TEMA 1 – LOS NÚMEROS REALES

SUCESIVAS AMPLIACIONES DE LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Números naturaless: **N**= { 0, 1, 2, 3, ... }

Las operacionns definidas en el conjunto de los naturales son: suma, multiplicación, potencia.

Limitaciones en el conxunto **N**:

- No están definidas las operaciones: -Resta (2–5 no tiene resultado natural)
  -División (2:5 no es natural)
  -Radicación ($\sqrt{5} \notin \mathrm{N}$)
- No tienen solución ecuaciones como: $x + 8 = 5$; $3x = 4$; $x^2 = 5$
- No es posible resolver problemas tan sencillos como: “Hallar la diagonal del cuadrado de 1cm de lado”

Números enteros: **Z**= { ... , -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ... }

Se puede observar que $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$, pues cada número natural *n* tiene su correspondiente expresión como entero positivo +*n*.

En este conjunto se soluciona el problema que la resta planteaba en los naturales. Siguen sen estar definidas la división con resultado entero (Ej: -7:2), la potenciación con exponentes negativos (Ej: 3^{-2}) y la radicación.

Números racionales: **Q**= { $\frac{a}{b}$; $a, b \in \mathrm{Z}$, siendo $b \neq 0$}, es decir, es el conjunto de las fracciones.

Cada número fraccionario admite una expresión decimal periódica, que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador. Por ejemplo. $\frac{2}{5} = (2:5) = 0{'}4$

Recíprocamente, a cada número decimal periódico se le puede asociar una fracción equivalente.
Ejemplo: Obtener la expresión fraccionaria del decimal $1{'}\widehat{5}$

$$\begin{array}{r} 10\,x = 15{'}\widehat{5} \\ -\quad x = \;\;1{'}\widehat{5} \\ \hline 9\,x = 14 \end{array}$$

El número pedido es $x = \frac{14}{9}$

Se puede apreciar que <u>todos los números enteros son racionales</u>. Sea $a \in \mathrm{Z} \Rightarrow a = \frac{a}{1} = a{'}000\ldots \in \mathrm{Q}$.

Las operaciones de números racionales con resultado en el mismo conjunto son: suma, resta, multiplicación, división (divisor $\neq 0$), potencia (con exponente entero)

Resumiendo, hasta ahora temos la cadena de relaciones: $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q}$. Nos queda por clasificar los números decimales no periódicos. Pues bien, estos van a definir un novo conjunto :

Números irracionales. **I** es el conjunto formado por los números decimales no periódicos

Ejemplos de números irracionales: $\sqrt{7}$, π , 3´73 733 7333 73333....

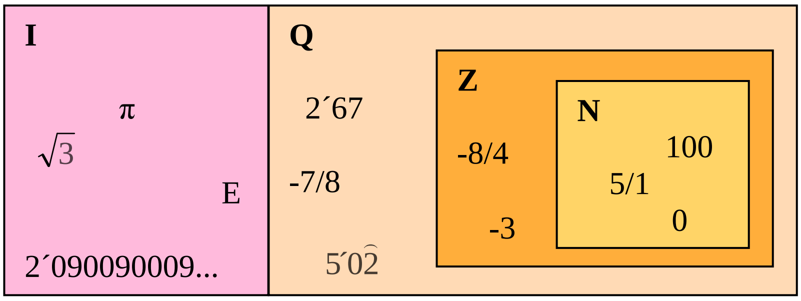
Todos tienen en común que admiten una expresión decimal ilimitada y no periódica, y por eso no pueden expresarse en forma de fracción.

Muchas veces, ante la imposibilidad de operar con sus infinitas cifras, trabajamos con expresiones aproximadas de estos. Por ejemplo, cuando hacemos cálculos en los que interviene el número π, cogemos aproximaciones del tipo 3´14 o bien 3´1416, dependiendo del nivel de exactitud que necesitemos. Esto conlleva que en las operaciones con números iracionales, se cometan errores en los resultados de forma generalizada. Existen situaciones excepcionales en las que se consigue el resultado exacto, pero esto no es lo usual. Por exemplo:
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

LOS NÚMEROS REALES

Definimos el conjunto de los reals como la unión de los conjuntos de los racionales y los irracionales. Es decir, los números reales son todos los números que admiten una expresión decimal, ya sea periódica o no periódica.

R = Q ∪ I



OPERACIONES COS NÚMEROS REALES

Las operaciones que se pueden hacer entre números reales con resultado real son : suma, resta, multiplicación, división (divisor $\neq 0$), potencias y radicales.

