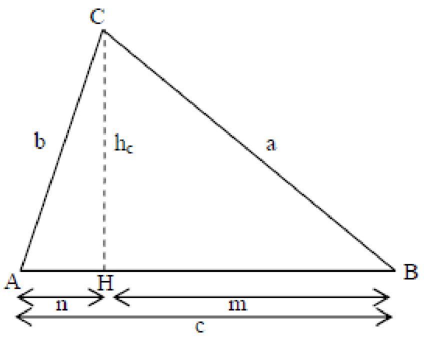
- Teorema del seno
- Teorema del coseno
- La suma de los ángulo del triángulo es 180º ($\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180º$)

✓ Un triángulo queda determinado cuando conozcamos 3 de sus 6 elementos, siempre que no sean sus 3 ángulos.
✓ Para evitar que los errores se propaguen es recomendable utilizar los datos que nos dan inicialmente, y no los que hemos ido calculando.
✓ No siempre un triángulo se puede resolver, es decir con los datos dados nos pueden dar soluciones imposibles.
✓ El caso más problemático se da cuando se conocen dos lados y un de los dos ángulos que no formen dichos lados.
✓ Por lo general el teorema del coseno se utiliza cuando se conocen más lados que ángulos.

TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO

Estos teoremas se utilizan para resolver triángulos no rectángulos, en los que no podemos aplicar ni el teorema de Pitágoras, ni las razones trigonométricas.

Es posible resolver los triángulos sin necesidad de conocer los teoremas del seno y del coseno, trazando una de sus alturas descomponemos el triángulo en dos triángulos rectángulos, donde podremos aplicar el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas. Pero resulta más sencillo y metódico aplicar los teoremas del seno y del coseno.



Teorema del seno: en todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Nota: el cociente de estas relaciones es igual a 2R, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}\frac{c}{sen\hat{C}}=2R$$

Teorema del coseno: las relaciones entre los tres lados y los ángulos de cualquier triángulo son:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\hat{C}$$

III. ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE LOS LADOS Y LOS ÁNGULOS

$$A_{\text{triángulo}}= =\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot sen(\hat{A})=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot sen(\hat{C})=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot sen(\hat{B})$$

CASOS PRÁCTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

1- . Conocido dos lados y el ángulo que forman.

Siempre una solución

Ejemplo: $\hat{C} = 60°$, *a=20cm, b=10cm*

Teorema del coseno → $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\hat{C})$ → $c^2=400+100-400\cdot\cos(60)$ → $c=\sqrt{300}$cm

Teorema del seno → $\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{20}{sen\hat{A}}=\frac{\sqrt{300}}{sen(60)} \rightarrow \hat{A}=90$ → $\hat{B} = 30°$

2- . Conocidos dos ángulos y un lado

Siempre una única solución.

Ejemplo: $\hat{C} = 60°$, $\hat{A} = 80°$ *a=10m*

$\hat{B} = 180 - 60 - 80 = 40°$

Teorema del seno: $\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{10}{sen80}=\frac{c}{sen(60)} \rightarrow c=8{,}8m$

Teorema del seno: $\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{10}{sen80}=\frac{b}{sen(60)} \rightarrow b=6{,}5m$

3- Conocido los tres lados

Puede ocurrir:

1. Una única solución
2. Ninguna solución: esto ocurre cuando un lado es mayor o igual que la suma de los otros dos, o menor o igual que la resta de los otros dos.

Ejemplo 1: a=2cm,b=4cm, c=5cm.

Apliquemos el teorema del coseno para obtener alguno de los ángulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\hat{A}$ → $4=16+25-40\cdot\cos(\hat{A})$ → $\cos(\hat{A}) = \frac{37}{40} \rightarrow \hat{A} = 22{,}3°$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\hat{B}$ → $16=4+25-20\cdot\cos(\hat{B})$ → $\cos(\hat{B}) = \frac{13}{20} \rightarrow \hat{B} = 49{,}6°$

$\hat{C} = 180° - \hat{B} - \hat{A} = 108{,}1°$

Ejemplo 2: a=2cm,b=4cm, c=7cm.

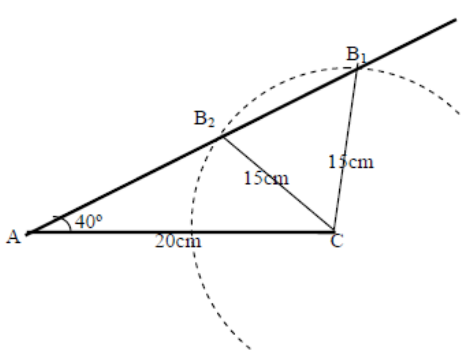
Apliquemos el teorema del coseno para obtener alguno de los ángulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\hat{A}$ → $4=16+49-56\cdot\cos(\hat{A})$ → $\cos(\hat{A}) = \frac{61}{56} \rightarrow$ *No solución*

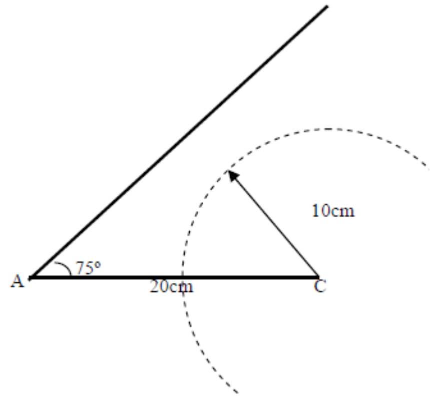
4- . Conocido dos lados y uno de los dos ángulos que no forma estos lados.

Este es el problema más complejo, pues puede ocurrir tres cosas:

1) a=15cm, b=20cm, $\hat{A}$=40° (dos soluciones)



2) a=10cm, b=20cm, $\hat{A}$=75° (0 soluciones)



3) a=10cm, b=20cm, $\hat{A}$=30° (1 solución)