TEMA 3: ÁLGEBRA: POLINOMIOS, ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS

POLINOMIOS

1. Valor numérico

El valor numérico del polinomio P(x) para $x = a$ *se* determina al sustituir en el polinomio la variable x por a.

Ejemplo:
Dado o polinomio $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$, el valor numérico del polinomio $p(x)$ para $x = 3$, es el número que resulta al sustituir x por 3; es decir, $p(3) = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 8 =$ **25**

2. Operaciones con polinomios

Suma:

$$\begin{array}{rrrrrr} P(x) = & 2x^4 & -5x^3 & +6x^2 & -x & +3 \\ Q(x) = & -x^4 & +6x^3 & -5x^2 & -2x & -1 \\ \hline P(x)+Q(x) = & x^4 & -x^3 & +x^2 & -3x & +2 \end{array}$$

Resta:

$P(x) = 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2 \qquad Q(x) = 6x^3 + 8x + 3$

$$\begin{array}{rrrrrr} P(x) = & 7x^4 & & +4x^2 & +7x & +2 \\ -Q(x) = & & -6x^3 & & -8x & -3 \\ \hline P(x)-Q(x) = P(x)+(-Q(x)) = & 7x^4 & -6x^3 & +4x^2 & -x & -1 \end{array}$$

Multiplicación:

$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$
$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$
$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

$$\begin{array}{rrrrr} & & 2x^3 & -3x^2 & +4x \\ & & & 2x^2 & -3 \\ \hline & & -6x^3 & +9x^2 & -12x \\ 4x^5 & -6x^4 & +8x^3 & & \\ \hline 4x^5 & -6x^4 & +2x^3 & +9x^2 & -12x \end{array}$$

División:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & +x^3 & +3x^2 & -5x & -12 & x^2-4 \quad \text{Divisor} \\ \cline{6-6} -2x^4 & & +8x^2 & & & 2x^2+x+5 \quad \text{Cociente} \\ \cline{1-3} & x^3 & +5x^2 & -5x & -12 & \\ & -x^3 & & +4x & & \\ \cline{2-4} & & +5x^2 & -x & -12 & \\ & & -5x^2 & & 20 & \\ \cline{3-5} & & & -x & +8 & \text{RESTO} \end{array}$$

El grado del polinomio cociente es la diferencia entre los grados del dividendo y del divisor y el grado del resto es menor que el grado del divisor

3. Regla de Ruffini

Si el divisor es un binomio de la forma x – a, entonces utilizamos un método más breve para hacer la división, llamado regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -6 & 5 & -11 \\ 2 & & 8 & 4 & 18 \\ \hline & 4 & 2 & 9 & \boxed{7} \end{array}$$

$$C(x) = 4x^2 + 2x + 9$$
$$Resto = 7$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & -6x^2 & +5x & -11 & x-2 \\ \cline{5-5} -4x^3 & +8x^2 & & & 4x^2+2x+9 \\ \cline{1-2} & 2x^2 & +5x & & \\ & -2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4} & & 9x & -11 & \\ & & -9x & +18 & \\ \cline{3-4} & & & 7 & \end{array}$$

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio por $x - a$ *es* igual al valor numérico de dicho polinomio para $x = a$; es decir, $P(a) = r$.

- Sustituir x por a en el polinomio y efectuar los cálculos.
- Dividir el polinomio por el binomio $x - a$ *y* el resto será el valor numérico para $x = a$.

Ejemplo:
Para el polinomio del ejemplo anterior: $P(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 11 = 4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 11 = \boxed{7}$

4. Factorización de polinomios

Raíces de un polinomio

Se dice que un número *a es* raíz del polinomio *p*(x) si *p*(a) =0. Las raíces del polinomio *p*(x) son las soluciones de la ecuación *p*(x) =0**.**

Ejemplo: x = 2 y x = 3 son raíces del polinomio: P(x) = x2 − 5x + 6, porque P(2) = 0 y P(3) = 0.

Teorema del factor

El polinomio P(x) es divisible por un polinomio de la forma (x - a) si y sólo si P(a) = 0.

Propiedades de las raíces y factores de un polinomio

1- Las raíces enteras son divisores del término independiente del polinomio.

2- A cada raíz del tipo x = a le corresponde un binomio del tipo (x − a).

3- Podemos expresar un polinomio en factores al escribirlo como producto de todos los binomios del tipo (x — a), que se correspondan a las raíces, x = a, que se obtengan.

Ejemplo: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$

4- La suma de los exponentes de los binomios ha de ser igual al grado del polinomio.

5- Todo polinomio que no tenga término independiente admite como raíz x = 0, ó lo que es lo mismo, admite como factor x.

Ejemplo: $x^2 + x = x \cdot (x + 1)$; Raíces: x = 0 y x = − 1

6- Un polinomio se llama irreducible o primo cuando no puede descomponerse en factores.

Ejemplo: $P(x) = x^2 + x + 1$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ $\quad Q(x) \neq 0$

5. Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar una fracción algebraica se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos.

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-6} = \frac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$$

6. Operaciones con fracciones algebraicas

Suma:

$$\frac{3x+4}{x^2-9} + \frac{2x+1}{x^2-3x} = \frac{(3x+4)x}{x(x+3)(x-3)} + \frac{(2x+1)(x+3)}{x(x-3)(x+3)} = \frac{3x^2+4x+2x^2+6x+x+3}{x(x-3)(x+3)} = \frac{5x^2+11x+3}{x(x-3)(x+3)}$$

Se factorizan los denominadores: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ y $x^2 - 3x = x(x-3)$. El mínimo común múltiplo es: $x(x+3)(x-3)$

Resta:

$$\frac{3x}{x^2+2} - \frac{2x-4}{x^2+2} = \frac{3x}{x^2+2} - \frac{2x-4}{x^2+2} = \frac{3x-(2x-4)}{x^2+2} = \frac{x+4}{x^2+2}$$

Multiplicación:

$$\frac{x+3}{2x-1} \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x+3)(x-2)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{x^2+3x-2x-6}{2x^2-x+2x-1} = \frac{x^2+x-6}{2x^2+x-1}$$

División:

$$\frac{x^2}{x+3} : \frac{x-2}{x+4} = \frac{x^2}{x+3} \cdot \frac{x+4}{x-3} = \frac{x^2(x+4)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^3+4x}{x^2-9}$$