A continuación hacemos un resumen de algunas propiedades de las operaciones con números reales:

Propiedades de la suma:

1. Asociativa: (a+b)+c = a+ (b+c)
2. Conmutativa: a+b = b+a
3. Elemento neutro: 0, porque a+0 = 0+a = a
4. Elemento opuesto de a: -a , ya que a+(-a) = (-a)+a =0 (neutro)

Propiedades del producto:

5. Asociativa: (a·b)·c = a·(b·c)
6. Conmutativa: a·b = b·a
7. Elemento neutro: 1, porque a·1 = 1·a = a
8. Elemento inverso de a: a^{-1}, pues $a^{-1}\cdot a = a\cdot a^{-1} = 1$ (neutro)
9. Distributiva respecto de la suma: (a+b)·c = a·c + b·c

Por verificarse las propiedades de la 1 a la 9, se dice que el conjunto R de los números reales tiene una estructura algebraica de *cuerpo conmutativo.*

Propiedades de las potencias: (Por definición: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$)

1. Potencias con exponente 0: $a^0=1$
2. Producto de potencias con la misma base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
3. Cociente de potencias con la misma base: $a^n : a^m = a^{n-m}$
4. Potencia de una potencia: $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
5. Producto de potencias con el mismo exponente: $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$
6. Cociente de potencias con el mismo exponente: $a^n : b^n = (a:b)^n$

Propiedades de los radicales:

1. Produtco de radicales con el mismo índice: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$
2. Cociente de radicales con el mismo índice: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$
3. Intercambio del radical y la potencia: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. Radical de un radical: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$
5. Radicales equivalentes: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot p]{a^p}$

RELACIÓN DE ORDEN EN R

En el conjunto de los números reales de define la relación de orden $\leq$, *menor o igual que*, de la forma:

$$a \leq b \iff b - a \in R^{+} \quad \text{(es decir, si } b - a \text{ es 0 o positivo)}$$

A partir de esta, se definen también estas otras relaciones:

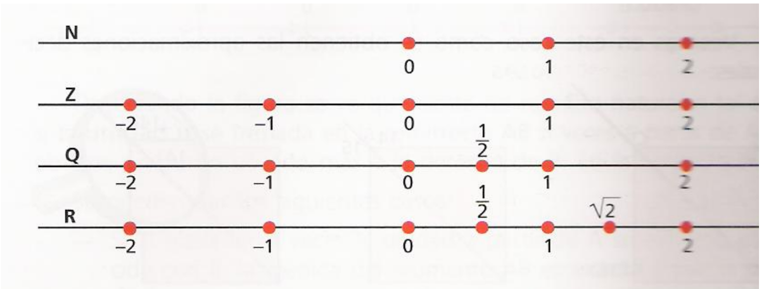
$a < b \iff a \leq b$ e $a \neq b$
$a \geq b \iff b \leq a$
$a > b \iff a \geq b$ e $a \neq b$

<u>*Propiedades de la relación de orden* $\leq$</u>:

1. $a \leq a$ (P. reflexiva)
2. $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$ (P. antisimétrica)
3. $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (P. transitiva)
4. $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$ (P. De orden total)
5. $a \leq b \iff a \pm c \leq b \pm c$ (P. de monotonía de la suma)
6. $\left.\begin{array}{l} a \leq b \text{ e } c > 0 \iff ac \leq bc \\ a \leq b \text{ e } c < 0 \iff ac \geq bc \end{array}\right\}$ (Relación con la multiplicación)

REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES: LA RECTA REAL

Los números reales se pueden hacer corresponder con los puntos de una recta. En los siguientes esquemas, se muestra gráficamente la ampliación de los números desde los naturales hasta los reales:

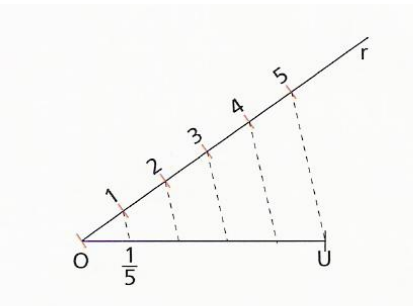


La recta queda determinada cuando se tengan fijados:

- El punto origen O, al que se asocia el número real 0
- El punto unidad U, al que se asocia el número real 1

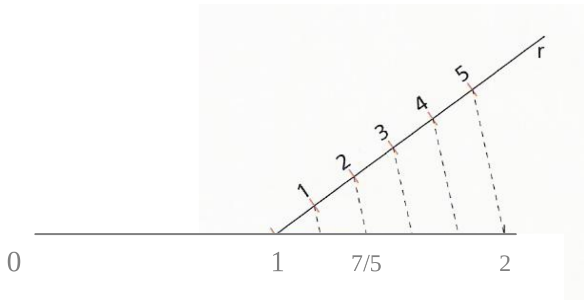
<u>*Representación de los números racionales: teorema de Tales*</u>
Vemos con ejemplos cómo se representan los números fraccionarios. Representaremos 3/5 y 7/5

Representación de fracciones menores de la unidad



Trazando una recta r que pase por O, llevamos 5 segmentos iguales sobre r a partir de O. Unimos el punto 5 con U y trazamos paralelas a ésta pasando por 4, 3, 2 y 1. Los segmentos determinados en OU son iguales y dan lugar a las fracciones 1/5, 2/5, 3/5 y 4/5.

Representación de fracciones mayores que 1

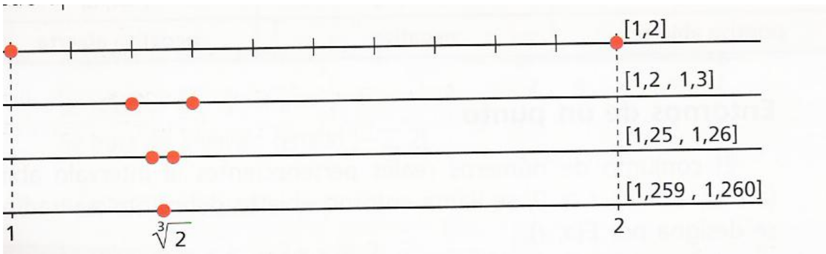


Hacendo la división entera 7:5, obtenemos la igualdad: $7/5 = 1 + 2/5$. Por estar comprendido entre los números enteros 1 y 2, repetiremos en este intervalo de la recta real el proceso que se describió para representar una fracción menor que la unidad, para quedarnos con el segundo segmento.

Representación de los números irracionales

En general haremos la representación aproximada, teniedo en cuenta la expresión decimal del número.
Como ejemplo, vemos la representación del número irracional $\sqrt[3]{2}$.

	Por defecto	Por exceso
Aprox. Unidades	1	2
Aprox. Décimas	1´2	1´3
Aprox. Centésimas	1´25	1´26
Aprox. Milésimas	1´259	1´260



VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

El valor absoluto de un número real a se desígna por |a| y coincide con el número si éste es positivo y con su opuesto se es negativo.

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos: 1. | -3´5 | = 3´5

2. La ecuación |x| = 0 tiene una única solución: x = 0

3. La ecuación |x| = 3 tiene dos soluciones: x = 3 e x = -3

4. La ecuación | x – 3 | = 2, se resuelve distinguiendo $\begin{cases} x - 3 = 2 \rightarrow x = 5 \\ x - 3 = -2 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Se define la distancia entre dos puntos a y b de la recta real como: d (a , b) = | a – b |

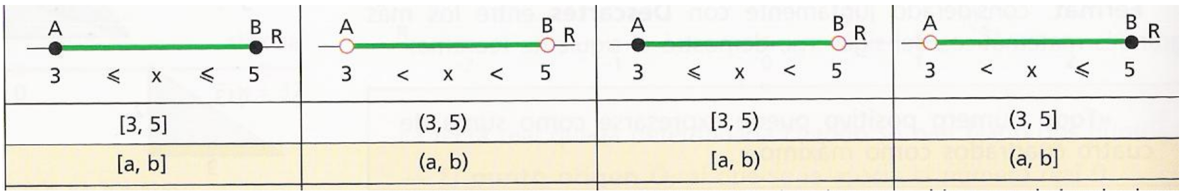
Ejemplos: 1. d (3, -2) = | 3 – (-2) | = |5| = 5

2. $d\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) = \left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-1}{6}\right| = \frac{1}{6}$

3. Para resolver la ecuación d (x , 2) = 5, partimos de la definición y obtemos esta nueva ecuación: |x – 2| = 5, y procediendo como en el ejemplo 4 anterior obtenemos: x = 7, x = -3

INTERVALOS Y SEMIRRECTAS

Un *intervalo* es el conjunto de todos los números comprendidos entre dos números reais llamados límites. Dependiendo de si los límites se incluyen o no en el intervalo, podemos clasificar los intervalos en:



Cerrado Abierto Abierto por la derecha Abierto por la ezquierda

Una *semirrecta* está formada por todos los números que son mayores (o bien menores) que un determinado número real. Dependiendo de que el límite de la semirrecta incluya o no, se tienen las seguintes posibilidades: